



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

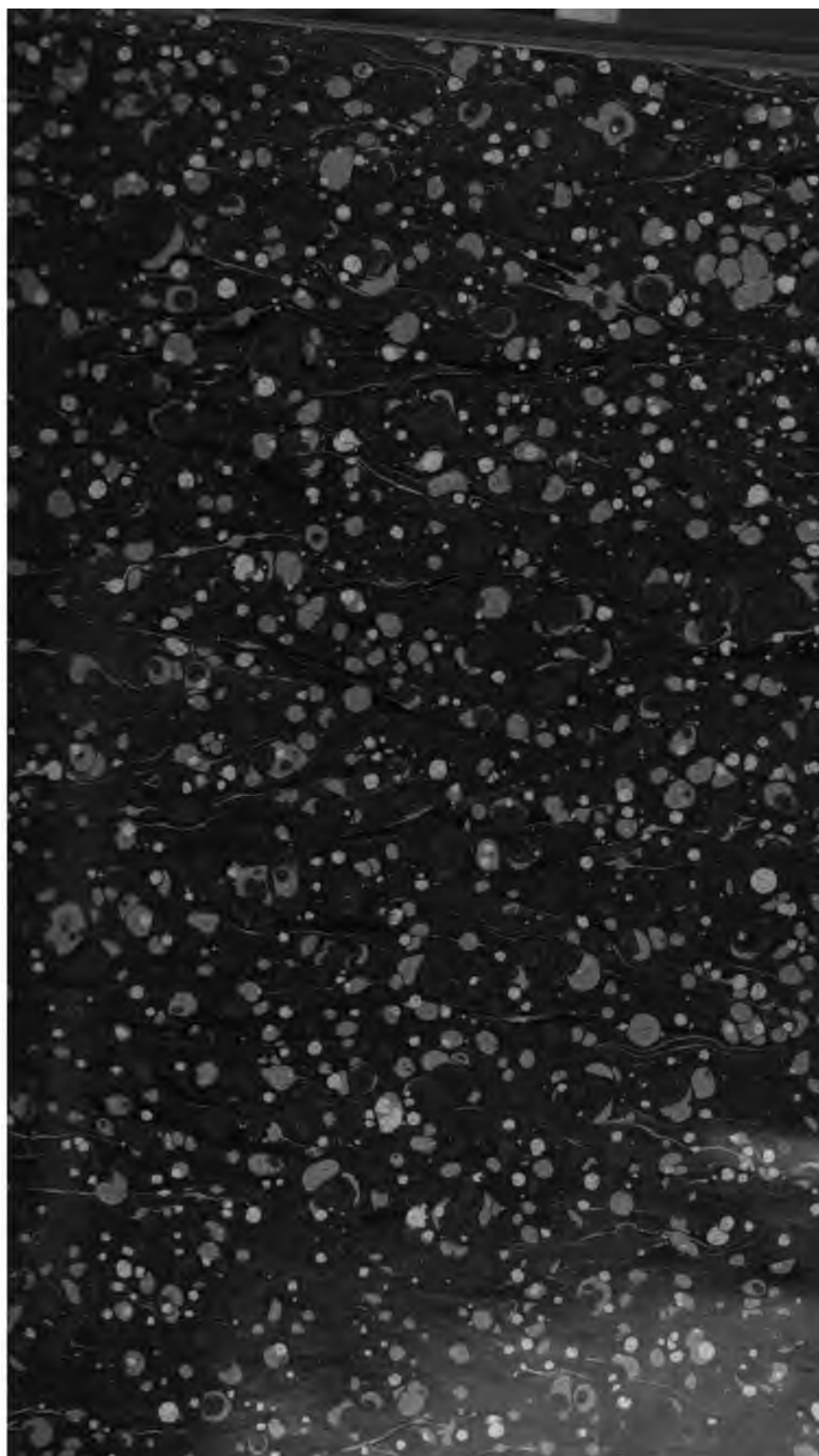
En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

3 6105 001 061 212



Stanford University Libraries









BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

(Reconnue d'utilité publique par décret en date du 11 février 1888)

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME DIX-SEPTIÈME.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1889



BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.



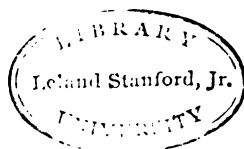
BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME DIX-SEPTIÈME. — ANNÉE 1888-89.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1889



Q60861

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1889 (¹).

Les initiales S. P. désignent les Sociétaires perpétuels.

Membres honoraires du Bureau	{	MM. BERTRAND. CREMONA. HERMITE. TCHÉBICHEFF.
Président.....		MM. ANDRÉ.
Vice-Présidents	{	COLLIGNON. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. PICQUET. VICAIRE.
Secrétaires	{	HUMBERT. KOENIGS.
Vice-Secrétaires.....	{	CARVALLO. RAFFY.
Archiviste.....		PRESLE (DE).
Trésorier.....		CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil	{	APPELL. CLAVEUX. COMBEROUSSE (DE). DARBOUX. FOURET. HALPHEN. JORDAN. LAISANT. MANNHEIM. PICARD. POINCARÉ. ROUCHÉ.

¹) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

Date
de
admission.

- 1872. **ACHARD**, directeur-adjoint de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 bis, à Paris.
- 1887. **ALBEGGIANI** (M.-L.), professeur à l'Université, 4, Salita Banditore, à Palerme (Italie).
- 1881. **AMIGUES**, professeur au lycée, boulevard du Musée, 66, à Marseille (Bouches-du-Rhône)
- 1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès Sciences, rue Gay-Lussac, 17, à Paris.
- 1879. **APPELL**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Le Verrier, 6, à Paris.
- 1884. **ARNAUD**, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Nice (Alpes-Maritimes).
- 1872. **ARON** (Henri), banquier, rue du Quatre-Septembre, 18, à Paris.
- 1881. **ASTOR**, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard de Bonne, à Grenoble (Isère).
- 1882. **AUTONNE**, ingénieur des Ponts et Chaussées, place d'Helvétie, 7, à Lyon (Rhône).
- 1888. **BAPST** (Germain), faubourg Saint-Honoré, 215, à Paris.
- 1886. **BARBERENA**, ingénieur topographe, à San-Salvador.
- 1874. **BENOIST** (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, 3, à Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loire), S. P.
- 1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
- 1873. **BERTRAND** (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue de Tournon, 4, à Paris.
- 1887. **BEYENS** (Ignacio), capitaine du Génie, 5, Santa Inès, à Cadix (Espagne).
- 1875. **BISCHOFFSHEIM**, banquier, rue Taitbout, 3, à Paris, S. P.
- 1872. **BIENAYMÉ** (Arthur), directeur des Constructions navales, à Toulon (Var).
- 1872. **BIENAYMÉ**, membre de l'Institut (décédé), S. P.
- 1888. **BIOCHE**, professeur au Lycée de Douai (Nord).
- 1881. **BONCOMPAGNI** (le prince Balthasar), place Colonna, palais Piombino, à Rome (Italie).
- 1873. **BONNET** (Ossian), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Écoles, 42, à Paris.
- 1879. **BORCHARDT**, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé), S. P.
- 1876. **BOUCHER**, ancien directeur de l'École préparatoire des Sciences et Lettres, rue Appert, 36, à Angers (Maine-et-Loire).
- 1873. **BOULANGER**, professeur de Mathématiques, rue Constantine, 101, à Mustapha inférieur (Algerie).
- 1886. **BRAULT** (A.), boulevard de Talierrie, à Bordeaux (Gironde).
- 1874. **BRIOSCHI**, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École Polytechnique, à Milan (Italie).
- 1872. **BRISSE** (Ch.), répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Bécon, 55, à Courbevoie (Seine).
- 1873. **BROCARD**, major du 4^e régiment du Génie, à Grenoble (Isère).
- 1886. **BRUNEL**, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
- 1888. **CANET** (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie à la Société des Forges de la Méditerranée, avenue de Malakoff, 91, à Paris.
- 1885. **CARON**, professeur de Géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 82, à Paris.
- 1887. **CARVALLO**, professeur au lycée de Versailles, 19, villa Saïd, Passy.
- 1884. **CASEY** (John), professeur à l'Université catholique de Dublin, Stephens Green, 84, à Dublin (Grande-Bretagne).
- 1887. **CASPARY**, professeur au Collège Humboldt, Luisenstrasse, 2, à Berlin (Allemagne).
- 1873. **CATALAN**, professeur émérite à l'Université, 21, rue des Éburons, à Liège (Belgique).
- 1887. **CERRUTI**, professeur à l'Université, à Rome (Italie).

Date
de
l'admission.

- 1888. CHAILAN (Edouard), rue Berthollet, 14, à Paris.
- 1872. CHASLES, membre de l'Institut (décédé), S. P.
- 1881. CHEMIN, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, avenue de l'Alma, 12, à Paris.
- 1884. CRYSTAL, professeur à l'Université, à Edimbourg (Écosse).
- 1873. CIVALE, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.
- 1872. CLAYEUX, intendant divisionnaire en retraite, avenue de Clichy, 52, à Paris.
- 1875. CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris, S. P.
- 1872. COLLIGNON, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
- 1875. COMBEROUSSE (DE), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale, rue Saint-Lazare, 94, à Paris.
- 1872. COURCELLES, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, 36, rue Gay-Lussac, à Paris.
- 1884. CRAIG (Thomas), professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
- 1877. CREMONA, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome (Italie).
- 1880. CRETIN, professeur au lycée Saint-Louis, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
- 1872. DARBOUT, professeur à la Faculté des Sciences, membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
- 1885. DAUTHVILLE, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
- 1882. DAVID, lieutenant-colonel d'Artillerie en retraite, rue Raymond IV, 23, à Toulouse (Haute-Garonne).
- 1881. DEFFORGES, capitaine d'infanterie, attaché à l'Etat-major du Ministre de la Guerre, boulevard Latour-Maubourg, 11, à Paris.
- 1882. DELANNOY, sous-intendant militaire, à Orléans (Loiret).
- 1885. DENARTRES, professeur à la Faculté des Sciences, à Lille (Nord).
- 1883. DERUYT, docteur ès sciences, chargé de Cours à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
- 1872. DEWULF, colonel du Génie, à Bayonne (Basses-Pyrénées).
- 1882. DREYFUS (Camille), député, rue de l'Université, 195, à Paris.
- 1886. DUNCAN, assistant à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
- 1872. DURRANDE, doyen de la Faculté des Sciences, à Poitiers (Vienne).
- 1885. DYCK WALTHER, professeur au Polytechnicum, à Munich (Bavière).
- 1881. ESCARY, professeur au Lycée de Constantine (Algérie).
- 1873. FABRE, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Trudaine, 26, à Paris.
- 1888. FAJRY, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
- 1885. FIELDS (John), professeur à Hamilton (Canada).
- 1885. FERRAZ, professeur au Lycée, à Toulouse (Haute-Garonne).
- 1882. FLEUREAU, ingénieur des Ponts et Chaussées, au Puy (Haute-Loire).
- 1881. FLOQUET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 17, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
- 1872. FLYE SAINTE-MARIE, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 12, à Paris.
- 1872. FONTÈS, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Toulouse (Haute-Garonne).
- 1889. FOUCHE, professeur, rue Soufflot, 5, à Paris.
- 1872. FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris, S. P.
- 1872. GABRIEL, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, agrégé de la Faculté de Médecine, rue Jouffroy, 39, à Paris.

- Date
de
l'admission.
1872. GAUTHIER-VILLARS, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
1882. GENOCCHI, professeur à l'Université, rue du Pô, 38, à Turin (Italie).
1872. GENTY, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Château de la Voûte, près Marmahac (Cantal).
1889. GEORGIAN, rue Vauquelin, 3, à Paris.
1872. GERONO, rue Hallé, 32 et 34, à Paris.
1872. GIROD (A.), ingénieur des Manufactures de l'État, 63, quai d'Orsay, à Paris.
1872. GOFFART.
1881. GOURSAT, maître de Conférences à l'École Normale supérieure, 83, rue Denfert-Rochereau, à Paris.
1872. GRAINDORGE, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
1881. GRUEY, directeur de l'Observatoire, à Besançon (Doubs).
1880. GUCCIA (Jean), via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Sicile).
1881. GUNTHER (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. GUYON, lieutenant de vaisseau, 13, rue de l'Université, à Paris.
1873. HAAG, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 1, à Paris.
1882. HABICH, directeur de l'École des Mines, à Lima (Pérou).
1872. HALPHEN, membre de l'Institut, chef d'escadron d'Artillerie, rue Sainte-Sophie, 17, à Versailles (Seine-et-Oise). S. P.
1886. HAUPTMANN, ingénieur attaché aux chemins de fer russes, rue Bichat, 30, à Paris.
1872. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut, inspecteur général des Mines, directeur de l'École des Mines, 60, boulevard Saint-Michel, à Paris, S. P.
1872. HENRY, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Privas (Ardèche).
1882. HENRY (Charles), bibliothécaire à la Sorbonne, rue Le Verrier, 11, à Paris.
1872. HERMARY, chef d'escadron au 17^e régiment d'Artillerie, à Douai (Nord).
1873. HERMITE, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris, S. P.
1875. HIRST, Athenæum Club, Londres (Angleterre), S. P.
1879. HOLST (Elling), stipendiat de l'Université, Pilestrade, 49, à Christiania (Norvège).
1872. HOUBIGANT, chef de bataillon du Génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
1872. HUGO (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
1880. HUMBERT, ingénieur des Mines, répétiteur à l'École Polytechnique, 161, boulevard Haussmann, à Paris.
1887. IBRAHIM EFFENDI, professeur de Mathématiques à l'École impériale civile de Médecine, à Constantinople (Turquie).
1881. IMBER, professeur à l'École Colbert, boulevard Beaumarchais, 109, à Paris.
1887. ISSALY (l'abbé), boulevard de Caudéran, 365, à Bordeaux (Gironde).
1886. JABLONSKI, professeur au lycée Charlemagne, 40, boulevard Saint-Germain, à Paris.
1873. JANIN, chef d'escadron au 17^e régiment d'Artillerie, à la Fère (Aisne).
1872. JAVARY, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris.
1889. JONQUIÈRE (Alfred), Docteur en Philosophie, rue Bonaparte, 3, à Paris.
1872. JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varenne, 48, à Paris, S. P.
1872. JOUFFRET, chef d'escadron d'Artillerie, à Bourges (Cher).

Date
de
l'admission.

1875. **JUNG**, professeur à l'Institut technique supérieur, 7, via Principe Umberto, à Milan (Italie).
1880. **KËNIGS**, maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard de Port-Royal, 72, à Paris.
1882. **KOSTENEC** (Antoine), professeur au lycée communal, à Prague (Bohème).
1882. **KOVALEWSKY** (M^{me} DE), professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1882. **KRONECKER** (Dr Léopold), professeur à l'Université, Bellevuestrasse, 13, à Berlin (Allemagne).
1881. **LACOR**, professeur de Mathématiques, boulevard Raspail, 133, à Paris.
1872. **LAFFON DE LADÉBAT**, amiral (décédé), S. P.
1873. **LAISANT**, député, docteur ès sciences, avenue Victor Hugo, 162, à Paris.
1875. **LAQUIÈRE**, administrateur de la commune mixte de Palestro (Département d'Alger).
1873. **LAUTH**, manufacturier, à Thann (Alsace).
1881. **LAVEISSIÈRE**, rue de la Verrerie, 58, à Paris.
1880. **LÉAUTÉ**, directeur des études à l'école Monge, 141, boulevard Malesherbes, à Paris.
1872. **LEMOINE** (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Littré, 5, à Paris.
1879. **LE PAIGE**, professeur à l'Université, rue des Auges, 21, à Liège (Belgique).
1882. **LE PONT**, rue Gay-Lussac, 72, à Paris.
1872. **LESPIAULT**, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1882. **LÉVY** (Léon), ingénieur des Mines, rue de Logelbach, 9, à Paris.
1882. **LÉVY** (Lucien), directeur des Études de l'École préparatoire de Sainte-Barbe, rue Valette, à Paris.
1872. **LÉVY** (Maurice), membre de l'Institut, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur au Collège de France, boulevard Saint-Germain, 258, à Paris.
1875. **LEZ** (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1873. **LIGUINE**, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
1877. **LINDEMANN**, professeur à l'Université, Fragheimer-Pulverplatz, 5, à Königsberg (Allemagne).
1886. **LILOVILLE**, ingénieur des poudres, répétiteur à l'École Polytechnique, rue des Écoles, 6 bis, à Paris.
1880. **LORIN**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Honoré, 186, à Paris.
1872. **LUCAS** (Édouard), professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, 1, rue Boutarel, à Paris.
1888. **LUCAS** (Félix), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, avenue du Trocadéro, 19, à Paris.
1886. **LYON**, étudiant en Mathématiques, au bureau de M. le Baron de Gunsbourg, à Saint-Petersbourg.
1882. **MACÉ DE LÉPINAY**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, boulevard Saint-Michel, 14, à Paris.
1872. **MALEYX**, professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 44, à Paris.
1875. **MALLOIZEL**, professeur de Mathématiques, rue de l'Estrapade, 17, à Paris.
1872. **MANNHEIM**, colonel d'Artillerie, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
1884. **MARCHAND**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de Poissy, 13, à Paris.
1888. **MARQUSET** (Gaston), député de la Haute-Saône, rue Chateaubriand, à Paris.
1872. **MARSILLY** (le général DE), rue Chante-Pinot, à Auxerre (Yonne).

Date
de
l'admission.

1884. **MARTIN** (Artemas), U. S. Coast and geodesic Survey Office, Washington D. C (États-Unis d'Amérique).
1873. **MATHIEU** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, quai Claude-le-Lorrain, 20, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1886. **MAXIMOVITCH** (Vladimir), professeur à l'Université de Wladimir (Russie).
1889. **DE MENDIZABAL TAMBORELL**, membre de la Société de Géographie de Mexico, rue Saint-Sulpice, 4, à Paris.
1884. **MERCEREAU**, licencié ès-sciences, boulevard Saint-Michel, 121, à Paris.
1888. **MERCIER**, député de la Haute-Saône, rue de l'Université, 32, à Paris.
1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1872. **MOUTARD**, inspecteur général des Mines, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1888. **NEKHOPADMTAY** (Asutosh), professeur de Mathématiques, 77, Russa Road, North Bhowanipore, à Calcutta (Inde).
1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1882. **OCAGNE** (n'), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Cherbourg (Manche).
1873. **OVIDIO** (Enrico n'), professeur à l'Université, piazza Statuto, 17, à Turin (Italie).
1882. **PANEK** (Auguste), professeur au lycée communal, à Prague (Bohême).
1888. **PAPELIER** (Georges), professeur de Mathématiques spéciales au Lycée d'Orléans, quai Harrentin, 22, à Orléans.
1884. **PARAF**, agrégé des Sciences mathématiques, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue de la Pépinière, 22, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1872. **PARMENTIER** (le général), rue du Cirque, 5, à Paris.
1872. **PARRAN**, ingénieur en chef des Mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris.
1882. **PATURET**, ancien élève de l'École Polytechnique, à Valegnat, par Bellenaves (Allier).
1884. **PAUTOXNIER** (l'abbé), professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 19, à Paris.
1888. **PEIGNÉ** (Paul), lieutenant-colonel d'artillerie, directeur-adjoint d'artillerie, avenue de la Motte-Piquet, 21 bis.
1881. **PELLET**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Blatin, 51, à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1883. **PELLETREAU**, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Constantine (Algérie).
1874. **PERCIN**, chef d'escadron d'Artillerie, commandant le 4^e bataillon de forteresse, à Verdun (Meuse).
1881. **PEROTT** (Joseph), à Port-Navalo, par Arzon (Morbihan), S. P.
1873. **PERRIN**, ingénieur en chef des Mines, rue Erpell, 5, au Mans (Sarthe), S. P.
1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, 75, via Gennaro Serra, à Naples (Italie).
1873. **PHILIPPON**, secrétaire de la Faculté des Sciences, à la Sorbonne, à Paris.
1879. **PICARD** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
1872. **PICQUET**, chef de bataillon du Génie, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Bara, 9, à Paris.
1882. **POINCARÉ**, membre de l'Institut, ingénieur des Mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris, S. P.
1882. **POKORSKY** (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohême).
1872. **POLIGNAC** (prince C. DE), villa Jessie, route de Grasse, à Cannes (Alpes-Maritimes), S. P.
1877. **POUSSET**, professeur au lycée, à Poitiers (Vienne).
1877. **PRESLE** (DE), sous-intendant militaire en retraite, rue Mouge, 82, à Paris.

Date
de
l'admission.

- 1884. PUCCIARELLI, répétiteur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44, à Paris.
- 1872. PETZ (le général), rue Saint-Méry, 98, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
- 1872. RADAU, rue de Tournon, 12, à Paris.
- 1883. RAFFY, maître de conférences à la Faculté des Sciences, boulevard Saint-Michel, 99, à Paris.
- 1873. RANCY (DE), administrateur de la Compagnie d'assurances *le Soleil*, rue Fortuny, 5, à Paris.
- 1874. REINACH (baron DE), banquier, rue de la Bourse, 4, à Paris.
- 1875. REY (Casimir), professeur à l'École du Génie, boulevard de la Reine, 25, à Versailles (Seine-et-Oise).
- 1872. RIBAUCCOUR, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Philippeville (Algérie).
- 1881. RIBOT, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon (Côte-d'Or).
- 1888. ROBIN (Gustave), docteur ès sciences mathématiques, rue Chanoinesse, 2, à Paris.
- 1872. RODET, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, 63, à Paris.
- 1872. ROUART, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.
- 1872. ROUCHÉ (Eugène), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
- 1885. ROUQUET, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, place de l'École-d'Artillerie, 2, à Toulouse (Haute-Garonne).
- 1872. ROUSSELIN, professeur au lycée Fontanes, rue du Rocher, 35, à Paris.
- 1888. RUSSO (Giovanni), professeur à Catanzaro, Discosa Case Arse, 2 (Italie).
- 1881. SAINT-PAUL (DEUX DE), sous-directeur d'Artillerie à l'Arsenal de Toulouse (Haute-Garonne).
- 1872. SARRAU, membre de l'Institut, ingénieur en chef des Poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mandé (Seine).
- 1872. SARTIAUX, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, chef adjoint de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
- 1885. SAUVAGE, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
- 1881. SCHLEGEL (Dr Victor), à Hagen (Allemagne).
- 1881. SCHOUTE, professeur à l'Université de Groningue (Hollande).
- 1876. SCHUBERT, professeur, Steindamm, 107, à Hambourg (Allemagne).
- 1877. SÉGUY, avenue des Gobelins, 28, à Paris.
- 1882. SÉLIVANOFF (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 102, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
- 1883. SIMART, lieutenant de vaisseau, examinateur d'admission à l'École navale, rue de Miroménil, 70, à Paris.
- 1884. SIMONNET, chef d'escadron d'artillerie, à Versailles (Seine-et-Oise).
- 1881. SONINE (Nicolas), professeur à l'Université, à Varsovie (Russie).
- 1881. STARKOFF (Alexis), professeur à l'École de Commerce, rue Forgowaja, 49, à Odessa (Russie).
- 1879. STEPHANOS (Dr Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
- 1886. STIELTJES, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Fleurance-Montplaisir, 4, à Toulouse (Haute-Garonne).
- 1873. STUDNICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
- 1872. SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norwège), S. P.
- 1872. TANNERY (Paul), directeur de la Manufacture des Tabacs, à Bordeaux (Gironde), S. P.

Date
de
l'admission.

1875. **TANNERY** (Jules), sous-directeur de l'École Normale supérieure, 45, rue d'Ulm, à Paris.
1882. **TARRY** (Gaston), receveur des Contributions diverses, rue Clauzel, à Alger (Algérie).
S. P.
1882. **TEHÉBICHEFF**, membre de l'Académie des Sciences, à Saint-Petersbourg (Russie), S. P.
1887. **TEVFIK PACHA** (le général), aide-de-camp de S. M. I. le Sultan, lieutenant-général d'Artillerie, à Constantinople (Turquie).
1886. **THEWISS**, docteur ès sciences de l'Université de Liège, rue Casimir-Delavigne, 3, à Paris.
1872. **TERRIER**, professeur de Mathématiques, rue de Condé, 15, à Paris.
1873. **TISSOT**, examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1872. **TISSERAND**, membre de l'Institut, avenue de l'Observatoire, 5, à Paris.
1872. **TRESCA**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
1872. **VACQUANT**, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
1884. **VANDANE**, ancien officier d'Artillerie, rue de la Vignette, 65, à Lille (Nord).
1880. **VANECEK** (J.-S.), professeur au lycée, à Jičín (Bohème).
1885. **VANECEK** (M.-M.), répétiteur à l'École Polytechnique tchèque, à Prague (Bohème).
1876. **VICAIRE**, ingénieur en chef des Mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
1882. **VIELLARD**, manufacturier, décédé, S. P.
1888. **VITO VOLTERRA**, professeur titulaire de Mécanique rationnelle à l'Université de Pise (Italie).
1880. **WALCKENAEER**, ingénieur des Mines, 9, rue Bayard, à Paris.
1879. **WEILL**, professeur de Mathématiques au collège Chaptal et à l'école Monge, 19, rue Thiers, au Vésinet (Seine-et-Oise).
1873. **WEYR** (Dr Édouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohème).
1872. **WEYR** (Dr Émile), professeur à l'Université, Hauptstrasse, 109, à Vienne, III (Autriche).
1888. **WICKERSHEIMER** (Ch.-Emile), ingénieur des Mines, député de l'Aude, rue de Bourgogne, 37 ter, à Paris.
1882. **WILSON**, député, 2, avenue d'Iéna, à Paris.
1888. **WITT** (de), boulevard Haussmann, 83, à Paris.
1878. **WORMS DE ROMILLY**, ingénieur en chef des Mines, rue Balzac, 7, à Paris.
1882. **ZABOUDSKY**, capitaine de l'Artillerie russe, professeur à l'École d'Artillerie, à Saint-Petersbourg (Russie).
1881. **ZEUTHEN**, professeur à l'Université, Citadelsvej, 9, à Copenhague (Danemark).

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

BENOIST, docteur en droit.
BISCHOFFSHEIM, banquier.
BIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé).
BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé).
BROCARD, chef de bataillon du Génie.
CHARLES, membre de l'Institut (décédé).
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier.
FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique.
GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-éditeur.
MALPHEN, membre de l'Institut.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut.
HERMITE, membre de l'Institut.
HIRST, directeur des études de l'École navale de Greenwich.
JORDAN, membre de l'Institut.
LAFFON DE LADÉBAT, amiral (décédé).
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique.
PEROTT (Joseph).
PERRIN, ingénieur en chef des Mines.
POINCARÉ, membre de l'Institut.
POLIGNAC (prince C. DE).
RAFFY, maître de conférences à la Faculté des Sciences.
SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald.
TANNERY (Paul), ingénieur des manufactures de l'État.
TARRY, receveur des Contributions diverses.
TCHÉBICHEFF, membre de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg.
VIELLARD, manufacturier (décédé).

Modifications survenues depuis le commencement de 1888.

NOUVEAUX MEMBRES.

**MM. BAPST.
BIOCHE.
CANET.
CHAILAN.
FABRY.
FOUCHÉ.
GEORGIAN.
JONQUIÈRE.
LUCAS.
MARQUISET.
DE MENDIZABAL.
MERCIER.
MUKHOPADHYAY.
PAPELIER.
PEIGNÉ.
ROBIN.
VITO VOLTERRA.
WICKERSHEIMER.
DE WITT.**

**Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.**

Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.
Académie des Sciences de Berlin.
Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.
Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, à Bruxelles.
Académie des Arts et des Sciences du Connecticut (Etats-Unis d'Amérique).
Académie des Sciences de Cracovie.
Académie des Sciences de Munich.
Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.
Académie des Sciences de Paris.
Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg.
Académie des Sciences de Prague.
Académie Royale des *Lincei*, à Rome.
Académie Impériale des Sciences de Vienne.
Acta Mathematica (rédacteur M. Mittag-Leffler, à Stockholm).

American Journal of Mathematics, publié par l'Université de John Hopkins, à Baltimore (rédacteur M. Thomas Craig, à Baltimore).

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.

Annali di Matematica (rédacteur M. Brioschi, à Milan).

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab (chez M. Gammenneyer, libraire, Car Johans Gade, 33, à Christiania).

Archiv für Mathematik und Physik (rédacteur Dr Hoppe, Prinzenstrasse, 69, à Berlin, S. W.).

Association française pour l'avancement des Sciences, à Paris.

Bulletin des Sciences mathématiques (rédacteurs MM. Darboux et J. Tannery).

Casopis pro pestování matematiky a fysiky (rédacteur M. Eduard Weyr, à Prague).

Circolo Matematico, à Palerme.

École Polytechnique de Delft (Hollande).

École Royale Normale supérieure de Pise.

Formulaire de Physique générale (29 perspectives anglaises), à Saint-Petersbourg.

Institut Royal de Luxembourg.

Institut Royal lombard des Sciences et Lettres, à Milan.

Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts, à Venise.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, à Berlin.

Jornal de Sciencias matematicas e astronomicas (rédacteur M. Gomes Teixeira, à Coimbre).

Journal de l'École Polytechnique.

Journal für die reine und angewandte Mathematik (rédacteurs MM. Kronecker et Weierstrass, à Berlin).

Journal de mathématiques élémentaires de De Longchamps, à Paris.

Journal de mathématiques spéciales de De Longchamps, à Paris.

Mathematische Annalen (rédacteur M. Felix Klein, à Göttingen).

Mathesis (rédacteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).

Observatoire météorologique magnétique central de Mexico (Mexique).

Société Belge d'Électriciens, à Bruxelles (Belgique).

Société mathématique d'Amsterdam.

Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.

Société philosophique de Cambridge.

Société Royale d'Édimbourg.

Société des Sciences de Finlande, à Helsingfors.

Société Royale des Sciences de Goettingue.

Société mathématique de Hambourg.

Société hollandaise des Sciences, à Harlem (Hollande).

Société mathématique de Kharkoff (Russie).

Société astronomique de Londres.

Société mathématique de Londres.

Société Royale de Londres.

Société mathématique de Moscou.

Société mathématique d'Odessa (Russie).

Société philomathique de Paris.

Société mathématique de Prague.

Société Royale des Sciences de Saxe, à Leipzig.

Société Royale des Sciences d'Upsal (Suède).

Société des Sciences naturelles de Zurich.

Société scientifique de Bruxelles.

Sociedad científica « Antonio Alzate », Mexico.

Université Royale de Pise.

Tidsskrift for Mathematik (rédacteur M. Zeuthen, à Copenhague).

Zeitschrift für Mathematik und Physik (rédacteur Dr Oscar Schlömilch, à Dresde).



BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Statique des polynômes; par M. FÉLIX LUCAS.

Définition de l'action algébrique. — Je considère un polynôme $F(z)$, du degré p , à coefficients réels ou imaginaires, fonction de la variable $z = x + y\sqrt{-1}$.

En désignant par H le coefficient de z^p et par $z_n = x_n + y_n\sqrt{-1}$, une des p racines de l'équation $F(z) = 0$, on a identiquement

$$(1) \quad F(z) = H(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \dots (z - z_p).$$

Chacune des racines z_n , considérée comme une coordonnée affixe relativement à un système d'axes rectangulaires, détermine un point M_n du plan. Les p racines déterminent, par conséquent, un système de p points,

$$M_1, M_2, \dots, M_n, \dots, M_p,$$

que nous pouvons appeler les *points-racines* du polynôme $F(z)$.

La variable z peut elle-même être regardée comme l'affixe d'un point mobile N .

Cela posé, matérialisons par la pensée les points racines M , ainsi que le point N , en attribuant à chacun d'eux une masse égale à l'unité, et supposons que chacun des points M repousse N

en raison inverse de la distance MN. Nous donnerons à la résultante des forces par lesquelles N est sollicité le nom d'*action algébrique des points-racines du polynôme F(z)*.

Les projections P et Q de cette action totale sur les axes des x et des y sont déterminées par les formules

$$(2) \quad \begin{cases} P = \sum \frac{x - x_n}{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}, \\ Q = \sum \frac{y - y_n}{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}. \end{cases}$$

On a, par suite,

$$(3) \quad P - Q\sqrt{-1} = \sum \frac{1}{z - z_n} = \frac{F'(z)}{F(z)}.$$

Les composantes P et Q sont donc respectivement égales à la partie réelle et au coefficient de $-\sqrt{-1}$ que donne la fraction rationnelle $\frac{F'(z)}{F(z)}$.

Condition d'équilibre. — Pour que P et Q soient nuls, il faut et il suffit que la valeur attribuée à z soit une racine de l'équation $F'(z) = 0$. En d'autres termes : *La condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre du point N est que ce point coïncide avec un des points-racines de la dérivée du polynôme considéré* ⁽¹⁾.

Une droite indéfinie tracée dans le plan et laissant d'un même côté de sa direction tous les points-racines M, laisse aussi, d'un même côté de sa direction, tous les points-racines M' du polynôme dérivé $F'(z)$, car tout point situé de l'autre côté de cette ligne est évidemment repoussé et ne peut pas être en équilibre. Par conséquent : *Tout contour fermé convexe environnant les racines d'une équation algébrique environne aussi les racines de l'équation dérivée.*

Si tous les points M sont en ligne droite, on peut prendre, pour contour fermé convexe, une ellipse infiniment aplatie, com-

(1) J'ai indiqué cette propriété dans une Note insérée le 30 juillet 1868 aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Les conséquences qui en découlent ont fait l'objet de Notes ultérieures en date des 26 janvier et 9 février 1871, 28 juillet 1879.

prenant tous les points M entre les deux extrémités de son grand axe; par conséquent : la droite contenant les points M contient aussi les points M'. Il est clair, d'ailleurs, *a priori*, que l'équilibre d'un point N n'est possible que sur cette droite.

Désignons par M_n et M_{n+1} deux points-racines consécutifs, et supposons que N se meuve depuis M_n jusqu'à M_{n+1} ; l'action algébrique, toujours dirigée suivant la droite considérée, sera d'abord infinie dans le sens $M_n M_{n+1}$; puis, finalement, infinie dans le sens opposé; elle s'annule nécessairement dans l'intervalle. Par conséquent : *Si tous les points-racines d'une équation sont en ligne droite, cette droite contient aussi les racines de l'équation dérivée; entre deux racines consécutives de l'équation proposée il y a nécessairement une racine de la dérivée.* Nous retrouvons ainsi le théorème de Rolle.

Il est évident aussi que : *Tout axe de symétrie ou tout centre de symétrie des points racines d'une équation est axe de symétrie ou centre de symétrie des points-racines de l'équation dérivée.*

Si, parmi les points-racines de l'équation proposée, il se trouve n points infiniment voisins les uns des autres, les actions exercées par ces points sur un autre point N, pris dans leur intime voisinage, sont infiniment grandes et rendent négligeables les actions du reste des points-racines. On trouvera donc $(n - 1)$ positions d'équilibre à l'intérieur d'un contour convexe infinitésimal enveloppant. Par conséquent : *Lorsqu'une équation admet n racines égales, le point multiple correspondant à ces racines représente $(n - 1)$ points-racines de l'équation dérivée.*

Potentiel de l'action algébrique. — Posons

$$(1) \quad F(z) = X + Y\sqrt{-1} = Re^{U\sqrt{-1}};$$

désignons d'ailleurs par

$$(5) \quad \mu_n = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}$$

le module du binôme $(z - z_n)$.

Nous aurons identiquement

$$(6) \quad \log \text{nép } R = \sum \log \text{nép } \mu_n + \log \text{nép module de } H.$$

et, par conséquent, en prenant successivement les dérivées par

rapport à x et par rapport à y ,

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{1}{R} \frac{dR}{dx} = \sum \frac{1}{\mu_n} \frac{d\mu_n}{dx} = \sum \frac{x - x_n}{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}, \\ \frac{1}{R} \frac{dR}{dy} = \sum \frac{1}{\mu_n} \frac{d\mu_n}{dy} = \sum \frac{y - y_n}{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}. \end{cases}$$

En nous reportant aux formules (2), nous trouvons

$$(8) \quad \begin{cases} P = \frac{1}{R} \frac{dR}{dx} = \frac{d \log \text{nép } R}{dx}, \\ Q = \frac{1}{R} \frac{dR}{dy} = \frac{d \log \text{nép } R}{dy}. \end{cases}$$

Par conséquent : *Le logarithme népérien du module de $F(z)$ est le potentiel de l'action algébrique du groupe des points-racines de ce polynôme.*

Les courbes de niveau et leurs trajectoires orthogonales. — En exprimant que ce potentiel est constant, on obtient la série des courbes de niveau, normales aux actions résultantes. Leur équation générale, du degré $2p$, est

$$(9) \quad X^2 + Y^2 = \text{const.}$$

Elles sont caractérisées et peuvent être définies par la relation géométrique

$$(10) \quad NM_1 \times NM_2 \times \dots \times NM_p = \text{const.};$$

ces courbes sont, par conséquent, des *cassinoïdes* ayant pour foyers les points-racines (M).

En faisant varier la constante du second membre, depuis zéro jusqu'à l'infini, on obtient d'abord p circonférences infinitésimales entourant les points M, puis des systèmes de courbes fermées sans branches infinies, puis une seule courbe fermée qui passe à l'infini du plan.

On obtient les trajectoires orthogonales des courbes de niveau en posant

$$(11) \quad \frac{Y}{X} = \text{const.}$$

Ces courbes algébriques et du degré p sont caractérisées et

peuvent être définies par la relation géométrique

$$(12) \quad NM_1S + NM_2S + \dots + NM_pS = \text{multiple de } \pi,$$

S désignant un point à l'infini pris dans une direction arbitraire, mais fixe.

Chacune de ces courbes possède p branches infinies hyperboliques, partant respectivement des points-racines M et dont les asymptotes passent toutes par le centre des moyennes distances de ces points en figurant une rose des vents. Cette disposition étoilée des asymptotes motive la dénomination de *stelloïdes* que j'ai proposé de donner à ces courbes (1).

Groupes polaires. — Désignons par $\frac{1}{k}$ l'intensité de l'action totale exercée sur le point N et par γ l'angle que fait la direction de cette force avec la direction positive de l'axe des x ; nous aurons

$$(13) \quad P + Q\sqrt{-1} = \frac{1}{k} e^{\gamma\sqrt{-1}},$$

et, par conséquent,

$$(14) \quad \frac{F'(z)}{F(z)} = P - Q\sqrt{-1} = \frac{1}{k} e^{-\gamma\sqrt{-1}}.$$

Pour chaque système de valeurs de k et de γ , cette équation donne p valeurs de z qui, considérées comme des affixes, déterminent les points

$$L_1, \quad L_2, \quad \dots, \quad L_p.$$

Nous appellerons *groupe polaire* l'ensemble des p points ainsi obtenus.

Il est clair que *tous les points d'un groupe polaire sont également actionnés, en intensité et en direction, par les points-racines M du polynôme $F(z)$* . Cette définition permet de déterminer un groupe polaire en se donnant un seul de ses points.

En donnant au paramètre k une valeur infinie, on obtient, comme groupe polaire, le système des points-racines M; c'est le *groupe polaire fondamental*.

(1) *Géométrie des polynômes*, Mémoire inséré en 1879 au XLVI^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

En faisant k égal à zéro, on obtient les points-racines M' du polynôme $F'(z)$; c'est le *groupe polaire dérivé*. Le nombre des points de ce groupe se réduit, par exception, à $(p-1)$, parce que l'on néglige un point situé à l'infini dans une direction indéterminée.

Nous appellerons *groupes polaires principaux* le groupe fondamental et le groupe dérivé.

Ombilics. — Il peut arriver qu'un groupe polaire contienne un point double (ou même, dans certains cas particuliers, un ou plusieurs points multiples).

Pour déterminer les diverses positions de ces *ombilics*, il suffit d'éliminer $\frac{1}{k}e^{-\sqrt{-1}}$ entre l'équation (14) et sa dérivée.

On trouve ainsi

$$(15) \quad \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{F''(z)}{F'(z)},$$

équation du degré $2(p-1)$; il existe, par conséquent, $2(p-1)$ ombilics.

On peut donner à cette équation la forme suivante

$$(16) \quad \frac{F''(z) - \lambda F'(z)}{F'(z) - \lambda F(z)} = \frac{F'''(z) - \lambda' F''(z)}{F''(z) - \lambda' F'(z)},$$

λ et λ' désignant deux paramètres arbitraires de la forme $a + b\sqrt{-1}$.

Le premier membre définit en grandeur et en direction l'action algébrique du groupe polaire déterminé par l'équation

$$(17) \quad \frac{F'(z)}{F(z)} = \lambda.$$

Le second membre définit, de même, en grandeur et en direction l'action algébrique du groupe polaire déterminé par l'équation

$$(18) \quad \frac{F''(z)}{F'(z)} = \lambda'.$$

Les deux actions algébriques dont il s'agit sont égales d'après l'équation (16), équivalente à l'équation (15). Par conséquent : *L'action algébrique d'un groupe polaire sur un ombilic est constante en grandeur et en direction, quel que soit ce groupe*

polaire. Cette action est toujours égale à celle du groupe des points-racines (M).

Intensité et direction de l'action algébrique. — Reprenons la formule

$$(3) \quad P - Q\sqrt{-1} = \frac{F'(z)}{F(z)},$$

qui détermine les projections P et Q, sur les axes de coordonnées rectangulaires, de l'action algébrique du groupe des points M.

L'intensité de cette force résultante, et l'angle qu'elle fait avec la direction positive de l'axe des x sont respectivement égales au module et à l'argument du premier membre. On a, par conséquent,

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Intensité} = \frac{\text{module de } F'(z)}{\text{module de } F(z)}, \\ \text{Angle de direction} = \arg. \text{ de } F(z) - \arg. \text{ de } F'(z). \end{array} \right.$$

La première de ces relations conduit à la formule ségmentaire :

$$(20) \quad \text{Intensité de l'action} = p \frac{NM'_1 \times NM'_2 \times \dots \times NM'_{p-1}}{NM_1 \times NM_2 \times \dots \times NM_p}.$$

Par conséquent : *On peut obtenir l'intensité de l'action algébrique du groupe (M) sur un point quelconque N en divisant le produit des distances de N au groupe dérivé (M') par le produit des distances de N au groupe (M) et multipliant le quotient par p.*

La seconde relation conduit à la formule angulaire

$$(21) \quad \text{Direction} = \left\{ \begin{array}{l} NM_1 S + NM_2 S + \dots + NM_p S, \\ - (NM'_1 S + NM'_2 S + \dots + NM'_{p-1} S), \end{array} \right.$$

dans laquelle S désigne le point à l'infini de la direction positive de l'axe des x .

En nous reportant aux formules (8), nous voyons que le carré de l'intensité de la force a pour expression analytique

$$(22) \quad P^2 + Q^2 = \frac{1}{R^2} \left[\left(\frac{dR}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dR}{dy} \right)^2 \right];$$

nous voyons aussi que la tangente de l'angle de direction a pour

valeur

$$(23) \quad \frac{Q}{P} = \frac{\frac{dR}{dy}}{\frac{dR}{dx}}.$$

Or la formule

$$(24) \quad R^2 = X^2 + Y^2$$

donne

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{1}{R} \frac{dR}{dx} = \frac{X \frac{dX}{dx} + Y \frac{dY}{dx}}{X^2 + Y^2}, \\ \frac{1}{R} \frac{dR}{dy} = \frac{X \frac{dX}{dy} + Y \frac{dY}{dy}}{X^2 + Y^2}. \end{cases}$$

Par conséquent, en tenant compte des identités bien connues

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy}, \\ \frac{dX}{dy} = -\frac{dY}{dx}, \end{cases}$$

nous trouvons

$$(27) \quad P^2 + Q^2 = \frac{\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2}{X^2 + Y^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\left(\frac{dX}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dy}\right)^2}{X^2 + Y^2}.$$

Nous avons aussi

$$(28) \quad \frac{Q}{P} = \frac{X \frac{dX}{dy} + Y \frac{dY}{dy}}{X \frac{dX}{dx} + Y \frac{dY}{dx}}.$$

Lignes isodynamiques et trajectoires orthogonales. — On détermine un lieu géométrique du point N si l'on assujettit l'action exercée sur ce point à conserver une intensité déterminée. En faisant varier cette intensité, on obtient une série de lieux géométriques que l'on peut appeler *lignes isodynamiques*, et dont l'équation générale est

$$(29) \quad P^2 + Q^2 = \text{const.}$$

D'après la formule (27), ces courbes sont algébriques et du degré pair $2p$.

Le premier membre de cette équation est le carré du module de

la fraction rationnelle $\frac{F'(z)}{F(z)}$; on peut, par conséquent, obtenir l'équation générale des trajectoires orthogonales des courbes isodynamiques en égalant à une constante arbitraire la tangente de l'argument de la fraction rationnelle dont il s'agit. Nous trouvons ainsi

$$(30) \quad -\frac{Q}{P} = \text{const.}$$

D'après la formule (28) ces courbes sont algébriques et du degré impair $(2p - 1)$. Chacune d'elles peut être considérée comme le lieu géométrique décrit par le point N lorsque l'on assujettit l'action exercée sur ce point à rester parallèle à une droite donnée. Par conséquent : *Les lignes isodynamiques ont pour trajectoires orthogonales un système de lignes correspondant aux actions parallèles.*

Les points nodaux coïncident avec les ombilics. — D'après la formule

$$(3) \quad \frac{F'(z)}{F(z)} = P - Q\sqrt{-1},$$

P et Q sont deux fonctions des variables x et y qui satisfont aux relations

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{dP}{dx} = -\frac{dQ}{dy}, \\ \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}. \end{cases}$$

Pour obtenir les points du plan sur lesquels peuvent se placer des points singuliers ou nœuds appartenant à certaines lignes isodynamiques, il suffit d'éliminer la constante arbitraire du second membre de l'équation (29) entre cette équation et ses deux dérivées partielles relativement à x et à y . On arrive ainsi aux deux équations simultanées

$$(35) \quad \begin{cases} P \frac{dP}{dx} + Q \frac{dQ}{dx} = 0, \\ P \frac{dP}{dy} + Q \frac{dQ}{dy} = 0. \end{cases}$$

Analogiquement, pour obtenir les nœuds possibles des lignes correspondant aux actions parallèles, il suffit d'éliminer la constante

arbitraire du second membre de l'équation (30) entre cette équation et ses deux dérivées partielles relativement à x et à y . Nous obtenons, de cette manière, les équations simultanées :

$$(36) \quad \begin{cases} P \frac{dQ}{dx} - Q \frac{dP}{dx} = 0, \\ P \frac{dQ}{dy} - Q \frac{dP}{dy} = 0. \end{cases}$$

Les relations (34) montrent que les systèmes (35) et (36) sont identiques. Par conséquent : *Les nœuds possibles des lignes isodynamiques sont aussi les nœuds possibles des lignes correspondant aux actions parallèles.*

A l'un ou à l'autre des systèmes (35) et (36), on peut substituer le suivant

$$(37) \quad \begin{cases} P \frac{dP}{dx} + Q \frac{dQ}{dx} = 0, \\ Q \frac{dP}{dx} - P \frac{dQ}{dx} = 0. \end{cases}$$

Multiplions la seconde équation par $\sqrt{-1}$ et retranchons-la ensuite à la première; nous trouverons

$$(38) \quad (P - Q\sqrt{-1}) \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx} \sqrt{-1} \right) = 0,$$

et cette seule équation équivaut au système (37). Elle se décompose d'ailleurs en deux autres, savoir

$$(39) \quad P - Q\sqrt{-1} = 0,$$

$$(40) \quad \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx} \sqrt{-1} = 0.$$

D'après la formule (3), l'équation (39) équivaut à

$$(41) \quad \frac{F(z)}{F(\bar{z})} = 0;$$

elle a pour points-racines le groupe dérivé (M') et tout point à l'infini du plan; ce ne sont pas là des points nœuds. Nous n'avons donc à tenir compte que de l'équation (40), qui peut aussi s'écrire

$$(42) \quad \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dx} \sqrt{-1} = \frac{d}{dx} \frac{F(z)}{F(\bar{z})} = 0.$$

Au lieu de prendre la dérivée par rapport à x , nous pouvons prendre la dérivée par rapport à z , et nous trouvons

$$(43) \quad \frac{F(z)F''(z) - [F'(z)]^2}{[F'(z)]^2} = 0,$$

soit, en laissant de côté la solution correspondant aux valeurs infinies de z ,

$$(44) \quad \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{F''(z)}{F'(z)};$$

c'est précisément l'équation (15) à laquelle nous avons été conduits en cherchant à déterminer les positions des ombilics. Par conséquent : *Les points nodaux des lignes isodynamiques ou de leurs trajectoires orthogonales coïncident avec les ombilics.*

Groupes polaires générateurs. — L'équation de la ligne isodynamique qui correspond à l'intensité $\frac{1}{k}$ peut s'écrire

$$(45) \quad \text{module de } \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{1}{k}.$$

L'équation

$$(46) \quad \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{1}{k} e^{-\gamma\sqrt{-1}},$$

dans laquelle, laissant k invariable, on fera varier l'angle γ depuis zéro jusqu'à 2π , détermine un groupe polaire mobile dont tous les points se meuvent sur la ligne isodynamique considérée. Par conséquent : *Toute ligne isodynamique peut être engendrée par le mouvement d'un groupe polaire.*

En attribuant à k une valeur immensément grande, on obtient une ligne isodynamique composée de $(p-1)$ courbes fermées, circonférences infinitésimales entourant chacun des points M' , et d'une circonférence enveloppante dont le rayon est immensément grand; chacune de ces p courbes est monodrome, c'est-à-dire qu'elle est parcourue par un seul point du groupe polaire mobile.

Cette allure générale de la ligne isodynamique est conservée lorsque l'on fait décroître k , jusqu'à ce qu'il y ait passage par un ombilic ou point nodal; alors se fait la première apparition d'une courbe non monodrome. Lorsque k , continuant à décroître, de-

vient assez petit pour que tous les ombilics aient été franchis, on obtient une ligne isodynamique composée de p courbes fermées monodromes enveloppant chacune un des points racines M .

L'équation de la ligne correspondant aux actions parallèles dont les directions sont définies par les angles γ et $(\gamma + \pi)$ peut s'écrire sous la forme

$$(47) \quad \text{argument de } \frac{F'(z)}{F(z)} = \begin{cases} \text{soit } (-\gamma), \\ \text{soit } (-\gamma - \pi). \end{cases}$$

L'équation

$$(48) \quad \frac{F'(z)}{F(z)} = \begin{cases} \text{soit } \frac{1}{k} e^{-\gamma\sqrt{-1}}, \\ \text{soit } \frac{1}{k} e^{-(\gamma+\pi)\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

dans laquelle, laissant γ invariable, on fera varier k depuis l'infini jusqu'à zéro, détermine un couple de groupes polaires mobiles dont tous les points se meuvent sur la ligne considérée. Par conséquent : *Toute trajectoire orthogonale des lignes isodynamiques peut être engendrée par les mouvements simultanés de deux groupes polaires correspondant respectivement à des actions de sens opposés.*

Lignes halysiques. — L'équation générale, du degré $(2p - 1)$,

$$(49) \quad \frac{Q}{P} = \frac{X \frac{dX}{dy} + Y \frac{dY}{dy}}{X \frac{dX}{dx} + Y \frac{dY}{dx}} = \text{const.}$$

de ces trajectoires orthogonales montre que chacune d'elles passe, d'une part, par tous les points (M) et, d'autre part, par tous les points (M') ; elle établit donc entre les points appartenant aux deux groupes polaires principaux, soit un enchaînement total, soit des enchaînements partiels; nous lui donnerons, pour ce motif, le nom de *ligne halysique* ⁽¹⁾

Les points d'intersection réels de la ligne isodynamique correspondant à l'intensité $\frac{1}{k}$ avec la ligne halysique correspondant aux deux directions opposées γ ou $(\pi + \gamma)$ sont évidemment les deux

(1) Adjectif ayant pour radical le mot grec ἅλυστος, chaîne.

groupes polaires déterminés par l'équation (48); leur nombre est, par conséquent, égal à $2p$.

Puisque le degré $(2p - 1)$ de l'équation (49) est impair, toute ligne halysique possède au moins un point à l'infini. Considérons son intersection avec la ligne isodynamique correspondant à une intensité infiniment petite, ligne qui se compose de $(p - 1)$ circonférences infinitésimales entourant respectivement les points (M') , et d'une immense circonférence enveloppante; nous trouverons $2(p - 1)$ points d'intersection voisins des points (M') et, par conséquent, 2 points d'intersection seulement avec la circonférence de rayon infini. Ces deux points à l'infini sont nécessairement situés sur les deux directions opposées d'une droite parallèle à l'action algébrique exercée sur un point quelconque de la ligne halysique considérée. En résumé, *toute ligne halysique a une seule branche infinie, laquelle est hyperbolique et possède une asymptote parallèle aux actions algébriques exercées sur les points de la ligne halysique.*

Si, laissant fixe dans le plan le groupe des points (M) , nous transportons l'origine des coordonnées au centre des moyennes distances ou centre de gravité de ce groupe, le polynôme $F(z)$ perdrait son terme du degré $(p - 1)$, et le polynôme dérivé $F'(z)$ perdrait son terme du degré $(p - 2)$. L'équation (49) se trouverait, par conséquent, dépouillée de son terme du degré $(2p - 2)$; l'asymptote de la courbe passerait donc par l'origine des coordonnées. Nous voyons ainsi que *l'asymptote d'une courbe halysique passe toujours par le centre des moyennes distances du groupe des points-racines (M) .*

Polynômes conjugués. — Désignons par $\mathcal{F}(z)$ le polynôme conjugué de $F(z)$, c'est-à-dire le polynôme que l'on obtient en remplaçant la variable $z = x + y\sqrt{-1}$ par la variable conjuguée $z = x - y\sqrt{-1}$ et chacun des coefficients $(a + b\sqrt{-1})$ par la quantité conjuguée $(a - b\sqrt{-1})$. Il est clair que $\mathcal{F}(z)$ sera le polynôme conjugué de $F'(z)$. Nous pourrions, par suite, joindre à la formule

$$(3) \quad \frac{F'(z)}{F(z)} = P - Q\sqrt{-1}$$

la formule conjuguée

$$(50) \quad \frac{\bar{F}'(z)}{\bar{F}(z)} = P + Q\sqrt{-1}.$$

Si d'ailleurs nous désignons par $\frac{1}{k}$ l'intensité de l'action algébrique dont P et Q sont les projections sur les axes des coordonnées, et par γ l'angle que la direction de cette force fait avec la direction positive de l'axe des x , nous pourrions substituer aux équations ci-dessus les deux équations suivantes :

$$(51) \quad \begin{cases} \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{1}{k} e^{-\gamma\sqrt{-1}}, \\ \frac{\bar{F}'(z)}{\bar{F}(z)} = \frac{1}{k} e^{\gamma\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

En multipliant ces deux équations membre à membre, il vient

$$(52) \quad \frac{F'(z)\bar{F}'(z)}{F(z)\bar{F}(z)} = \frac{1}{k^2}.$$

En divisant la seconde équation par la première, on trouve

$$(53) \quad \frac{F(z)\bar{F}'(z)}{\bar{F}(z)F'(z)} = e^{2\gamma\sqrt{-1}}.$$

Équation d'une ligne isodynamique.—L'équation (52) montre que l'expression

$$\frac{F'(z)\bar{F}'(z)}{F(z)\bar{F}(z)}$$

est égal au carré du module de la fraction

$$\frac{F'(z)}{F(z)}.$$

En se reportant à l'équation (45), on voit que l'équation de la ligne isodynamique correspondant à l'intensité $\frac{1}{k}$ peut s'écrire sous la forme (52), soit encore sous la forme

$$(54) \quad \frac{kF'(z)}{F(z)} = \frac{\bar{F}'(z)}{\bar{F}(z)}.$$

En désignant par μ et ν deux paramètres arbitraires (de la forme $a + b\sqrt{-1}$), nous pouvons remplacer cette équation (54) par la

suivante

$$(55) \quad \frac{kF'(z) - \mu F(z)}{F(z) - \nu kF'(z)} = \frac{\mathcal{F}(z) - \mu k\mathcal{F}'(z)}{k\mathcal{F}'(z) - \nu \mathcal{F}(z)}.$$

Propriété segmentaire. — Les paramètres μ et ν étant entièrement arbitraires, nous pouvons leur attribuer deux valeurs conjuguées

$$(55 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \mu = \lambda e^{-\theta\sqrt{-1}}, \\ \nu = \lambda e^{\theta\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Si nous divisons alors l'équation (55) par son second membre, le polynôme numérateur du premier membre se trouve multiplié par son conjugué et il en est de même au dénominateur. Le premier membre devient donc égal au carré du module de la fraction rationnelle

$$\frac{kF'(z) - \lambda e^{-\theta\sqrt{-1}} F(z)}{F(z) - \lambda k e^{\theta\sqrt{-1}} F'(z)},$$

tandis que le second membre devient égal à l'unité.

D'après cela, si nous désignons par

$$C_1, C_2, \dots, C_p$$

le groupe polaire déterminé par l'équation

$$(56) \quad kF'(z) - \lambda e^{-\theta\sqrt{-1}} F(z) = 0$$

et par

$$D_1, D_2, \dots, D_p$$

le groupe polaire déterminé par l'équation

$$(57) \quad F(z) - \lambda k e^{\theta\sqrt{-1}} F'(z) = 0$$

nous pourrions écrire que chaque point N de la ligne isodynamique considérée satisfait à la relation

$$(58) \quad \frac{NC_1 \times NC_2 \times \dots \times NC_p}{ND_1 \times ND_2 \times \dots \times ND_p} = \frac{1}{\lambda}.$$

Par conséquent, *chaque courbe isodynamique peut être définie géométriquement au moyen d'une infinité de systèmes de deux groupes polaires, le produit des distances d'un quelconque de ses points aux pôles du premier groupe étant dans*

un rapport constant avec le produit des distances du même point aux pôles du second groupe.

Le groupe (C), déterminé par l'équation (56), correspond à l'action algébrique dont l'intensité est $\frac{\lambda}{k}$, et dont la direction fait avec la direction positive de l'axe des x l'angle θ . L'autre groupe (D), déterminé par l'équation (57), correspond à l'action algébrique d'intensité $\frac{1}{\lambda k}$ et de même direction θ que la précédente.

Par conséquent, pour que deux groupes polaires (C) et (D) puissent servir à la définition segmentaire de la ligne isodynamique correspondant à l'intensité $\frac{1}{k}$, il faut et suffit que les actions algébriques relatives à ces deux groupes soient de même direction et que le produit des intensités de ces actions soit égal au carré de l'intensité $\frac{1}{k}$.

En attribuant au paramètre λ une valeur soit nulle, soit infinie, on identifie le système (C), (D) avec le système (M), (M'). Par conséquent, le groupe polaire principal et le groupe polaire dérivé peuvent servir à la définition géométrique de toute ligne isodynamique.

En faisant $\lambda = 1$, on rendrait identiques les deux équations (56) et (57), en sorte que le groupe (D) se confondrait avec le groupe (C), l'un et l'autre venant d'ailleurs se placer sur la ligne isodynamique considérée; la formule (58) se réduirait à une identité donnant une indétermination complète du point N.

Propriété angulaire. — Reprenons l'équation (55) et donnons aux paramètres μ et ν des modules égaux à l'unité avec des arguments quelconques, en posant

$$(59) \quad \begin{cases} \mu = e^{-\alpha\sqrt{-1}}, \\ \nu = e^{\beta\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Cette équation (55) deviendra

$$(60) \quad e^{-\alpha\sqrt{-1}} \frac{F(z) - ke^{\alpha\sqrt{-1}} F'(z)}{\tilde{F}(z) - ke^{-\alpha\sqrt{-1}} \tilde{F}'(z)} = e^{-\beta\sqrt{-1}} \frac{F(z) - ke^{\beta\sqrt{-1}} F'(z)}{\tilde{F}(z) - ke^{-\beta\sqrt{-1}} \tilde{F}'(z)}.$$

La fraction rationnelle qui figure dans le premier membre a

pour numérateur et pour dénominateur deux polynômes conjugués; l'argument de cette fraction est donc égal au double de l'argument de son numérateur. La même observation s'applique à la fraction rationnelle qui figure dans le second membre.

Par conséquent, on peut donner à l'équation (60) la forme suivante :

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{argument de } [F(z) - ke^{z\sqrt{-1}} F'(z)] \\ - \text{argument de } [F(\bar{z}) - ke^{\bar{z}\sqrt{-1}} F'(\bar{z})] \end{array} \right\} = \frac{\alpha - \beta}{2} + \text{multiple de } \pi.$$

Cela posé, désignons par

$$A_1, A_2, \dots, A_p$$

le groupe polaire déterminé par l'équation

$$(62) \quad F(z) - ke^{z\sqrt{-1}} F'(z) = 0$$

et par

$$B_1, B_2, \dots, B_p$$

le groupe polaire déterminé par l'équation

$$(63) \quad F(\bar{z}) - ke^{\bar{z}\sqrt{-1}} F'(\bar{z}) = 0.$$

L'équation (61) pourra prendre la forme géométrique

$$(64) \quad A_1 N B_1 + A_2 N B_2 + \dots + A_p N B_p = \frac{\alpha - \beta}{2} + \text{multiple de } \pi,$$

qui met en relief une propriété angulaire de la ligne isodynamique correspondant à l'intensité $\frac{1}{k}$.

D'après les équations (62) et (63), les deux groupes polaires (A) et (B) appartiennent à la ligne isodynamique dont il s'agit; c'est la seule condition qui leur soit imposée, puisque les arguments α et β sont arbitraires.

En résumé, si l'on désigne par (A) et (B) deux groupes polaires situés sur une même ligne isodynamique, on peut considérer cette ligne comme le lieu géométrique des points, tels que la somme des angles sous lesquels sont vus les segments AB soit égale à un multiple de π augmenté d'un angle constant.

Équation d'une ligne halytique. — Considérons maintenant une trajectoire orthogonale des lignes isodynamiques, ligne haly-

sique correspondant aux actions algébriques parallèles dont les directions font avec la direction positive de l'axe des x , soit l'angle γ , soit l'angle $(\pi + \gamma)$.

L'équation de cette courbe, donnée par la formule (47), peut être ramenée à la forme

$$(53) \quad \frac{F(z)\tilde{F}'(z)}{\tilde{F}(z)F'(z)} = e^{2\gamma\sqrt{-1}},$$

soit aussi

$$(65) \quad e^{\gamma\sqrt{-1}} \frac{F'(z)}{F(z)} = e^{-\gamma\sqrt{-1}} \frac{\tilde{F}'(z)}{\tilde{F}(z)}.$$

On peut, à cette dernière équation, substituer la suivante

$$(66) \quad \frac{F(z) - \mu e^{\gamma\sqrt{-1}} F'(z)}{F(z) - \nu e^{\gamma\sqrt{-1}} F'(z)} = \frac{\tilde{F}(z) - \mu e^{-\gamma\sqrt{-1}} \tilde{F}'(z)}{\tilde{F}(z) - \nu e^{-\gamma\sqrt{-1}} \tilde{F}'(z)},$$

dans laquelle μ et ν représentent deux paramètres arbitraires.

Propriété angulaire. — Attribuons à ces paramètres μ et ν des valeurs réelles et positives h et k . Les deux membres de l'équation (66) deviennent alors conjugués; si donc nous divisons cette équation par son second membre, nous trouverons

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{argument de } [F(z) - h e^{\gamma\sqrt{-1}} F'(z)] \\ - \text{argument de } [F(z) - k e^{\gamma\sqrt{-1}} F'(z)] \end{array} \right\} = \text{multiple de } \pi.$$

Désignons par (H) le groupe polaire représenté par l'équation

$$(68) \quad \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{1}{h} e^{-\gamma\sqrt{-1}},$$

et par (K) le groupe polaire représenté par l'équation

$$(69) \quad \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{1}{k} e^{-\gamma\sqrt{-1}};$$

l'équation (67) prendra la forme géométrique

$$(70) \quad \Pi_1 N K_1 + \Pi_2 N K_2 + \dots + \Pi_p N K_p = \text{multiple de } \pi.$$

Par conséquent, chaque ligne halysique peut être définie géométriquement au moyen d'une infinité de systèmes de deux groupes polaires (H) et (K) situés sur elle-même. On peut considérer cette ligne comme le lieu géométrique des points, tels

que la somme des angles sous lesquels sont vus les segments HK soit égale à un multiple de π .

Propriété segmentaire. — Reprenant l'équation (66), attribuons aux paramètres μ et ν deux valeurs imaginaires conjuguées

$$(71) \quad \begin{cases} \mu = \lambda e^{\theta\sqrt{-1}}, \\ \nu = \lambda e^{-\theta\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

cette équation deviendra

$$(72) \quad \frac{F(z) - \lambda e^{(\theta+\gamma)\sqrt{-1}} F'(z)}{F(z) - \lambda e^{(\gamma-\theta)\sqrt{-1}} F'(z)} \times \frac{\tilde{F}(z) - \lambda e^{-(\theta+\gamma)\sqrt{-1}} \tilde{F}'(z)}{\tilde{F}(z) - \lambda e^{(\theta-\gamma)\sqrt{-1}} \tilde{F}'(z)} = 1.$$

Les fractions rationnelles qui constituent les deux facteurs du premier membre sont des quantités conjuguées; leur produit est, par conséquent, égal au carré du module de la première de ces fractions.

Si nous désignons par (S) le groupe polaire représenté par l'équation

$$(73) \quad \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{1}{\lambda} e^{-(\theta+\gamma)\sqrt{-1}},$$

et par (T) le groupe polaire représenté par l'équation

$$(74) \quad \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{1}{\lambda} e^{(\theta-\gamma)\sqrt{-1}},$$

l'équation (72) prendra la forme géométrique

$$(75) \quad \frac{NS_1 \times NS_2 \times \dots \times NS_p}{NT_1 \times NT_2 \times \dots \times NT_p} = 1.$$

Par conséquent, *chaque ligne halysique peut être définie géométriquement au moyen d'une infinité de systèmes de deux groupes polaires, le produit des distances d'un quelconque de ses points aux pôles du premier groupe étant égal au produit des distances du même point aux pôles du second groupe.*

Les groupes (S) et (T) correspondent respectivement à des actions algébriques ayant une intensité commune $\frac{1}{\lambda}$, et dont les directions font, avec la direction positive de l'axe des x , deux angles $(\theta + \gamma)$ et $(\gamma - \theta)$ dont la somme est égale à 2γ . Par conséquent : *Pour que deux groupes polaires (S) et (T) puissent*

servir à la définition segmentaire de la ligne halysique correspondant aux actions algébriques de direction (γ) et $(\gamma + \pi)$, il faut et il suffit que ces deux groupes appartiennent à une même ligne isodynamique et que les angles de direction des actions algébriques correspondant à ces deux groupes aient une somme égale à 2γ .

En attribuant au paramètre λ une valeur nulle ou une valeur infinie, on réduit l'équation (72) à une simple identité; il en résulte que le groupe polaire principal (M) et le groupe polaire dérivé (M') ne peuvent entrer ni l'un ni l'autre dans le système (S), (T).

L'équation (72) se réduirait encore à une identité si l'on supposait $\theta = 0$, de manière à amener la coïncidence des groupes (S) et (T), l'un et l'autre venant d'ailleurs se placer sur la trajectoire orthogonale considérée; la formule (75) donnerait, dans ce cas, l'indétermination complète du point N.

Construction de quelques courbes. — Il ne sera pas inutile, avant de continuer l'exposé des théories générales qui nous occupent, de donner quelques exemples de lignes isodynamiques et de trajectoires orthogonales.

En tenant compte de la formule

$$(4) \quad F(z) = X + Y\sqrt{-1},$$

l'équation de la courbe isodynamique déterminée par les points racines (M) du polynôme $F(z)$ et correspondant à l'intensité $\frac{1}{k}$ peut s'écrire

$$(76) \quad \frac{\left(\frac{dX}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dz}\right)^2}{X^2 + Y^2} = \frac{1}{k^2}.$$

La ligne halysique, correspondant aux deux directions opposées données par les angles γ et $(\gamma + \pi)$, peut d'ailleurs être représentée par l'équation

$$(77) \quad \frac{X \frac{dX}{d\gamma} + Y \frac{dY}{d\gamma}}{X \frac{dX}{dx} + Y \frac{dY}{dx}} = \tan \gamma.$$

Le groupe polaire dérivé est déterminé par l'équation

$$F'(z) = 0.$$

Quant aux ombilics, ils sont déterminés par l'équation

$$(15) \quad [F'(z)]^2 = F(z)F''(z).$$

1. Supposons, en premier lieu,

$$(78) \quad F(z) = z^p - \alpha^p,$$

α désignant un paramètre réel et positif.

Les p points racines (M) occupent les sommets d'un polygone régulier dont le centre est à l'origine des coordonnées et dont un sommet est placé sur la direction positive de l'axe des x ; α est le rayon du cercle circonscrit à ce polygone.

Le groupe polaire dérivé (M') se compose de $(p-1)$ points coïncidant tous avec l'origine des coordonnées.

L'équation aux ombilics devient

$$(79) \quad p(p-1)(z^p - \alpha^p)z^{p-2} = p^2 z^{2p-2},$$

et se décompose en deux autres

$$(80) \quad \begin{cases} z^{p-2} = 0, \\ z^p = (p-1)\alpha^p e^{\pi\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

nous obtenons donc, d'une part, $(p-2)$ ombilics coïncidant avec l'origine des coordonnées et, d'autre part, p ombilics formant les sommets d'un polygone régulier concentrique avec celui des points (M), ayant pour rayon $\alpha\sqrt[p]{p-1}$ et dont les rayons sont dirigés suivant les apothèmes du polygone des points (M).

En faisant usage des coordonnées polaires ρ et ω , on a identiquement

$$(81) \quad \begin{cases} X = \rho^p \cos p\omega - \alpha^p, \\ Y = \rho^p \sin p\omega, \\ \frac{dX}{dx} = p\rho^{p-1} \cos(p-1)\omega = \frac{dX}{d\rho}, \\ \frac{dY}{dr} = p\rho^{p-1} \sin(p-1)\omega = -\frac{dX}{d\rho}. \end{cases}$$

L'équation (76) devient, par conséquent,

$$(82) \quad \frac{p^2 \rho^{2p-2}}{\rho^{2p-2} \cos p\omega + \alpha^{2p}} = \frac{1}{h^2}.$$

et l'équation (77) devient

$$(83) \quad \frac{\rho'' \sin \omega + \alpha^p \sin(p-1)\omega}{\rho'' \cos \omega - \alpha^p \cos(p-1)\omega} = \tan \gamma.$$

Parmi les lignes isodynamiques représentées par l'équation (82), il en est une qui passe par les p ombilics autres que l'origine des coordonnées et constitue, par conséquent, une courbe de transition. La valeur de k correspondant à cette ligne se détermine en faisant $\omega = \frac{\pi}{p}$ et $\rho = \alpha \sqrt[p]{p-1}$ dans l'équation (82); on trouve ainsi

$$(84) \quad \frac{1}{k^2} = \frac{p^2 (p-1)^{\frac{2p-2}{p}}}{(p-1)^2 - 2(p-1) \cos \pi + 1} \frac{1}{\alpha^2} = \frac{(p-1)^{\frac{2p-2}{p}}}{\alpha^2}.$$

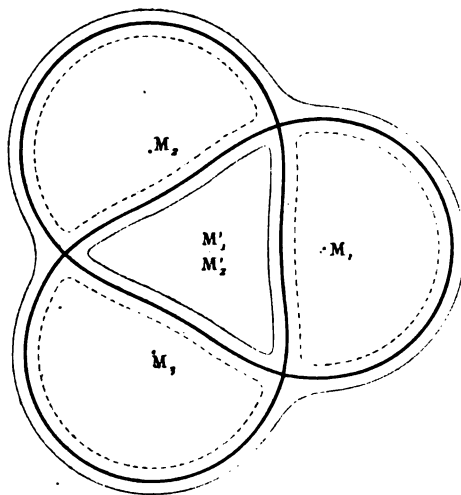
L'équation de la ligne isodynamique considérée devient, par conséquent,

$$(85) \quad \frac{\rho^{2p-2}}{\rho^{2p} - 2\alpha^p \rho^p \cos p\omega + \alpha^{2p}} = \frac{(p-1)^{\frac{2p-2}{p}}}{p^2 \alpha^2}.$$

En faisant, par exemple, $p=3$, nous trouvons

$$(86) \quad \frac{\alpha^2 \rho^3}{\rho^6 - 2\alpha^3 \rho^3 \cos 3\omega + \alpha^3} = \frac{2}{9} \sqrt[3]{2};$$

Fig. 1.



cette courbe est en gros traits sur la fig. 1; les deux courbes

fermées tracées en plein et les trois courbes fermées tracées en pointillé sont les lignes isodynamiques qui précèdent et suivent immédiatement la ligne de transition lorsque l'on fait croître l'intensité $\frac{1}{k}$ depuis zéro jusqu'à l'infini.

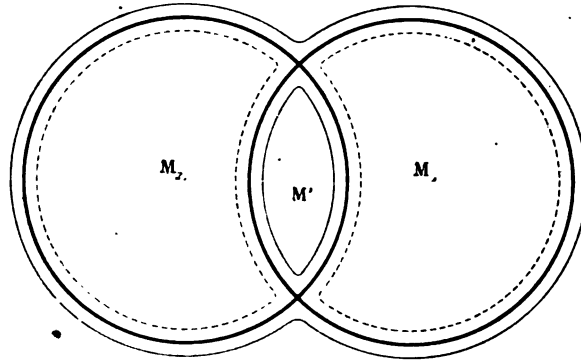
Dans le cas très particulier où $p = 2$, les points racines M_1 et M_2 sont situés sur l'axe des x , à égales distances de l'origine des coordonnées et les deux ombilics sont placés sur l'axe des y . L'équation (85) devient

$$(87) \quad \frac{\alpha^2 \rho^2}{\rho^4 - 2\alpha^2 \rho^2 \cos 2\omega + \alpha^4} = \frac{1}{4};$$

elle représente (*fig. 2*, tracé fort) deux circonférences de même rayon $\alpha\sqrt{2}$ ayant respectivement pour centres M_1 et M_2 .

Parmi les lignes halysiques représentées par l'équation (83),

Fig. 2.



considérons-en une qui passe par un ombilic différent de l'origine des coordonnées; nous déterminerons la valeur correspondante de $\tan \gamma$ en faisant $\omega = \frac{\pi}{p}$ et $\rho = \alpha \sqrt[p]{p-1}$; on trouve ainsi

$$(88) \quad \tan \gamma = \frac{(p-1) \sin \frac{\pi}{p} + \sin \frac{p-1}{p} \pi}{(p-1) \cos \frac{\pi}{p} - \cos \frac{p-1}{p} \pi} = \tan \frac{\pi}{p}.$$

La ligne halysique dont il s'agit correspond, par conséquent, à des actions parallèles au rayon vecteur qui va de l'origine des coordonnées à l'ombilic de passage. L'équation de cette courbe est

$$(89) \quad \frac{z^p \sin \omega - z^p \sin (p-1)\omega}{z^p \cos \omega - z^p \cos (p-1)\omega} = \tan \frac{\pi}{p},$$

soit, plus simplement,

$$(90) \quad z^p = z^p \frac{\sin \left[\frac{\pi}{p} - (p-1)\omega \right]}{\sin \left(\frac{\pi}{p} - \omega \right)}.$$

Nous savons que cette équation doit représenter une courbe du degré $2p-1$; or il est à remarquer que si l'on donne à ω la valeur

$$\omega = \frac{\pi}{p} + \text{multiple de } \pi,$$

l'équation est satisfaite pour toute valeur de z ; la courbe dont il s'agit se compose, par conséquent, d'une droite et d'une courbe du degré $2p-2$.

Faisons, par exemple, $p=3$, l'équation (90) deviendra

$$(91) \quad z^3 = z^3 \frac{\sin \left(\frac{\pi}{3} + 2\omega \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{3} - \omega \right)}.$$

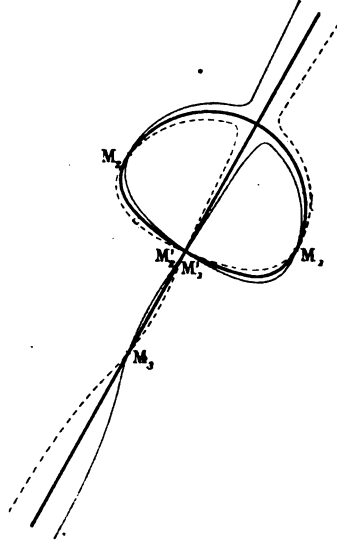
Elle se compose en deux autres

$$(92) \quad \begin{cases} \omega = \frac{\pi}{3} + \text{multiple de } \pi, \\ z^3 = z^3 (\cos \omega + \sqrt{3} \sin \omega) = 2z^3 \cos \left(\frac{\pi}{3} - \omega \right). \end{cases}$$

La première de ces équations représente la droite que déterminent l'origine des coordonnées et l'ombilic de passage; la seconde représente une courbe fermée du quatrième ordre. Cette droite et cette courbe fermée constituent ensemble une ligne halysique de transition tracée en fort sur la fig. 3; en attribuant

aux actions parallèles un angle de direction γ très légèrement inférieur à $\frac{\pi}{3}$, on obtiendrait, pour ligne halysique correspondante, la courbe tracée en plein ; pour une valeur de γ très légèrement

Fig. 3.



supérieure à $\frac{\pi}{3}$, on obtiendrait la courbe tracée en pointillé.

En faisant $p = 2$, l'équation (90) deviendrait

$$(93) \quad \rho^2 = a^2 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)}$$

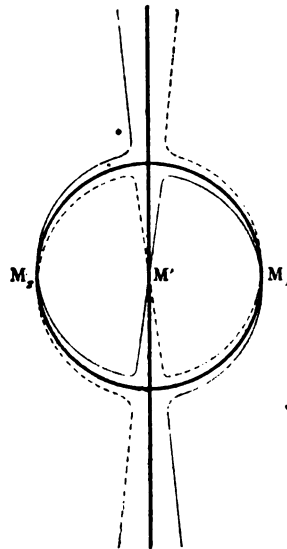
et se décomposerait en deux autres

$$(94) \quad \begin{cases} \omega = \frac{\pi}{2} + \text{multiple de } \pi, \\ \rho^2 = a^2; \end{cases}$$

ces dernières représentent, d'une part, l'axe des y et, d'autre part, une circonférence de rayon égal à a ayant son centre à l'origine

des coordonnées. La *fig. 4* indique en traits forts cette ligne de transition qui passe par les deux ombilics; les tracés plein

Fig. 4.



et pointillé indiquent les lignes halysiques immédiatement voisines.

2. Considérons maintenant une autre forme du polynôme $F(z)$ et posons

$$(95) \quad F(z) = z^p - z^{p-1}z.$$

Les p points racines M se composent de l'origine des coordonnées et des sommets d'un polygone régulier de $(p-1)$ côtés ayant son centre à l'origine, un sommet placé sur la direction positive de l'axe des x et un rayon égal à z .

Le groupe polaire dérivé (M') se compose des sommets d'un polygone régulier de $(p-1)$ côtés, ayant même centre et même orientation que le précédent; le rayon de ce polygone est $\frac{z}{p-1}\sqrt{p}$.

L'équation aux ombilics devient

$$(96) \quad pz^{2p-2} + p(p-3)z^{p-1}z^{p-1} + z^{2p-2} = 0;$$

elle se décompose en deux autres, savoir

$$(97) \quad \begin{cases} z^{(p-1)} = \alpha^{p-1} \left[-\frac{p-3}{2} + \frac{p-1}{2p} \sqrt{p(p-4)} \right], \\ z^{*(p-1)} = \alpha^{p-1} \left[-\frac{p-3}{2} - \frac{p-1}{2p} \sqrt{p(p-4)} \right]. \end{cases}$$

On obtient, par conséquent, deux groupes de $(p-1)$ ombilics; chacun de ces groupes forme les sommets d'un polygone régulier ayant son centre à l'origine des coordonnées et ses rayons dirigés suivant les apothèmes du polygone des points (M') . Posons, pour simplifier les écritures,

$$(98) \quad \begin{cases} \frac{p-3}{2} - \frac{p-1}{2p} \sqrt{p(p-4)} = q', \\ \frac{p-3}{2} + \frac{p-1}{2p} \sqrt{p(p-4)} = q''. \end{cases}$$

Les équations (97) deviendront

$$(99) \quad \begin{cases} z^{(p-1)} = \alpha^{p-1} q' e^{\pi\sqrt{-1}}, \\ z^{*(p-1)} = \alpha^{p-1} q'' e^{\pi\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

Les deux polygones dont les ombilics occupent les sommets ont donc respectivement pour rayons $\alpha q'^{\frac{1}{p-1}}$ et $\alpha q''^{\frac{1}{p-1}}$.

En faisant, comme précédemment, usage des coordonnées polaires ρ et ω , on a identiquement

$$(100) \quad \begin{cases} X = \rho^p \cos p\omega - \rho \alpha^{p-1} \cos \omega, \\ Y = \rho^p \sin p\omega - \rho \alpha^{p-1} \sin \omega, \\ \frac{dX}{dx} = p \rho^{p-1} \cos (p-1)\omega - \alpha^{p-1} = \frac{dY}{dy}, \\ \frac{dY}{dx} = p \rho^{p-1} \sin (p-1)\omega = -\frac{dX}{dy}. \end{cases}$$

L'équation (76) des lignes isodynamiques devient, par conséquent,

$$(101) \quad \frac{p^2 \rho^{2p-2} - 2p \alpha^{p-1} \rho^{p-1} \cos (p-1)\omega + \alpha^{2p-2}}{\rho^{2p} - 2 \alpha^{p-1} \rho^{p+1} \cos (p-1)\omega + \alpha^{2p-2} \rho^2} = \frac{1}{k^2},$$

et l'équation (77) des trajectoires orthogonales devient

$$(102) \quad \frac{(p \rho^{2p-1} + \rho \alpha^{2p-2}) \sin \omega + \rho^p \alpha^{p-1} [p \sin (p-2)\omega - \sin p\omega]}{(p \rho^{2p-1} + \rho \alpha^{2p-2}) \cos \omega - \rho^p \alpha^{p-1} [p \cos (p-2)\omega + \cos p\omega]} = \tan \gamma.$$

Parmi les lignes isodynamiques, il y en a deux qui servent aux transitions; elles passent respectivement par chacun des polygones fermés par les ombilics.

Les valeurs correspondantes de $\frac{1}{k^2}$ sont

$$(103) \quad \begin{cases} \frac{1}{k^2} = \frac{(pq' + 1)^2}{\left(q'^{\frac{p}{p-1}} + q'^{\frac{1}{p-1}}\right)^2} \frac{1}{\alpha^2}, \\ \frac{1}{k'^2} = \frac{(pq'' + 1)^2}{\left(q''^{\frac{p}{p-1}} + q''^{\frac{1}{p-1}}\right)^2} \frac{1}{\alpha^2}. \end{cases}$$

Si, par exemple, on fait $p = 5$, on trouve

$$(104) \quad \begin{cases} q' = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}, \\ q'' = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}, \end{cases}$$

et les équations des deux lignes isodynamiques de transition deviennent

$$(105) \quad \begin{cases} \frac{25\rho^8 - 10\alpha^4\rho^4 \cos 4\omega + \alpha^8}{\rho^{10} - 2\alpha^4\rho^6 \cos 4\omega + \alpha^8\rho^2} = \frac{5(7\sqrt{5} - 15)}{\alpha^2(3 - \sqrt{5})\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}, \\ \frac{25\rho^8 - 10\alpha^4\rho^4 \cos 4\omega + \alpha^8}{\rho^{10} - 2\alpha^4\rho^6 \cos 4\omega + \alpha^8\rho^2} = \frac{5(7\sqrt{5} + 15)}{\alpha^2(3 + \sqrt{5})\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}, \end{cases}$$

Les *fig. 5* et *5 bis* indiquent ces deux courbes par des tracés forts. Sur chacune de ces figures les lignes isodynamiques qui précèdent et suivent de très près les lignes de transition sont représentées par des tracés plein et en pointillé.

Le cas particulier où $p = 4$ offre cette singularité que les radicaux s'annulent dans les premiers membres des formules (98), en sorte que l'on a $q' = q''$. Les six ombilics, au lieu de former les sommets de deux triangles équilatéraux distincts, se superposent deux à deux sur les sommets d'un seul triangle dont le rayon est $\frac{\alpha}{\sqrt[3]{2}}$. Ils appartiennent tous à la ligne isodynamique de transition qui correspond à la constante

$$(106) \quad \frac{1}{k^2} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{\alpha^2},$$

et dont l'équation est

$$(107) \quad \frac{16\rho^6 - 8\alpha^2\rho^3 \cos 3\omega + \alpha^6}{\rho^3 - 2\alpha^2\rho^3 \cos 3\omega + \alpha^6\rho^2} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{\alpha^2}.$$

Fig. 5.

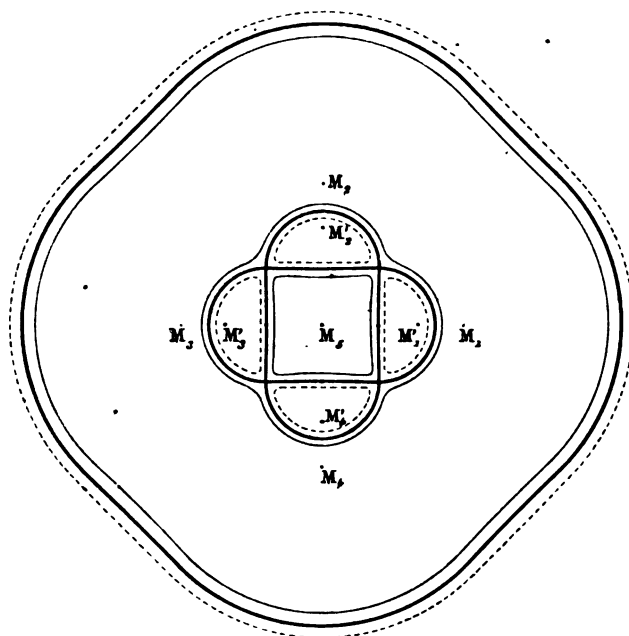
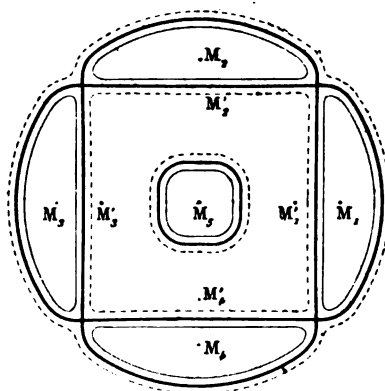


Fig. 5 bis.

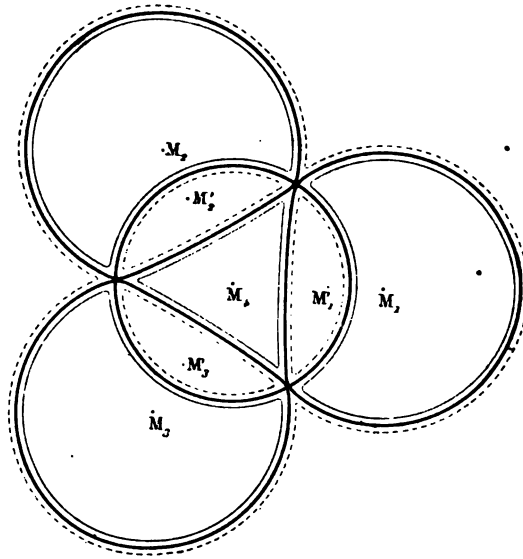


Cette équation se décompose en deux autres

$$(108) \quad \begin{cases} \sqrt[3]{1} \rho^2 - \alpha^2 = 0, \\ \cos 3\omega = \frac{4\rho^6 - 6\sqrt[3]{2}\alpha^2\rho^4 - 3\sqrt[3]{4}\alpha^4\rho^2 + \alpha^6}{8\alpha^3\rho^3}. \end{cases}$$

La fig. 6 indique, en tracé fort, la circonférence et la courbe

Fig. 6.



compagne dont l'ensemble constitue cette ligne isodynamique.

Une autre singularité se produit dans l'hypothèse où $p = 3$; l'équation (96), qui détermine les ombilics, se réduit alors à

$$(109) \quad 3z^4 + \alpha^4 = 0,$$

en sorte que les quatre ombilics occupent les sommets d'un carré ayant pour rayon $\frac{\alpha}{\sqrt[4]{3}}$. Ils appartiennent tous à la ligne isodynamique de transition qui correspond à la constante

$$(110) \quad \frac{1}{k^2} = 3\sqrt{3},$$

et dont l'équation est

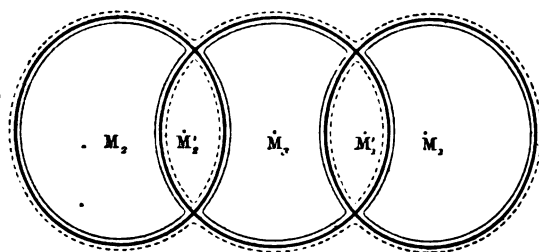
$$(111) \quad \frac{9\rho^4 - 6x^2\rho^2 \cos 2\omega + x^4}{\rho^6 - 2x^2\rho^4 \cos 2\omega + x^4\rho^2} = \frac{3\sqrt{3}}{x^2}.$$

Cette équation se décompose en deux autres, savoir

$$(112) \quad \begin{cases} \rho^2\sqrt{3} - x^2 = 0, \\ \cos 2\omega = \frac{(\rho^2\sqrt{3} - x^2)^2}{6x^2\rho^2}. \end{cases}$$

La *fig. 7* représente, en tracé fort, la circonférence et la

Fig. 7.



Courbe compagne dont l'ensemble constitue cette ligne isodynamique.

Occupons-nous maintenant des lignes halysiques, du degré $(2p-1)$, qui sont représentées par l'équation (102). On peut donner à cette équation la forme suivante :

$$(113) \quad p \frac{\rho^{p-1}}{x^{p-1}} + \frac{x^{p-1}}{\rho^{p-1}} = \frac{\sin(p\omega - \gamma) - p \sin[(p-2)\omega + \gamma]}{\sin(\omega - \gamma)}.$$

Lorsque p est supérieur à 4, la droite qui passe par l'origine des coordonnées, en faisant avec l'axe des x un angle égal à $\frac{\pi}{p-1}$, rencontre toujours quatre ombilics symétriques deux à deux relativement à l'origine des coordonnées. Dans le cas particulier où $p=4$, cette droite passe seulement par un ombilic double.

Or, si dans l'équation (113) nous faisons $\gamma = \frac{\pi}{p-1}$, le second

membre de cette équation pourra s'écrire

$$\frac{p \sin(p-2) \left(\omega - \frac{\pi}{p-1} \right) - \sin p \left(\omega - \frac{\pi}{p-1} \right)}{\sin \left(\omega - \frac{\pi}{p-1} \right)};$$

il en résulte que l'équation (113) est satisfaite, quel que soit p , lorsque l'on fait $\omega = \frac{\pi}{p-1}$; par conséquent, la droite correspondant à cette direction fait partie de la courbe.

Si donc p est égal ou supérieur à 4, la ligne halytique passant par les ombilics situés sur les deux rayons vecteurs opposés dont les angles de direction sont $\frac{\pi}{p-1}$ et $\frac{p\pi}{p-1}$ correspond à une valeur de γ égale à l'un ou à l'autre de ces angles. Cette ligne se compose, d'une part, de la droite formée par les deux rayons vecteurs dont il s'agit et, d'autre part, d'une courbe du degré $(2p-2)$ qui a pour équation

$$(114) \quad p \frac{\rho^{p-1}}{\alpha^{p-1}} + \frac{\alpha^{p-1}}{\rho^{p-1}} = \frac{p \sin(p-2) \left(\omega - \frac{\pi}{p-1} \right) - \sin p \left(\omega - \frac{\pi}{p-1} \right)}{\sin \left(\omega - \frac{\pi}{p-1} \right)},$$

en supposant que, dans le second membre, on supprime le facteur $\sin \left(\omega - \frac{\pi}{p-1} \right)$ commun au numérateur et au dénominateur. Cette courbe admet, dans tous les cas, sa droite compagne comme axe de symétrie; de plus, lorsque p est impair, l'origine des coordonnées est un centre de la courbe.

Faisons, par exemple, $p = 5$, l'équation (114) se décomposera en deux autres

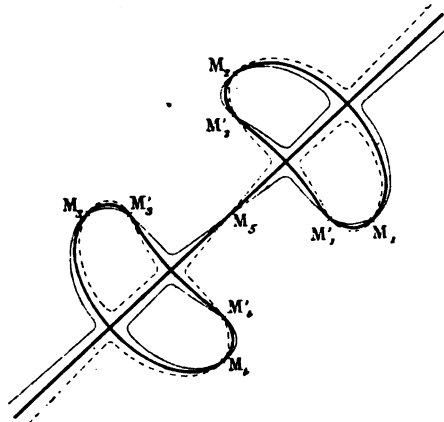
$$(115) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega = \frac{\pi}{4} + \text{multiple de } \pi, \\ 5 \frac{\rho^4}{\alpha^4} + \frac{\alpha^4}{\rho^4} = 5 \frac{\sin 3 \left(\omega - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin \left(\omega - \frac{\pi}{4} \right)} - \frac{\sin 5 \left(\omega - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin \left(\omega - \frac{\pi}{4} \right)}, \end{array} \right.$$

On obtient ainsi la droite et la courbe qui sont tracées en fort sur la *fig. 8*. Les tracés minces, l'un plein, l'autre pointillé, indiquent les courbes immédiatement voisines.

Dans le cas particulier où $\rho = 4$, l'équation (114) donne

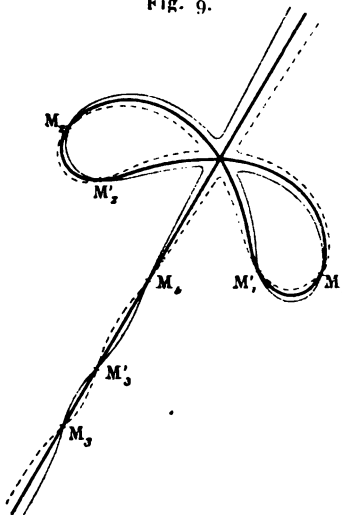
$$(116) \quad \begin{cases} \omega = \frac{\pi}{3} + \text{multiple de } \pi, \\ 4 \frac{\rho^3}{2^3} + \frac{z^3}{\rho^3} = 4 \cos \left(\omega - \frac{\pi}{3} \right) \left[2 - \cos 2 \left(\omega - \frac{\pi}{3} \right) \right]. \end{cases}$$

Fig. 8.



On obtient ainsi la droite et la courbe qui sont tracées en fort

Fig. 9.



sur la fig. 9. Les lignes halysiques immédiatement précédente
xvii.

générale

$$(3) \quad P - Q\sqrt{-1} = \frac{F'(z)}{F(z)},$$

qui détermine les projections P et Q de l'action totale exercée sur le point N dont l'affixe est z .

Pour que cette force acquière une intensité infinie, il faut et il suffit que N soit placé infiniment près d'un point M appartenant au groupe polaire fondamental; dans ce cas, l'action est évidemment dirigée suivant MN.

Laissant de côté ce cas particulier, supposons que l'on modifie infiniment peu la position primitive du point N, de manière que son affixe devienne $(z + \delta z)$. La série de Taylor nous donnera, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier,

$$(120) \quad P - Q\sqrt{-1} = \frac{F'(z)}{F(z)} + \frac{F''(z)F(z) - F'^2(z)}{F^2(z)} \delta z + \dots$$

Dans le cas où la position primitive de N est celle d'un point M' appartenant au groupe polaire dérivé, on a $F'(z) = 0$, et la formule précédente se réduit à

$$(121) \quad P - Q\sqrt{-1} = \frac{F''(z)}{F(z)} \delta z + \dots$$

L'action ne possède alors qu'une intensité infiniment petite; désignons par φ l'angle inconnu que sa direction fait avec la direction positive de l'axe des x . Désignons, d'autre part, par ψ l'angle correspondant à la direction M'N. Nous aurons

$$(122) \quad \varphi + \psi = -\text{argument de } \frac{F''(z)}{F(z)}.$$

Par conséquent, l'angle formé par la direction M'N du déplacement et par la direction de la force possède une bissectrice de direction constante quel que soit M'N. Si l'on renverse le sens de M'N, la direction de la force se trouve également renversée.

Si la position primitive du point N n'est pas prise dans le voisinage d'un point M', l'action acquiert une intensité finie; son accroissement géométrique correspondant au déplacement δz est

$$(123) \quad P - Q\sqrt{-1} - \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{F''(z)F(z) - F'^2(z)}{F^2(z)} \delta z + \dots,$$

soit, en général, un infiniment petit du premier ordre. Pour que l'ordre de petitesse devienne supérieur au premier, il faut et il suffit que l'affixe z de la position primitive soit racine de l'équation

$$F'(z)F(z) - F''(z) = 0;$$

en d'autres termes, il faut et il suffit que le point N soit primitivement placé sur un ombilic.

Cette observation conduit à une conséquence importante qui peut s'énoncer en ces termes : *L'intensité de l'action exercée sur un point d'une ligne halysique ne peut être maximum ou minimum que si ce point est un ombilic.* Si, en effet, cette intensité est maximum ou minimum, elle ne peut varier que d'un infiniment petit supérieur au premier pour un déplacement infinitésimal du point sur la ligne halysique; la direction de la force reste d'ailleurs rigoureusement invariable; l'action algébrique ne subit donc qu'un accroissement géométrique d'un ordre de petitesse supérieur au premier.

Enchaînement des groupes polaires principaux. — Les considérations précédentes permettent d'étudier les lois générales qui président aux enchaînements des points (M) et (M') par les lignes halysiques.

Nous savons qu'une ligne halysique possède une branche hyperbolique dont l'asymptote, parallèle aux actions exercées sur les divers points de la courbe, passe par le centre des moyennes distances commun aux deux groupes polaires principaux. Cette branche infinie est généralement accompagnée d'un certain nombre de courbes fermées auxquelles nous donnerons le nom d'*ovales*, sans attribuer à cette dénomination le caractère d'une définition précise de la forme de la courbe. Il est évident, d'ailleurs, que *la tangente en un point M est toujours parallèle à l'asymptote de la branche infinie.*

Considérons d'abord la branche infinie, en supposant qu'elle ne passe par aucun ombilic, et faisons-la décrire par un mobile N qui partira de l'infini pour y retourner dans la direction opposée. L'action algébrique présente au départ et à l'arrivée des intensités nulles et de sens contraires; elle change donc de sens au moins

une fois et, dans tous les cas, un nombre impair de fois pendant le parcours.

L'absence d'ombilics sur la trajectoire s'oppose à ce que l'intensité de l'action algébrique puisse devenir maximum, ou minimum; il en résulte : 1° que le premier changement de sens se fait en passant par un point M, l'intensité devenant alors infinie; 2° que si d'autres changements de sens, nécessairement en nombre pair, se produisent à la suite du premier, ils correspondront à une succession alternée de points M' et de points M, correspondant à des valeurs nulles et infinies de l'intensité.

Considérons maintenant un ovale halysique, en supposant qu'il ne passe par aucun ombilic. Prenant pour point de départ un point quelconque de cette courbe fermée, faisons-la décrire, dans un sens ou dans l'autre, par un mobile N. L'intensité de l'action algébrique variera, pendant le parcours, par voie continue et reviendra finalement à sa valeur initiale. Cette intensité ne peut d'ailleurs, vu l'absence d'ombilics sur la trajectoire, passer par aucun maximum ni par aucun minimum; il en résulte : 1° que le mobile passe au moins par un point M, l'intensité devenant alors infinie; 2° que si l'ovale ne passe par aucun autre point M, elle passe par un point M' et par un seul, l'intensité correspondante étant nulle; 3° que s'il y a passage par plusieurs points M, il y a aussi passage par un nombre égal de points M', la succession des points M et M' sur le parcours étant alternée.

Les observations précédentes conduisent, en dernière analyse, au théorème suivant :

THÉORÈME GÉNÉRAL. — *Lorsqu'une ligne halysique ne passe par aucun ombilic :*

1° *La branche infinie passe au moins par un point M et contient un nombre de points M' inférieur d'une unité à celui des points M.*

2° *Chaque ovale contient autant de points M' que de points M, le nombre des points de chaque espèce étant au moins égal à l'unité.*

3° *Il y a toujours un point M' et un seul entre deux points M consécutifs, soit sur un arc d'ovale, soit sur un arc de la branche infinie.*

Généralisation du théorème de Rolle. — Si la branche infinie constituait à elle seule la ligne halysique, sans être accompagnée d'ovales, elle passerait par tous les points M et par tous les points M' . Le théorème précédent peut, dans ce cas particulier, s'énoncer comme il suit :

Lorsqu'une ligne halysique, ne passant par aucun ombilic, se compose exclusivement d'une branche hyperbolique, elle enchaîne les deux groupes polaires principaux (M) et (M') de façon qu'il y ait un point M' dans chaque intervalle de deux points M consécutifs.

C'est là une généralisation intéressante du théorème de Rolle. Supposons, en effet, que le polynôme $F(x)$ ait toutes ses racines réelles; les points M seront alors tous situés sur l'axe des x et nous pourrions faire correspondre leurs indices à leur ordre naturel de succession, de gauche à droite. La ligne halysique correspondant aux actions parallèles à l'axe des x ne pourra contenir aucun point extérieur à cette droite; elle se réduira donc à l'axe des x . Entre deux points consécutifs M_n et M_{n+1} , on ne peut rencontrer aucun ombilic; si, en effet, un mobile N parcourt l'intervalle $M_n M_{n+1}$, la somme des actions exercées par les points $M_1, M_2, \dots, M_n$, qui le repoussent tous vers la droite, va sans cesse en diminuant, tandis que la somme des actions exercées par les points $M_{n+1}, M_{n+2}, \dots, M_p$, qui le repoussent tous vers la gauche, va constamment en croissant; l'action totale, égale à la différence de ces deux sommes ne peut donc devenir ni maxima ni minima. Un raisonnement analogue, plus simple encore, montrerait qu'il ne peut exister aucun ombilic en amont du point M_1 , ni en aval du point M_p . L'axe des x constitue donc à lui seul une ligne halysique qui ne passe par aucun ombilic; on peut donc lui appliquer le théorème précédent et l'on obtient ainsi le théorème de Rolle.

Lignes halysiques de transition. — Le théorème général établi pour les lignes halysiques qui ne passent par aucun ombilic s'étend, par voie de continuité, aux lignes halysiques de transition passant par des ombilics; mais il n'en est ainsi qu'à la condition de suivre sur la ligne de transition l'un ou l'autre des parcours indiqués par les lignes halysiques immédiatement précédente et suivante.

C'est ce que mettent en relief les *fig.* 4, 8, 9 et 10. Dans chacune de ces figures la ligne forte peut être parcourue, soit comme l'indique la ligne pleine, soit comme l'indique la ligne pointillée. On contourne ainsi les ombilics sans les franchir en attribuant aux trajectoires des points saillants ou anguleux.

En réalité, les lignes halysiques, étant des courbes algébriques, ne peuvent présenter aucun point anguleux; un ombilic placé sur une ligne de transition ne peut être qu'un point nodal, rendant possibles les parcours continus, sans changements brusques de directions.

Reportons-nous, par exemple, à la *fig.* 10 qui contient 3 points M, 2 points M' et 2 ombilics simples. On peut parcourir la ligne forte en partant de l'infini supérieur, traversant un premier ombilic, décrivant la boucle de droite en passant par M', et par M₁, traversant à nouveau le premier ombilic, passant par M₃, traversant le second ombilic, décrivant la boucle de gauche en passant par M₂ et M', traversant à nouveau le second ombilic et se dirigeant enfin vers l'infini inférieur. L'enchaînement des deux groupes polaires principaux se fait ainsi dans l'ordre suivant :

$$M'_1, M_1, M_3, M_2, M'_2$$

qui se dérobe aux lois générales précédemment énoncées. Il y a alors des perturbations occasionnées par les traversées des ombilics qui font passer les actions algébriques par des maxima ou des minima. L'ombilic supérieur produit un maximum entre l'infini supérieur et M', puis, d'autre part, un minimum entre M₁ et M₃; l'ombilic inférieur produit un minimum entre M₃ et M₂; puis, d'autre part, un maximum entre M'_2 et l'infini inférieur.

Reportons-nous maintenant à la *fig.* 9 qui contient 4 points M, 3 points M' et 1 ombilic double. Nous pouvons la regarder comme composée d'une droite et d'une sorte de lemniscate; en parcourant la droite de haut en bas, nous rencontrons

$$M_4, M'_3, M_3;$$

en parcourant ensuite la lemniscate d'un mouvement continu, avec double traversée de l'ombilic, nous trouvons

$$M_1, M'_2, M_2, M'_1.$$

Notre théorème général est donc applicable d'une part, à la

droite considérée comme branche infinie, et, d'autre part, à la courbe à nœud considérée comme un ovale. Les traversées de l'ombilic double n'exercent aucune influence perturbatrice, parce qu'il ne rend pas l'action algébrique maximum ou minimum.

Les perturbations résultent de la présence d'ombilics simples ou d'un degré impair de multiplicité; elles ne sauraient résulter de la présence d'ombilics multiples à des degrés pairs.

Ombilics-pivots. — L'équation du degré $(2p - 1)$

$$(15) \quad F''(z) - F(z)F'(z) = 0$$

qui détermine les ombilics est généralement satisfaite par $(2p - 1)$ points tous étrangers aux groupes polaires principaux (M) et (M'). Il en est toujours ainsi lorsque ces groupes ne contiennent aucun point multiple.

Si dans le groupe (M) n points se trouvaient condensés en un seul, la coordonnée ζ de ce point multiple serait $2(n - 1)$ fois racine de l'équation (15), en sorte que $2(n - 1)$ ombilics se réuniraient sur ce point. On obtiendrait ainsi un ombilic, d'un degré pair de multiplicité, autour duquel pivoteraient toutes les lignes halysiques. Tandis que le passage d'une ligne par un ombilic ordinaire lui donne le caractère d'une *ligne de transition*, il n'en est pas de même lorsqu'il s'agit d'un *ombilic-pivot*. Si l'on traverse cet ombilic en parcourant un arc halysique, l'action exercée sur le mobile N ne passe ni par un maximum ni par un minimum, puisque le degré de multiplicité de cet ombilic est pair; il en résulte que le théorème général précédemment énoncé s'étend à toute ligne halysique qui passe par l'ombilic neutre, sans passer par aucun ombilic proprement dit.

Si la coïncidence de n points se produisait dans le groupe (M'), la coordonnée ζ du point de concentration serait $(n - 1)$ fois racine de l'équation (15), en sorte que $(n - 1)$ ombilics se réuniraient sur ce point. On obtiendrait ainsi un *ombilic-pivot* d'un second genre, ombilic simple ou multiple suivant que n est égal ou supérieur à 2. Si n est impair, le degré de multiplicité de l'ombilic est pair; on peut alors raisonner comme ci-dessus. Si n est pair, la traversée de l'ombilic par le mobile N parcourant un arc halysique rend minimum l'action exercée sur ce mobile, mais ce mini-

mum est égal à zéro; il en résulte que notre théorème général reste encore applicable.

En résumé : *Le théorème général établi par les lignes halysiques qui ne passent par aucun ombilic s'applique également aux lignes halysiques qui passent par des ombilics-pivots sans passer par aucun ombilic ordinaire.*

Reportons-nous, par exemple, à la *fig.* 3 qui contient 3 points M distincts et 2 points M' réunis donnant naissance à un ombilic-pivot, simple et du second genre, par lequel passent toutes les courbes halysiques. Le parcours de la ligne pleine, en allant de l'infini supérieur à l'infini inférieur, donne l'enchaînement normal :

$$M_2, M'_1, M_1, M'_2, M_3.$$

Le parcours de la ligne pointillée donne analogiquement

$$M_1, M'_1, M_2, M'_2, M_3.$$

Aucune perturbation n'est créée par la traversée de l'ombilic neutre.

Polynômes $F(z)$ à coefficients réels. — Lorsque tous les coefficients du polynôme $F(z)$ sont réels, les racines de l'équation

$$F(z) = 0$$

sont ou réelles ou imaginaires conjuguées. Dans tous les cas, le groupe polaire principal (M) admet l'axe des x pour axe de symétrie. Il en résulte que cet axe des x fait partie de la ligne halysique correspondant aux actions qui lui sont parallèles. L'équation de cette ligne

$$(124) \quad X \frac{dX}{dY} + Y \frac{dY}{dY} = 0$$

se compose alors en deux autres, savoir

$$(125) \quad Y = 0,$$

équation de l'axe des x , et

$$(126) \quad \frac{X}{Y} \frac{dX}{dY} + \frac{Y}{Y} \frac{dY}{dY} = 0,$$

équation algébrique du degré $2(p-1)$.

Il est à remarquer que, si toutes les racines du polynôme $F(z) = X + Y\sqrt{-1}$ sont réelles, la ligne halysique se compose exclusivement de l'axe des x ; l'équation (126) ne peut donc, dans ce cas, être satisfaite par aucun système de valeurs réelles de x et de y . Nous savons, d'autre part, qu'aucun ombilic ne peut alors être situé sur l'axe des x ; l'équation

$$(15) \quad [F'(z)]^2 = F(z)F''(z)$$

a donc toutes ses racines imaginaires.

Soit, par exemple,

$$(127) \quad F(z) = z^3 + pz + q;$$

nous trouverons

$$(128) \quad \begin{cases} X = x^3 - 3xy^2 + px + q, \\ Y = 3x^2y - y^3 + py, \\ \frac{dX}{dy} = -6xy, \\ \frac{dY}{dy} = 3x^2 - 3y^2 + p, \end{cases}$$

et l'équation (126) deviendra

$$(129) \quad 3y^4 + 2(3x^2 - 2p)y^2 + 3x^4 - 6qx + p^2 = 0,$$

d'où

$$(130) \quad y^2 = -\frac{3x^2 - 2p}{3} \pm \frac{1}{3} \sqrt{-12px^2 + 18qx + p^2}.$$

En égalant à zéro le trinôme placé sous le radical, on trouve

$$(131) \quad x = \frac{3q}{4p} \pm \frac{\sqrt{3}}{12p} \sqrt{4p^3 + 27q^2}.$$

Dans l'hypothèse où les trois racines de $F(z)$ sont réelles, on a

$$(132) \quad 4p^3 + 27q^2 < 0;$$

le trinôme placé sous le radical a ses racines imaginaires et ne peut prendre que des valeurs négatives; il est donc impossible de satisfaire à l'équation (129) par aucun système de valeurs réelles de x et de y .

Considérons maintenant l'équation aux ombilics qui correspond

au polynôme $F(z)$. Cette équation est

$$(133) \quad 3z^3 - 6qz + p^2 = 0.$$

La dérivée de cette équation, soit

$$(134) \quad 2z^3 - q = 0.$$

n'ayant qu'une racine réelle, l'équation (133) ne peut pas en avoir elle-même plus de deux. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de ces deux racines réelles est que la substitution de $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ à z rende le premier membre négatif; on devrait donc avoir

$$(135) \quad p^2 - \frac{9}{2} q \sqrt[3]{\frac{q}{2}} < 0,$$

soit, sous une autre forme,

$$(136) \quad (4p^3)^2 < (27q^2)^2.$$

Cette inégalité est incompatible avec l'inégalité (132); par conséquent, lorsque le polynôme (127) a ses trois racines réelles, l'équation aux ombilics n'a que des racines imaginaires.

Ombilics doubles. — Les coefficients p et q étant supposés réels, par quelle relation doivent-ils être liés pour que l'équation (133) ait une racine double? Cette relation est

$$(137) \quad (4p^3)^2 = (27q^2)^2;$$

l'ombilic double correspondant est situé sur l'axe des x ; son abscisse est $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$.

Si p est négatif, l'équation (137) équivaut à

$$(138) \quad 4p^3 + 27q^2 = 0;$$

l'ombilic double ne peut donc être placé que sur un point-racine double du polynôme (127).

Si p est positif, l'équation (137) équivaut à

$$(139) \quad 4p^3 = 27q^2;$$

l'ombilic double correspondant est toujours sur l'axe des x ; son abscisse $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ est égale à $+\sqrt[3]{\frac{p}{3}}$ si q est positif et à $-\sqrt[3]{\frac{p}{3}}$ si q est

négalif. Or, en formant l'équation aux ombilics correspondant au polynôme

$$(140) \quad F'(z) = 3z^2 + p,$$

on trouve

$$(141) \quad 3z^2 - p = 0;$$

c'est donc sur une des deux racines de cette équation que vient se placer l'ombilic double.

En résumé : *Si un polynôme du troisième degré à coefficients réels admet un ombilic double, cet ombilic est toujours situé sur l'axe des x , et coïncide soit avec un point racine double du polynôme considéré, soit avec un ombilic simple du polynôme dérivé.*

Faisons, par exemple, $q = 2$; considérons le polynôme

$$(142) \quad F(z) = z^3 + pz + 2$$

et faisons croître p depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Au début, les trois racines du polynôme sont réelles, ainsi que celles du polynôme dérivé; on trouve sur l'axe des x la disposition

$$M_1, \quad M'_1, \quad M_2, \quad M'_2, \quad M_3;$$

les quatre ombilics sont extérieurs à l'axe des x ; cet axe constitue à lui seul la ligne halysique correspondant à sa direction.

Les choses restent ainsi jusqu'à ce que p devienne égal à -3 ; à ce moment les deux points M_2 et M_3 se réunissent au point M' sur lequel viennent également se réunir deux ombilics μ et ν .

Lorsque p , toujours négatif, diminue encore en valeur absolue, les deux points racines M_2 et M_3 deviennent extérieurs à l'axe des x , tandis que les deux ombilics μ et ν se meuvent sur cet axe, l'un à gauche et l'autre à droite du point M'_2 ; la ligne halysique correspondant à l'axe des x se compose et de cet axe sur lequel on trouve la disposition

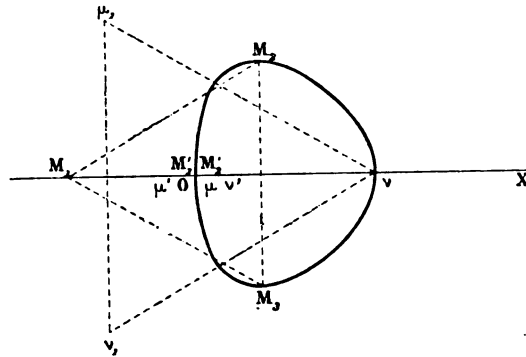
$$M_1, \quad M'_1, \quad \mu, \quad M'_2, \quad \nu,$$

et d'un ovale passant par les points

$$\mu, \quad M_2, \quad \nu, \quad M_3.$$

Pour $p = 0$, les dispositions générales restent les mêmes, mais il est à noter que les trois points M'_1 , μ , M'_2 viennent se réunir sur l'origine des coordonnées; là viennent se réunir également les deux ombilics μ' et ν' du polynôme dérivé $F'(z)$, lesquels étaient précédemment extérieurs à l'axe des x ; à noter aussi que l'ovale présente, à l'origine des coordonnées, quatre points communs avec sa tangente (fig. 11).

Fig. 11.



Lorsque p devient positif et continue à croître, la forme de l'ovale tend vers celle d'un 8. On trouve sur l'axe des x

$$M_1, \mu', \mu, \nu', \nu,$$

et sur l'ovale

$$\mu, M'_1, M_2, \nu, M_3, M'_2.$$

Les choses restent ainsi (à cela près qu'une interversion des points M_1 et μ' ne tarde pas à se produire), jusqu'à ce que p devienne égal à 3. A ce moment, les deux ombilics μ et ν se réunissent sur ν' , de manière à former un ombilic double; nous obtenons ainsi la fig. 12.

Lorsque p continue à croître jusqu'à l'infini, les deux ombilics μ et ν sont toujours extérieurs à l'axe des x . La ligne halysique se compose de trois parties, savoir l'axe des x contenant

$$M_1, \mu', \nu',$$

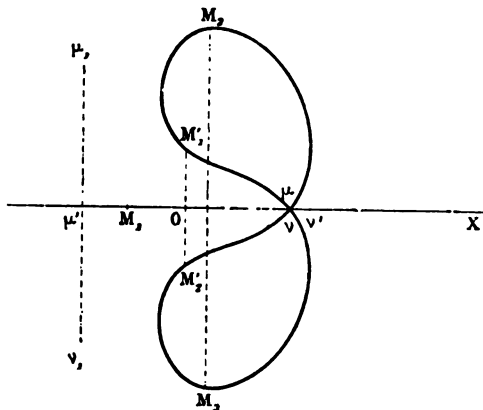
un ovale supérieur contenant

$$M'_1, M_2,$$

et un ovale inférieur, symétrique du précédent, contenant

$$M'_2, M_3.$$

Fig. 12.



On voit, par les *fig.* 11 et 12, que les modes d'influence d'un ombilic double sont différents suivant qu'il se produit soit sur une racine, soit sur un ombilic du polynôme dérivé $F'(z)$. Dans le premier cas, l'ombilic double est un *point isolé* de la ligne haly-sique, compagne de l'axe des x ; dans le second cas, l'ombilic double est un *point nodal* de cette ligne.

Pour un polynôme $F(z)$, à coefficients réels, d'un degré quel-conque, les valeurs de z qui peuvent correspondre à des om-bilics doubles doivent être racines communes aux deux équ-a-tions

$$(143) \quad \begin{cases} F'^2 - FF'' = 0, \\ F'F'' - FF''' = 0. \end{cases}$$

Ce système équivaut, suivant les cas, à l'un des suivants :

$$(144) \quad F = F' = 0,$$

$$(145) \quad F' = F'' = F''' = 0,$$

$$(146) \quad \frac{F'}{F} = \frac{F''}{F'} = \frac{F'''}{F''}.$$

Il en résulte qu'un ombilic double peut se placer :

1° Soit sur un point racine double de $F(z)$,

2° Soit sur un point racine triple de $F'(z)$,

3° Soit sur un ombilic simple de $F'(z)$.

Posons

$$(147) \quad F(z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \dots$$

Nous aurons identiquement

$$(148) \quad \begin{cases} X = A + Bx + C(x^2 - y^2) + \dots, \\ \frac{1}{y} Y = B + 2Cx + D(3x^2 - y^2) + \dots, \\ \frac{1}{y} \frac{dX}{dy} = -2C - 6Dx - 4E(3x^2 - y^2) + \dots, \\ \frac{dY}{dy} = B + 2Cx + 3D(x^2 - y^2) + \dots \end{cases}$$

L'équation de la courbe halysique sera, par conséquent,

$$(149) \quad \begin{vmatrix} B^2 & + 2BC & x + 2C^2 & x^2 + 2C^2 & y^2 + \dots = 0 \\ -2AC & -6AD & -12AE & +4AE & -4BD \end{vmatrix}$$

S'il existe un ombilic double sur l'axe des x , nous pourrons prendre sur ce point l'origine des coordonnées; nous aurons alors

$$(150) \quad \begin{cases} B^2 = 2AC, \\ BC = 3AD. \end{cases}$$

1° Si l'ombilic double est une racine double du polynôme $F(z)$, on a

$$(151) \quad A = B = 0,$$

en sorte que l'équation (149) se réduit à

$$(152) \quad 2C^2(x^2 + y^2) + \dots = 0;$$

l'ombilic double est donc un *point isolé* de la courbe halysique.

2° Si l'ombilic double est une racine triple du polynôme dérivé $F'(z)$, on a

$$(153) \quad B = C = D = 0,$$

en sorte que l'équation (152) se réduit à

$$(154) \quad 4AE(y^2 - 3x^2) + \dots = 0.$$

l'ombilic double est, par conséquent, un *point nodal* de la courbe halysique.

3° Enfin, si l'ombilic double considéré est un ombilic simple du polynôme dérivé $F'(z)$, on aura, d'après les relations (150),

$$(155) \quad \frac{A}{B} = \frac{1}{2} \frac{B}{C} = \frac{1}{3} \frac{C}{D},$$

et l'équation (149) deviendra

$$(156) \quad \left(4AE - \frac{2}{3} C^2\right)(y^2 - 3x^2) + \dots = 0:$$

l'ombilic double sera donc encore, dans ce cas, un *point nodal* de la courbe halysique.

En résumé : *Lorsqu'un polynôme $F(z)$ à coefficients réels donne naissance à un ombilic double placé sur l'axe des x , cet ombilic coïncide nécessairement soit avec un point-racine double du polynôme, soit avec un point-racine triple du polynôme dérivé, soit avec un ombilic simple du polynôme dérivé. Cet ombilic double est, dans le premier cas, un POINT ISOLÉ et, dans les deux derniers cas, un POINT NODAL de la courbe halysique, compagne de l'axe des x .*

Formules relatives au potentiel. — Reprenons la formule

$$(14) \quad F(z) = X + Y\sqrt{-1} = \text{Re} u\sqrt{-1},$$

et désignons par

$$(157) \quad \Phi = \log \text{nép. } R + \text{const.}$$

le potentiel de l'action algébrique du groupe des points-racines (M) sur le point quelconque N.

Nous aurons

$$(158) \quad \begin{cases} \frac{d\Phi}{dx} = \frac{1}{R} \frac{dR}{dx}, \\ \frac{d\Phi}{dy} = \frac{1}{R} \frac{dR}{dy} \end{cases}$$

et

$$(159) \quad \begin{cases} \frac{d^2\Phi}{dx^2} = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{dx}\right)^2 + \frac{1}{R} \frac{d^2R}{dx^2}, \\ \frac{d^2\Phi}{dy^2} = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{dy}\right)^2 + \frac{1}{R} \frac{d^2R}{dy^2}. \end{cases}$$

Ces dernières formules donnent

$$(160) \quad \frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \frac{d^2 \Phi}{dy^2} = -\frac{1}{R^2} \left[\left(\frac{dR}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dR}{dy} \right)^2 \right] + \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{d^2 R}{dy^2} \right).$$

La relation (24)

$$(24) \quad R^2 = X^2 + Y^2$$

donne, d'autre part,

$$(161) \quad \begin{cases} R \frac{dR}{dx} = X \frac{dX}{dx} + Y \frac{dY}{dx}, \\ R \frac{dR}{dy} = X \frac{dX}{dy} + Y \frac{dY}{dy}; \end{cases}$$

d'où, en tenant compte des formules (26)

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= \frac{dY}{dy}, \\ \frac{dX}{dy} &= -\frac{dY}{dx}, \end{aligned}$$

on déduit

$$(162) \quad \left(\frac{dR}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dR}{dy} \right)^2 = \left(\frac{dX}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dY}{dx} \right)^2.$$

En prenant les dérivées par rapport à x et par rapport à y des formules (161), on trouve

$$(163) \quad \begin{cases} \left(\frac{dR}{dx} \right)^2 + R \frac{d^2 R}{dx^2} = \left(\frac{dX}{dx} \right)^2 + X \frac{d^2 X}{dx^2} + \left(\frac{dY}{dx} \right)^2 + Y \frac{d^2 Y}{dx^2}, \\ \left(\frac{dR}{dy} \right)^2 + R \frac{d^2 R}{dy^2} = \left(\frac{dX}{dy} \right)^2 + X \frac{d^2 X}{dy^2} + \left(\frac{dY}{dy} \right)^2 + Y \frac{d^2 Y}{dy^2}. \end{cases}$$

On déduit, d'ailleurs, des relations (26)

$$(164) \quad \begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{d^2 Y}{dx dy} = -\frac{d^2 X}{dy^2}, \\ \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{d^2 X}{dx dy} = -\frac{d^2 Y}{dy^2}. \end{cases}$$

Les formules (162), (163) et (164) donnent

$$(165) \quad R \left(\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{d^2 R}{dy^2} \right) = \left(\frac{dX}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dY}{dy} \right)^2.$$

Les équations (160), (162) et (165) donnent enfin

$$(166) \quad \frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \frac{d^2 \Phi}{dy^2} = 0.$$

Assimilation des points-racines à des électrodes. — Cette propriété du potentiel Φ conduit à une curieuse conséquence.

Assimilons les points-racines M à des électrodes (positives, par exemple), déversant toutes la même quantité d'électricité sur le plan considéré comme une plaque conductrice indéfinie. Le potentiel électrique en un point quelconque N de la plaque sera une fonction linéaire du potentiel analytique Φ ci-dessus défini. Les courbes équipotentielles s'identifieront, par conséquent, avec les courbes de niveau dont l'équation générale, algébrique et du degré $2p$, est

$$(9) \quad X^2 + Y^2 = \text{const.}$$

Ces courbes sont, comme nous l'avons vu précédemment, des cassinoïdes ayant pour foyers les points-racines M . On pourrait tracer ces cassinoïdes sur la plaque conductrice en employant, comme l'a fait M. Kirchhoff, deux fils reliés à un galvanomètre, la pointe de l'un étant maintenue fixe sur un point de la plaque, tandis que l'on déplacerait la pointe de l'autre, de manière à n'avoir pas de déviation.

Les points nodaux que peuvent présenter certaines cassinoïdes sont déterminés par le système d'équations simultanées

$$(167) \quad \begin{cases} X \frac{dX}{dx} + Y \frac{dY}{dx} = 0, \\ X \frac{dX}{dy} + Y \frac{dY}{dy} = 0, \end{cases}$$

auxquelles, en vertu des équations (26), on peut substituer le suivant :

$$(168) \quad \begin{cases} X \frac{dX}{dx} + Y \frac{dY}{dx} = 0, \\ Y \frac{dX}{dx} - X \frac{dY}{dx} = 0. \end{cases}$$

Multiplions la seconde équation par $\sqrt{-1}$ et retranchons-la de la première; nous trouverons

$$(169) \quad (X - Y\sqrt{-1}) \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dx} \sqrt{-1} \right) = 0,$$

équation qui équivaut au système (167). Elle se décompose

d'ailleurs en deux autres, savoir

$$(170) \quad X - Y\sqrt{-1} = 0,$$

$$(171) \quad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dx}\sqrt{-1} = 0.$$

L'équation (170) équivaut à

$$F(z) = 0$$

et représente le groupe (M); ces points-racines, considérés comme des cercles de rayon infiniment petits, constituent la cassinoïde particulière dont l'équation est

$$X^2 + Y^2 = 0.$$

L'équation (171) équivaut à

$$F'(z) = 0$$

et représente le groupe (M'). Par conséquent : *Les points nodaux des courbes équipotentiellles coïncident avec les points-racines de la dérivée du polynôme F(z).*

Il résulte de cette observation que les tracés des lignes équipotentiellles peuvent servir à la détermination des points-racines du polynôme dérivé $F'(z)$ lorsque l'on connaît les points-racines du polynôme primitif $F(z)$.

Il est à remarquer que la cassinoïde représentée par l'équation générale

$$(9) \quad X^2 + Y^2 = \text{const.}$$

tend rapidement, lorsque l'on fait croître la constante, vers une grande circonférence ayant son centre au centre des moyennes distances des points-racines M. Si l'on décrit autour de ce point comme centre une circonférence d'un rayon suffisant pour circonscrire tous les points M, on pourra limiter la plaque indéfinie à une autre circonférence de même centre, mais d'un rayon beaucoup plus grand, qui pourra, sans erreur sensible, être regardée comme une courbe équipotentielle.

Les électrodes positives étant données par les extrémités de fils conducteurs aboutissant au point M, on prendra pour électrode négative un anneau métallique, d'un rayon égal à celui de la plaque conductrice et se juxtaposant à son contour. Comme tous les

points M' doivent être à l'intérieur de la petite circonférence qui entoure le groupe (M) , il suffira, pour la recherche de ces points M' , de tracer les arcs des courbes équipotentielles qui se trouvent compris dans cette circonférence.

Si donc on connaît les points-racines d'un polynôme $F(z)$, l'emploi des courants voltaïques permet d'obtenir sans calculs les points racines du polynôme dérivé $F'(z)$.

(Février 1888.)

Égalités à deux degrés (1); par M. MICHEL FROLOV.

Le but unique de la Science, c'est l'honneur
de l'esprit humain, et, sous ce titre, une
question des nombres vaut autant qu'une
question du système du monde.

JACOBI à LEGENDRE.

1. *Définitions.* — Étant donnés deux ou plusieurs groupes d'un même nombre de termes, tels qu'en prenant les termes de chaque groupe non seulement au premier, mais aussi au second degré, on obtient, dans les deux cas, des sommes égales pour tous les groupes, nous dirons que ces groupes forment une *égalité à deux degrés*.

Ainsi, lorsqu'il y a simultanément

$$(1) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = \dots$$

ou

$$\Sigma a = \Sigma b = \Sigma c = \dots$$

et

$$(2) \quad a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 = \dots$$

ou

$$\Sigma a^2 = \Sigma b^2 = \Sigma c^2 = \dots,$$

on a une égalité à deux degrés que nous représenterons par la

(1) Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 19 novembre 1888.

notation abrégée

$$a_1 a_2 \dots a_n \perp b_1 b_2 \dots b_n \perp c_1 c_2 \dots c_n \perp \dots$$

ou

$$\Sigma a \perp \Sigma b \perp \Sigma c \dots$$

Les égalités de cette espèce donnent lieu à des procédés particuliers.

Examinons le cas le plus simple, celui où l'on n'a que deux groupes égaux,

$$a_1 a_2 \dots a_n \perp \Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Lambda_n.$$

Il est évident que les différences des termes correspondants

$$\Lambda_1 - a_1 = d_1, \quad \Lambda_2 - a_2 = d_2, \quad \dots, \quad \Lambda_n - a_n = d_n$$

doivent satisfaire aux équations

$$(1) \begin{cases} d_1 + d_2 + \dots + d_n = \Sigma d = 0 \\ \text{et} \\ 2(a_1 d_1 + a_2 d_2 + \dots + a_n d_n) + d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2 = 2 \Sigma a d + \Sigma d^2 = 0. \end{cases}$$

Ces équations expriment les conditions fondamentales de la question.

Par exemple, étant données les égalités

$$1 + 16 + 26 + 31 = 6 + 11 + 21 + 36 = 74$$

et

$$1^2 + 16^2 + 26^2 + 31^2 = 6^2 + 11^2 + 21^2 + 36^2 = 1894,$$

nous les exprimerons plus simplement

$$1, 16, 26, 31 \perp 6, 11, 21, 36.$$

En prenant les différences

$$6 - 1 = +5, \quad 11 - 16 = -5, \quad 21 - 16 = +5, \quad 36 - 31 = +5,$$

on a

$$\Sigma d = +5 - 5 + 5 + 5 = 0,$$

$$2 \Sigma a d + d^2 = 2[1 \times (+5) + 16 \times (-5) + 26 \times (+5) + 31 \times (+5)] + (-5)^2 + (-5)^2 + (+5)^2 + (+5)^2 = 0.$$

Les égalités à deux degrés possèdent plusieurs propriétés que nous exposerons dans les théorèmes suivants.

2. THÉORÈME I. — *On peut augmenter ou diminuer de la même quantité tous les termes d'une égalité.*

Ce théorème a lieu pour les égalités à plusieurs degrés consécutifs. Soit

$$\Sigma a = \Sigma A, \quad \Sigma a^2 = \Sigma A^2, \quad \Sigma a^3 = \Sigma A^3, \quad \dots, \quad \Sigma a^k = \Sigma A^k, \quad \dots$$

Il suffit de démontrer ce théorème relativement à l'exposant général k .

En ajoutant une quantité quelconque h à tous les termes de la dernière égalité, on aura

$$\begin{aligned} \Sigma(a \pm h)^k &= \Sigma a^k \pm kh \Sigma a^{k-1} \\ &\quad + \frac{k(k-1)}{2} h^2 \Sigma a^{k-2} \pm \frac{k(k-1)(k-2)}{2 \times 3} h^3 \Sigma a^{k-3} \dots, \\ \Sigma(A \pm h)^k &= \Sigma A^k \pm kh \Sigma A^{k-1} \\ &\quad + \frac{k(k-1)}{2} h^2 \Sigma A^{k-2} \pm \frac{k(k-1)(k-2)}{2 \times 3} h^3 \Sigma A^{k-3} \dots \end{aligned}$$

Les seconds membres de ces deux égalités étant égaux, terme à terme, il en résulte

$$\Sigma(a \pm h)^k = \Sigma(A \pm h)^k, \quad \Sigma(a \pm h)^2 = \Sigma(A \pm h)^2, \quad \Sigma(a \pm h) = \Sigma(A \pm h).$$

Donc on a

$$\Sigma(a \pm h) \perp \Sigma(A \pm h),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Par exemple, en ajoutant 3 à tous les termes de l'égalité

$$1, 4, 6, 7 \perp 2, 3, 5, 8,$$

on aura

$$4, 7, 9, 10 \perp 5, 6, 8, 11;$$

en retranchant 1 de tous les termes de cette dernière égalité, on aura

$$3, 6, 8, 9 \perp 4, 5, 7, 10.$$

3. THÉORÈME II. — *On peut retrancher d'une même quantité tous les termes d'une égalité.*

Ce théorème, qui permet de remplacer tous les termes d'une égalité par les termes complémentaires, se démontre tout aussi aisément. En effet, étant donnée $\Sigma a \perp \Sigma A$, on aura, en retrans-

chant tous les termes d'une quantité p .

$$\begin{aligned}\Sigma(p-a)^k &= p^k - k p^{k-1} \Sigma a \\ &\quad + \frac{k(k-1)}{2} p^{k-2} \Sigma a^2 - \frac{k(k-1)(k-2)}{2 \times 3} p^{k-3} \Sigma a^3 \dots \\ \Sigma(p-A)^k &= p^k - k p^{k-1} \Sigma A \\ &\quad - \frac{k(k-1)}{2} p^{k-2} \Sigma A^2 - \frac{k(k-1)(k-2)}{2 \times 3} p^{k-3} \Sigma A^3 \dots\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\Sigma(p-a)^k = \Sigma(p-A)^k, \quad \Sigma(p-a)^2 = \Sigma(p-A)^2, \quad \Sigma(p-a) = \Sigma(p-A),$$

donc

$$\Sigma(p-a) \perp \Sigma(p-A).$$

Par exemple, en retranchant de 22 les termes de l'égalité

$$1, 3, 10, 20 \perp 2, 4, 7, 21,$$

on obtient

$$21, 19, 12, 1 \perp 20, 18, 15, 1.$$

4. THÉORÈME III. — *On peut multiplier ou diviser par la même quantité tous les termes d'une égalité.*

Par exemple, en multipliant par 2 les termes de l'égalité

$$3, 15, 18 \perp 6, 9, 21,$$

on a

$$6, 30, 36 \perp 12, 18, 42$$

en divisant cette dernière par 3, on obtient

$$2, 10, 12 \perp 4, 6, 14.$$

Ce théorème se démontre comme les deux précédents. À l'aide des trois théorèmes que nous venons d'exposer, on peut déduire d'une seule égalité beaucoup d'autres contenant le même nombre de termes.

5. THÉORÈME IV. — *On peut faire l'addition de deux ou plusieurs égalités.*

Ce théorème, dont la vérité se voit immédiatement et qui permet de passer des égalités données à des égalités nouvelles contenant un nombre de termes plus élevé, peut être appliqué de

différentes manières, soit en additionnant séparément les premiers et les seconds groupes, soit en transposant les groupes de quelques égalités.

Par exemple, on peut faire l'addition de deux égalités

$$\begin{array}{l} 1, 4, 6, 7 \perp 2, 3, 5, 8, \\ 9, 13, 14 \perp 10, 11, 15 \end{array}$$

de deux manières et l'on obtient deux égalités de sept termes

$$\begin{array}{l} 1, 4, 6, 7, 9, 13, 14 \perp 2, 3, 5, 8, 10, 11, 15, \\ 1, 4, 6, 7, 10, 11, 15 \perp 2, 3, 5, 8, 9, 13, 14. \end{array}$$

6. Égalités semblables. — Nous dirons que les égalités ayant le même nombre de termes sont *semblables*, si les différences des termes correspondants, dont nous avons parlé dans le § 1, sont proportionnelles les unes aux autres.

Ainsi les deux égalités

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n \perp A_1 A_2 A_3 \dots A_n$$

et

$$b_1 b_2 b_3 \dots b_n \perp B_1 B_2 B_3 \dots B_n$$

sont semblables si l'on a

$$\frac{B_1 - b_1}{A_1 - a_1} = \frac{B_2 - b_2}{A_2 - a_2} = \frac{B_3 - b_3}{A_3 - a_3} = \dots = \frac{B_n - b_n}{A_n - a_n}.$$

Par exemple, les égalités

$$4, 32, 36, \perp 12, 16, 44 \quad \text{et} \quad 7, 35, 42 \perp 14, 21, 49$$

sont semblables, puisque l'on a

$$\frac{14-7}{12-4} = \frac{21-35}{16-32} = \frac{49-42}{44-36}.$$

On déduit de cette définition le théorème suivant :

7. THÉORÈME V. — *On peut additionner les termes correspondants des égalités semblables.*

Par exemple, en additionnant les termes des égalités semblables

$$1, 4, 6, 7 \perp 2, 3, 5, 8 \quad \text{et} \quad 1, 8, 11, 14 \perp 3, 6, 9, 16,$$

on a

$$2, 12, 17, 21 \perp 5, 9, 14, 24.$$

REMARQUE. — *En multipliant les termes d'une égalité par les termes correspondants d'une autre qui lui est semblable, les sommes des produits seront égales.*

Par exemple, en appliquant cette opération aux deux égalités

$$1, 4, 6, 7 \perp 2, 3, 5, 8 \quad \text{et} \quad 1, 8, 11, 14 \perp 3, 6, 9, 16,$$

on aura

$$1 \times 1 + 4 \times 8 + 6 \times 11 + 7 \times 14 = 2 \times 3 + 3 \times 6 + 5 \times 9 + 8 \times 16 = 197.$$

Cette propriété se démontre aisément.

8. THÉORÈME VI. — *On peut ajouter aux termes des deux groupes d'une égalité une suite de quantités déterminées autant de fois que l'on voudra.*

Soit

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n \perp A_1 A_2 A_3 \dots A_n.$$

En ajoutant aux termes des deux groupes les quantités $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$, on aura

$$(a_1 + r_1), (a_2 + r_2), \dots, (a_n + r_n) \\ \perp (A_1 + r_1), (A_2 + r_2), \dots, (A_n + r_n).$$

Pour satisfaire aux conditions fondamentales exprimées par les équations (I), on doit avoir

$$(A_1 - a_1)r_1 + (A_2 - a_2)r_2 + \dots + (A_n - a_n)r_n = \Sigma(A - a)r = 0,$$

ou, en reprenant la notation du § 1,

$$(II) \quad d_1 r_1 + d_2 r_2 + \dots + d_n r_n = \Sigma dr = 0.$$

Cette équation sert à déterminer les quantités additionnelles r .

Par exemple, l'égalité

$$1, 5, 6 \perp 2, 3, 7$$

donne les différences

$$d_1 = 2 - 1 = +1, \quad d_2 = 3 - 5 = -2, \quad d_3 = 7 - 6 = +1.$$

Donc on a

$$r_3 = 2r_2 - r_1.$$

En posant $r_1 = 0$, nous trouvons

$$r_3 = 2r_2.$$

Ainsi, on peut prendre une des suites additionnelles 0, 1, 2; 0, 2, 4; 0, 3, 6; En nous servant de la suite 0, 1, 2 et en l'ajoutant successivement, nous aurons

$$1, 6, 8 \perp 2, 4, 9; \quad 1, 7, 10 \perp 2, 5, 11; \quad 1, 8, 12 \perp 2, 6, 13; \quad \dots$$

L'égalité

$$1, 3, 8, 14 \perp 2, 4, 5, 15$$

donne les différences

$$d_1 = +1, \quad d_2 = +1, \quad d_3 = -3, \quad d_4 = -1.$$

Donc

$$r_4 = 3r_3 - (r_1 + r_2).$$

En faisant $r_1 = 0$, on aura

$$r_4 = 3r_3 - r_2.$$

Ainsi l'on peut choisir entre les suites 0, 0, 1, 3; 0, 1, 1, 2; 0, 1, 2, 5; En choisissant la suite 0, 0, 1, 3, nous obtiendrons

$$1, 3, 9, 17 \perp 2, 4, 6, 18; \quad 1, 3, 10, 20 \perp 2, 4, 7, 21; \quad \dots$$

9. *Première méthode de la formation des égalités.* — On prendra des nombres quelconques; on formera une identité en les disposant dans deux ordres différents; après avoir déterminé les suites additionnelles, au moyen de l'équation (II), on les ajoutera aux deux membres de l'identité jusqu'à ce que tous les termes prennent des valeurs différentes.

Commençons par les égalités les plus simples, celles qui ne contiennent que deux groupes de trois termes.

Dans ce cas, on peut composer l'identité d'après l'une des deux formes

$$(1) \quad a_1 a_2 a_3 \perp a_3 a_1 a_2.$$

et

$$(2) \quad a_1 a_2 a_3 \perp a_2 a_3 a_1.$$

En posant $r_1 = 0$, on tirera de l'équation (II), pour la première forme,

$$r_3 = \frac{a_2 - a_1}{a_2 - a_3} r_2.$$

et pour la seconde,

$$r_3 = \frac{a_1 - a_3}{a_1 - a_2} r_2.$$

Prenons l'identité $1, 3, 2 \perp 2, 1, 3$ composée d'après la première forme. La formule correspondante donne $r_3 = 2r_2$; donc on peut se servir de la suite $0, 1, 2$, que nous avons déjà employée dans le § 8.

$$\begin{array}{r} 1, 3, 2 \perp 2, 1, 3 \\ - 0, 1, 2 + 0, 1, 2 \\ \hline 1, 4, 4 \perp 2, 2, 5 \\ - 0, 1, 2 + 0, 1, 2 \\ \hline 1, 5, 6 \perp 2, 3, 7 \end{array}$$

C'est la première égalité obtenue par ce procédé qui soit composée de nombres différents. En continuant l'addition, on obtient successivement

$$1, 6, 8 \perp 2, 4, 9; \quad 1, 7, 10 \perp 2, 5, 11; \quad 1, 8, 12 \perp 2, 6, 13; \quad \dots$$

Étant appliqué aux identités

$$3, 5, 1 \perp 5, 1, 3 \quad \text{et} \quad 4, 7, 1 \perp 7, 1, 4,$$

ce procédé donne des égalités

$$1, 8, 9 \perp 3, 4, 11 \quad \text{et} \quad 1, 11, 13 \perp 4, 5, 15,$$

semblables aux précédentes, et, par conséquent, on peut additionner leurs termes correspondants.

En ajoutant aux identités

$$\begin{array}{l} 1, 4, 3 \perp 3, 1, 4; \quad 1, 4, 9 \perp 9, 1, 4; \\ 1, 6, 4 \perp 4, 1, 6; \quad 1, 6, 3 \perp 3, 1, 6 \end{array}$$

respectivement les suites $0, 1, 3$; $0, 2, 3$; $0, 2, 5$ et $0, 3, 5$, on trouve des égalités

$$\begin{array}{l} 1, 7, 13 \perp 5, 4, 15; \quad 1, 10, 11 \perp 2, 7, 13; \\ 1, 10, 11 \perp 4, 5, 16; \quad 1, 13, 15 \perp 3, 7, 16; \end{array}$$

qui ne sont semblables ni aux précédentes, ni entre elles.

En passant aux égalités de quatre termes, prenons l'identité

$$0, 1, 2, 3 \perp 2, 3, 1, 0$$

On peut lui appliquer les suites $0, 1, 1, 1$; $1, 1, 1, 1$; $0, 1, 2, 3$;

0, 1, 3, 4; ... déterminées à l'aide de l'équation (II). En se servant de la première suite, on obtient

$$1, 4, 6, 7 \perp 2, 3, 5, 8; \quad 1, 4, 7, 8 \perp 2, 3, 6, 9; \quad \dots$$

L'identité de cinq termes

$$1, 4, 3, 5, 2 \perp 3, 5, 2, 1, 4$$

produit, au moyen de la suite 0, 0, 2, 3, 7, les égalités

$$1, 4, 9, 14, 23 \perp 3, 5, 8, 10, 25;$$

$$1, 4, 11, 17, 30 \perp 3, 5, 10, 13, 32;$$

.....

10. Deuxième méthode de la formation des égalités. — Nous avons déjà dit dans le n° 5 que l'on peut passer des égalités données à des égalités nouvelles contenant un plus grand nombre de termes. En se servant d'une seule égalité, on peut en déduire d'autres dont le nombre est de deux ou de plusieurs fois plus élevé. Par exemple, en prenant l'égalité de trois termes

$$1, 5, 6 \perp 2, 3, 7$$

et en ajoutant à ses termes le nombre 7 égal au plus élevé des termes, nous obtiendrons, en additionnant la nouvelle égalité

$$8, 12, 13 \perp 9, 10, 14,$$

et l'égalité primordiale de deux manières indiquées au n° 5, deux égalités de six termes

$$1, 5, 6, 8, 12, 13 \perp 2, 3, 7, 9, 10, 14;$$

$$1, 5, 6, 9, 10, 14 \perp 2, 3, 7, 8, 12, 13.$$

En augmentant de 14 les termes de l'égalité primordiale et en ajoutant la nouvelle égalité

$$15, 19, 20 \perp 16, 17, 21$$

aux précédentes également de deux manières, nous obtiendrons quatre égalités de neuf termes :

$$1, 5, 6, 8, 12, 13, 15, 19, 20 \perp 2, 3, 7, 9, 10, 14, 16, 17, 21,$$

$$1, 5, 6, 8, 12, 13, 16, 17, 21 \perp 2, 3, 7, 9, 10, 14, 15, 19, 20,$$

$$1, 5, 6, 9, 10, 14, 15, 19, 20 \perp 2, 3, 7, 8, 12, 13, 16, 17, 21,$$

$$1, 5, 6, 9, 10, 14, 16, 17, 21 \perp 2, 3, 7, 8, 12, 13, 15, 19, 20.$$

Étant données deux égalités

$$1, 5, 6 \perp 2, 3, 7$$

de trois termes, et

$$1, 4, 6, 7 \perp 2, 3, 5, 8$$

de quatre termes, en augmentant de 8 les termes de la première, on a

$$9, 13, 14 \perp 10, 11, 15,$$

et en ajoutant celle-ci à la deuxième égalité de deux manières, nous obtiendrons deux égalités de sept termes :

$$1, 4, 6, 7, 9, 13, 14 \perp 2, 3, 5, 8, 10, 11, 15,$$

$$1, 4, 6, 7, 10, 11, 15 \perp 2, 3, 5, 8, 9, 13, 14.$$

Il est facile de comprendre qu'en combinant entre elles une égalité de trois termes et une autre de quatre termes on peut composer des égalités contenant autant de termes que l'on voudra.

11. Répartition des nombres consécutifs en deux groupes égaux.

Nous nous proposerons à présent de répartir en deux groupes égaux tous les nombres consécutifs d'une progression arithmétique, sans omettre ni répéter aucun de ces nombres.

La plus petite progression des nombres naturels qui peuvent être répartis en deux groupes égaux est celle qui contient huit nombres. Cette répartition est formulée par l'égalité suivante, que nous avons déjà citée plus d'une fois,

$$1, 4, 6, 7 \perp 2, 3, 5, 8.$$

En augmentant tous les termes de 8, nous aurons

$$9, 12, 14, 15 \perp 10, 11, 13, 16.$$

Si nous additionnons ces deux égalités de deux manières, nous obtenons deux égalités représentant la répartition des 16 nombres consécutifs en deux groupes égaux :

$$1, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 15 \perp 2, 3, 5, 8, 10, 11, 13, 16,$$

$$1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16 \perp 2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15.$$

En augmentant tous les termes de l'égalité primordiale encore de

8, nous aurons

$$17, 20, 22, 23 \perp 18, 19, 21, 24.$$

En ajoutant cette nouvelle égalité aux deux précédentes, aussi de deux manières, nous aurons quatre égalités représentant la répartition des 24 nombres consécutifs en deux groupes égaux :

$$\begin{aligned} &1, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 17, 20, 22, 23 \\ \perp &2, 3, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 18, 19, 21, 24 : \\ &1, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 18, 19, 21, 24 \\ \perp &2, 3, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 20, 22, 23 : \\ &1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16, 17, 20, 22, 23 \\ \perp &2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15, 18, 19, 21, 24 : \\ &1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16, 18, 19, 21, 24 \\ \perp &2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15, 17, 20, 22, 23. \end{aligned}$$

En répétant le même procédé, on peut répartir les 32 nombres consécutifs de 8 manières, les 40 de 16 manières et en général les $8m$ nombres de $2^{(m-1)}$ manières différentes.

Mais ce n'est pas tout, car on pourrait trouver encore bien d'autres égalités, en transposant d'un groupe à un autre les groupes inférieurs. Par exemple, dans la première des égalités de 12 termes, on peut transposer les deux groupes de l'égalité

$$1, 12, 20 \perp 2, 10, 21$$

et l'on aura une cinquième égalité

$$\begin{aligned} &2, 4, 6, 7, 9, 10, 14, 15, 17, 21, 22, 23 \\ \perp &1, 3, 5, 8, 11, 12, 13, 16, 18, 19, 20, 24. \end{aligned}$$

On peut encore transposer dans la première et la dernière égalité les groupes

$$3, 11, 16 \perp 4, 9, 17$$

et l'on aura encore deux égalités

$$\begin{aligned} &1, 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 16, 20, 22, 23 \\ \perp &2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 17, 18, 19, 21, 24 : \\ &2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 21, 22, 23 \\ \perp &1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 17, 18, 19, 20, 24. \end{aligned}$$

On peut également répartir en deux groupes égaux les 12 nombres consécutifs, comme le montre l'égalité

$$1 + 3 + 7 + 8 + 9 + 11 \perp 2 + 4 + 5 + 6 + 10 + 12.$$

En augmentant tous les termes de 12 :

$$13 + 15 + 19 + 20 + 21 + 23 \perp 14 + 16 + 17 + 18 + 22 + 24$$

et en additionnant ces égalités de deux manières, on obtient encore deux manières de répartir 24 nombres consécutifs en deux groupes égaux :

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 7 + 8 + 9 + 11 + 13 + 15 + 19 + 20 + 21 + 23 \\ \perp 2 + 4 + 5 + 6 + 10 + 12 + 14 + 16 + 17 + 18 + 22 + 24; \\ 1 + 3 + 7 + 8 + 9 + 11 + 14 + 16 + 17 + 18 + 22 + 24 \\ \perp 2 + 4 + 5 + 6 + 10 + 12 + 13 + 15 + 19 + 20 + 21 + 23. \end{aligned}$$

La répartition en deux groupes égaux de 20, 28, ... $4m$ nombres consécutifs peut se faire en additionnant les groupes de quatre, de six, de huit termes. Ainsi on peut répartir en deux groupes égaux toute progression de $4m$ nombres consécutifs.

12. Répartition des nombres consécutifs en plusieurs groupes égaux.

Toute progression arithmétique peut être divisée en n groupes égaux, si le nombre de ses termes est égal au carré double du nombre de groupes, c'est-à-dire si elle contient $2n^2$ termes. Ainsi, l'on peut diviser en trois groupes égaux une progression contenant 18 termes, en quatre groupes une progression contenant 32 termes, etc.

Voici la règle à suivre : il faut diviser la progression en n sections, ayant chacune $2n$ nombres consécutifs; puis réunir les nombres de chaque section en n couples, dont le 1^{er} soit formé de deux nombres du milieu, le 2^e de deux nombres voisins des précédents et ainsi de suite. Pour composer les groupes, on prendra dans toutes les sections des couples différents.

Cette règle est basée sur des considérations suivantes :

Solent $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ les sommes des carrés des deux nombres du 1^{er} couple dans la 1^{re}, la 2^e, ..., la n^{e} section; les

sommes des carrés des nombres dans toutes les sections seront

1 ^{er}	couple....	$Q_1 + 4;$	$Q_2 + 4;$	...;	$Q_n + 4$
2 ^e	"		$Q_1 + 12;$	$Q_2 + 12;$	...; $Q_n + 12$
3 ^e	"		$Q_1 + 24;$	$Q_2 + 24;$	...; $Q_n + 24$
4 ^e	"		$Q_1 + 40;$	$Q_2 + 40;$	...; $Q_n + 40$
5 ^e	"		$Q_1 + 60;$	$Q_2 + 60;$	...; $Q_n + 60$
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
n^{me}	"		$Q_1 + 2n(n-1);$	$Q_2 + 2n(n-1);$	...; $Q_n + 2n(n-1).$

Il en résulte qu'en prenant pour chaque groupe des couples différents dans toutes les sections, on obtiendra invariablement la même somme des carrés

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n + 0 + 4 + 12 + 24 + \dots + 2n(n-1).$$

Quant à l'égalité des sommes des premières puissances, elle est évidente, vu que tous les couples donnent des sommes égales dans chaque section. Par conséquent, tous les groupes seront égaux à deux degrés.

Commençons par la répartition de 18 nombres consécutifs en trois groupes. Représentons les couples dans une Table à deux entrées :

COUPLES. SECTIONS.	I.	II.	III.
	1	2	3
1	3	2	1
	4	5	6
2	9	8	7
	10	11	12
3	15	14	13
	16	17	18

et composons les groupes en prenant les couples d'après la forme,

successivement dans la 1^{re}, la 2^e et la 3^e section.

$$\begin{array}{l} \text{III, II, I} \\ \text{II, I, III} \\ \text{I, III, II.} \end{array}$$

Il en résultera l'égalité

$$1, 6, 8, 11, 15, 16 \perp 2, 5, 9, 10, 13, 18 \perp 3, 4, 7, 12, 14, 17.$$

En remplaçant, d'après le théorème II, tous les nombres par leurs compléments : 1 par 18, 2 par 17, etc., et *vice versa*, nous obtiendrons une seconde égalité

$$1, 6, 9, 10, 14, 17 \perp 2, 5, 7, 12, 15, 16 \perp 3, 4, 8, 11, 13, 18.$$

En transposant, dans la première égalité, les deux groupes égaux

$$4, 12, 17 \perp 5, 10, 18,$$

et dans la seconde les groupes égaux

$$5, 12, 16 \perp 6, 10, 17,$$

nous aurons encore deux égalités, aussi complémentaires l'une de l'autre,

$$1, 6, 8, 11, 15, 16 \perp 2, 4, 9, 12, 13, 17 \perp 3, 5, 7, 10, 14, 18$$

$$1, 5, 9, 12, 14, 16 \perp 2, 6, 7, 10, 15, 17 \perp 3, 4, 8, 11, 13, 18.$$

On peut décomposer une progression de 32 nombres consécutifs en quatre groupes, d'après 24 formes différentes qui, par la permutation des rangées verticales, excepté la première, se réduisent à quatre types :

1.	2.
IV, III, II, I	IV, III, II, I
III, IV, I, II	III, IV, I, II
II, I, IV, III	II, I, III, IV
I, II, III, IV	I, II, IV, III
3.	4.
IV, III, II, I	IV, III, II, I
III, II, I, IV	III, I, IV, II
II, I, IV, III	II, IV, I, III
I, IV, III, II	I, II, III, IV

Pour $n = 5$, on a 56 types qui, par la permutation des rangées

verticales, produisent $56 \times 24 = 1344$ formes. On voit qu'en augmentant n le nombre des formes croît très rapidement.

13. Égalité à trois degrés. — Nous nous bornerons à donner quelques exemples d'égalités de cette espèce qui donnent des sommes égales, en prenant les nombres aux 1^{er}, 2^e et 3^e degrés. Pour les représenter nous adopterons une notation particulière :

$$(1) \quad 1, 14, 22, 35 \Delta 2, 11, 25, 34.$$

Les sommes des premières puissances sont égales à 72, des secondes à 1906, et des troisièmes à 56268

$$(2) \quad 1, 10, 11, 13, 14, 23 \Delta 3, 6, 9, 15, 18, 21,$$

dont les sommes respectives sont 72, 1116, 19470,

$$(3) \quad 1, 12, 13, 21, 22, 33 \Delta 3, 7, 16, 18, 27, 31,$$

dont les sommes sont 102, 2328, 59772.

Rappelons que les transformations exposées dans les théorèmes I, IV étant aussi applicables aux égalités de cette espèce, on peut obtenir d'une égalité donnée beaucoup d'autres égalités.

Par exemple, en diminuant de 1 tous les termes de la deuxième égalité, on a

$$0, 9, 10, 12, 13, 22 \Delta 2, 5, 8, 14, 17, 20.$$

En multipliant par 2,

$$0, 18, 20, 24, 26, 44 \Delta 4, 10, 16, 28, 34, 40.$$

En ajoutant 1 à tous les termes, on obtient

$$(4) \quad 1, 19, 21, 25, 27, 45 \Delta 5, 11, 17, 29, 35, 41.$$

En augmentant de 3 les termes de la deuxième égalité, on a

$$4, 13, 14, 16, 17, 26 \Delta 6, 9, 12, 18, 21, 24,$$

et en lui ajoutant cette nouvelle égalité, on obtient

$$(5) \quad 1, 10, 11, 12, 23, 24 \Delta 3, 4, 15, 16, 17, 26.$$

Ajoutons cette dernière à la troisième égalité et nous aurons une égalité de 8 termes :

$$(6) \quad 1, 10, 12, 14, 18, 19, 23, 30 \Delta 4, 7, 8, 15, 20, 21, 24, 28.$$

Étude géométrique sur la courbure des pseudo-surfaces;
par M. l'Abbé ISSALY.

Preliminaires.

1. De notre Mémoire sur les *congruences de droites* ⁽¹⁾, il résulte qu'une pseudo-surface n'est autre qu'un lieu géométrique d'un nouveau genre produit par deux systèmes de courbes variables ne s'entrecoupant qu'aux infiniment petits du second ordre près.

Un tel lieu n'est pas susceptible, à vrai dire, d'être représenté par une équation finie entre trois variables, telles que x, y, z ; mais il peut l'être, implicitement du moins, par une équation différentielle de la forme

$$[dz = \varphi(x, y)dx + \psi(x, y)dy]$$

jointe à la condition de non-intégrabilité

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} > \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

A ce point de vue, toute surface peut être considérée comme un cas particulier ou, pour mieux dire, comme une limite commune à une double série de pseudo-surfaces infiniment voisines.

On en conclut que, quelle que soit, par exemple, l'expression que l'on adopte pour la mesure de la courbure d'une surface en chacun de ses points, cette expression devra pouvoir se déduire, en y faisant simplement $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ou $\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2}$, suivant la notation adoptée, de celle qui conviendrait à l'une quelconque des pseudo-surfaces voisines. Et, comme nous savons qu'*a priori* cette dernière expression ne dépend aucunement des paramètres E, F, G de Gauss, on peut affirmer que la première n'en saurait dépendre, pour sa part, de nécessité absolue du moins.

A l'appui de cette déduction, nous rappellerons que la forme *primitive* des équations des lignes remarquables d'une surface

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XVI.

prise en général s'obtient sans le secours de ces paramètres, et que c'est pour la variété seule des applications que la nécessité de leur introduction se fait sentir.

2. Du même Mémoire, il résulte encore qu'en tout point M d'une pseudo-surface on peut concevoir deux surfaces auxiliaires osculatrices F_μ et F_ν , correspondant, l'une à la moyenne arithmétique $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right)$, l'autre à la moyenne géométrique $\frac{1}{\sqrt{\rho_1'' \rho_2''}}$ des courbures corrélatives des lignes coordonnées.

La première de ces surfaces est étroitement liée aux plans principaux des pseudo-surfaces qui lui sont tangentes, tandis que la seconde se rattache à leurs plans focaux. Or on sait que les plans principaux sont toujours réels, tandis que les plans focaux peuvent être imaginaires. Pour ce motif surtout nous emploierons de préférence la surface F_μ dans tout ce qui va suivre.

I.

Extension aux pseudo-surfaces des principales formules proposées comme mesure de la courbure des surfaces.

3. Rappelons d'abord l'équation de l'indicatrice de la surface F_μ , laquelle est aussi celle des pseudo-surfaces correspondantes [I, n° 19 (1)], savoir :

$$(1) \quad \frac{X^2}{r_1''} + \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right) XY + \frac{Y^2}{r_2''} = 1.$$

Cette conique, avons-nous dit, appartient aux genres : ellipse, hyperbole ou parabole, selon que la quantité

$$k_\mu \sin^2 \theta = \frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right)^2$$

est, ou positive, ou négative, ou nulle.

On en déduit, pour l'équation aux rayons principaux R_1'' et R_2'' ,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin^2 \theta}{R^2} - \left[\frac{1}{r_1''} + \frac{1}{r_2''} - \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right) \cos \theta \right] \frac{1}{R} \\ + \left[\frac{1}{r_1'' r_2''} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\rho_1''} + \frac{1}{\rho_2''} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

(1) Cette abréviation est un renvoi au n° 19 de notre premier Mémoire.

Rapportée à ses axes de figure, l'indicatrice prend dès lors la forme réduite

$$(3) \quad \frac{X^2}{R_1^2} + \frac{Y^2}{R_2^2} = 1,$$

et l'on remarque qu'avec ce choix de coordonnées l'expression de la première courbure verticale de la ligne quelconque S peut s'écrire

$$(4) \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \theta_1}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \theta_1}{R_2^2}.$$

4. Actuellement, de l'origine M comme centre, avec un rayon variable $\sqrt{R'}$, décrivons une sphère; puis, sur le plan horizontal $T_1 M T_2$, considérons les deux courbes du second ordre

$$X^2 + 2XY \cos \theta + Y^2 = R',$$

$$\frac{X^2}{r_1^2} + \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) XY + \frac{Y^2}{r_2^2} = 1,$$

où l'on reconnaît, avec l'indicatrice (1), la section de la sphère par le plan horizontal.

Le couple des sécantes communes qui se coupent à l'origine ayant pour équation

$$\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{r_1^2} \right) X^2 - 2 \left[\frac{\cos \theta}{R'} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) \right] XY + \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{r_2^2} \right) Y^2 = 0$$

ou bien

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 = 0,$$

si l'on pose

$$2 \sin^2 \theta = AC - B^2,$$

il viendra

$$2 = \left(\frac{1}{R'} \right)^2 - J_1 \left(\frac{1}{R'} \right) + J_2 = \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R_1^2} \right) \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R_2^2} \right);$$

les coefficients J_1 et J_2 n'étant autres que les invariants

$$J_1 = \frac{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} - \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \cos \theta}{\sin^2 \theta},$$

$$J_2 = \frac{\frac{1}{r_1^2 r_2^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right)^2}{\sin^2 \theta}.$$

Ceci posé, il est facile de voir que, *généralisées*, c'est-à-dire appliquées aux pseudo-surfaces, les formules principales qui ont été présentées, en divers temps, comme mesure de la courbure d'une surface ne sont autres que des fonctions symétriques des racines $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$ de l'équation $\delta = 0$ et, par suite, des fonctions rationnelles des invariants J_1 et J_2 . En effet, en ayant égard aux formules de transformation des coordonnées, on a

$$k_\mu = \frac{1}{R_1' R_2'} = J_2 \text{ (Gauss),}$$

$$k_{\mu_1} = \frac{1}{R_1'^2} + \frac{1}{R_2'^2} = J_1 - 2J_2,$$

$$k_{\mu_2} = \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} = J_1 \text{ (Sophie Germain),}$$

$$k_{\mu_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} \right) = \frac{1}{2} J_1,$$

$$k_{\mu_4} = \frac{1}{R_1'^2} + \frac{2}{3 R_1' R_2'} + \frac{1}{R_2'^2} = J_1^2 - \frac{4}{3} J_2 \text{ (MM. Bourget et Housel).}$$

5. Discutons sommairement la convenance de ces valeurs au point de vue de la mesure de la courbure des pseudo-surfaces :

1° $k_\mu = \frac{1}{R_1' R_2'}$. — Ce rapport pourra bien être généralement tenu pour acceptable, tant que R_1' et R_2' seront de même signe ou de signe contraire ; mais, de l'avis d'un grand nombre, à coup sûr, il cessera de paraître tel lorsque l'un de ces rayons deviendra infini, ce qui a lieu lorsque F_μ est une surface développable.

2° $k_{\mu_1} = \frac{1}{R_1'^2} + \frac{1}{R_2'^2}$. — En adoptant cette expression, on remplace implicitement la courbure normale $\frac{1}{r}$ par le carré $\frac{1}{V_2}$ de la déviation verticale relative au pinceau des normales $[MN]$ de la surface F_μ ou, si l'on veut, l'indicatrice (3) par la *déviatrice*

$$\frac{X^2}{R_1'^2} + \frac{Y^2}{R_2'^2} = 1$$

de cette surface. Or on rend de la sorte impossible tout moyen de distinguer la concavité d'avec la convexité de F_μ autour du point M , chose essentielle, sans contredit, lorsqu'il s'agit de courbure.

3° $k_{\mu} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Cette troisième formule tombe en défaut, lorsque F_{μ} est une surface *minima*, et l'on peut ajouter, en ayant égard aux invariants ci-dessus, lorsque les pseudo-surfaces qu'elle remplace le sont avec elle.

4° $k_{\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} \right)$. — Ceci équivaut à prendre pour mesure de la courbure de la surface F_{μ} sa courbure sphérique ou moyenne, mais on y rencontre les mêmes inconvénients qu'avec k_{μ} .

5° $k_{\mu} = \frac{1}{R_1^2} + \frac{2}{3R_1R_2} + \frac{1}{R_2^2}$. — Seule, cette dernière formule nous a paru particulièrement digne d'attention : aussi n'avons-nous pas hésité, en l'adoptant pour les pseudo-surfaces, à la prendre comme point de départ de nos présentes recherches. Mais il faut auparavant en expliquer l'origine.

6. Supposons que l'on porte sur la normale MN, à partir du point M, les longueurs $\frac{1}{r} = r'$ des courbures des diverses sections normales de la surface F_2 . Rabattons chacune de ces longueurs suivant l'intersection du plan horizontal T_1MT_2 avec le plan normal qui la contient. Leurs extrémités détermineront un arc de courbe dont la forme suffira déjà à rendre sensible la variation des courbures des sections normales successives, et par là même celle de la surface F_2 autour du point choisi.

En convenant de remplacer désormais $\frac{1}{r}$ par $\frac{1}{r'}$, à cause de l'ambiguïté qui ne tarderait pas à survenir, l'équation en r' et $\frac{1}{r'}$ de la courbe, dont nous venons d'indiquer la construction, sera

$$3 \quad \frac{1}{r'} = \frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{\sin^2 \theta}{R_2}.$$

C'est une courbe du quatrième ordre.

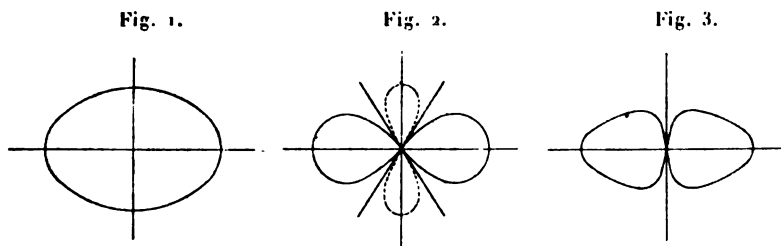
Si transformée par rayons vecteurs réciproques

$$6 \quad \frac{1}{r'} = \frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{\sin^2 \theta}{R_2}$$

est du sixième. Arrêtons-nous à cet instant.

On voit qu'elle présente trois variétés, selon que R_1' et R_2' sont

de même signe, de signe contraire ou que l'un des deux R_1'' , par exemple, est infini.



Nous l'appellerons *indicatrice (plane) de courbure* pour la distinguer de l'indicatrice proprement dite.

En désignant d'une manière générale par A_{η_i} son aire, on a

$$(7) \quad \begin{cases} \psi' = \frac{\cos^2 \psi}{R_1''} + \frac{\sin^2 \psi}{R_2''}, \\ \psi' = \frac{\cos^2 \psi}{R_1''} - \frac{\sin^2 \psi}{R_2''}, \\ \psi' = \frac{\cos^2 \psi}{R_1''}. \end{cases}$$

$$(7') \quad \begin{cases} A_{\eta_1} = \frac{\pi}{8} \left(\frac{3}{R_1''^2} + \frac{2}{R_1'' R_2''} + \frac{3}{R_2''^2} \right), \\ A_{\eta_2} = \frac{\pi}{8} \left(\frac{3}{R_1''^2} - \frac{2}{R_1'' R_2''} + \frac{3}{R_2''^2} \right), \\ A_{\eta_3} = \frac{\pi}{8} \frac{3}{R_1''^2}. \end{cases}$$

Ainsi c'est par l'aire de la courbe réciproque (6) qu'à l'instar de la méthode introduite par MM. Bourget et Housel nous proposerons, à titre de première approximation, de mesurer en chacun de ses points la courbure d'une pseudo-surface.

7. Et maintenant posons-nous la question suivante :

N'est-il pas possible de remplacer, soit le contour, soit l'aire de la courbe réciproque (6), c'est-à-dire des indicatrices (7), dont la construction artificielle ne fournit qu'une solution approchée du problème, par des surfaces convexes mesurant, en toute exactitude, géométriquement par elles-mêmes d'abord et numériquement par leur aire ensuite, la courbure de la surface F_{μ} en M et, par suite, celle de toutes les pseudo-surfaces infiniment voisines?

On le peut **effectivement** ; mais avouons tout de suite que si, au point de vue théorique, ces surfaces **doivent nous donner une expression géométrique adéquate** de la courbure, pratiquement, le calcul numérique de leur aire offrira des difficultés sérieuses, au point de faire regretter, pour ainsi dire, l'abandon des indicatrices planes. Regret inutile, dirons-nous aussitôt, puisqu'on verra, dès le paragraphe suivant, qu'il est toujours possible et même facile, à l'aide d'une transformation légère (véritable *critérium* par rapport à la première méthode) de faire prendre aux indicatrices convexes une aire rigoureusement égale à celle des indicatrices planes qui leur correspondent.

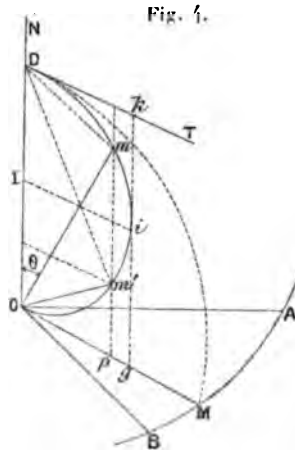
Comme les surfaces annoncées se ramènent à un type général jouissant de la propriété signalée et de quelques autres, non moins remarquables, nous croyons devoir faire connaître tout d'abord et le type lui-même et ces propriétés.

II.

Théorèmes généraux relatifs aux hémicyclides.

8. Nous appelons *surface hémicyclidale* ou simplement *hémicyclide* une surface engendrée par un demi-cercle dans les conditions que voici :

Soient AB un arc de courbe plane algébrique ou transcendante ;



AOB le secteur correspondant à un pôle donné O. Relevons sur la

normale au plan menée au pôle chacun des rayons vecteurs qui aboutissent aux divers points de l'arc pour en faire le diamètre OD d'un demi-cercle situé dans le plan du rayon considéré et de la normale :

THÉOREME I. — *L'aire du secteur donné est exactement égale à celle de la surface transformée que l'on obtient en substituant à chacun des éléments fusiformes de l'hémicyclide construite le fuseau sphérique qui en est la projection sur la sphère d'égale diamètre.*

Soit, en effet, $F(r, \psi) = 0$ l'équation de la courbe plane donnée, rapportée au point O comme pôle et à un axe polaire quelconque.

Pour préciser, prenons sur cette courbe la branche définie par la détermination de r suivante :

$$r = f(\psi).$$

En désignant par ρ un rayon vecteur Om quelconque et par θ l'angle qu'il fait avec ON, on aura pour équation du demi-cercle générateur

$$\rho = r \cos \theta,$$

θ ne variant que de zéro à $\frac{\pi}{2}$, et, par suite, pour équation de l'hémicyclide correspondant à la branche considérée,

$$\rho = f(\psi) \cos \theta.$$

Posons

$$u = \rho \sin \theta;$$

l'aire de la portion de surface transformée qui correspond à l'angle $\text{AOM} = \psi$ sera

$$(8) \quad A_{\psi} = 2 \int_0^{\psi} d\psi \int_0^{\frac{r}{2}} \frac{u du}{\cos 2\theta},$$

et, comme

$$\sin 2\theta = \frac{2u}{r},$$

il vient

$$A_{\psi} = 2 \int_0^{\psi} d\psi \int_0^{\frac{r}{2}} \frac{u du}{\sqrt{1 - \frac{4u^2}{r^2}}}.$$

Mais

$$\int \frac{u du}{\sqrt{1 - \frac{4u^2}{r^2}}} = \frac{r^2}{4} \sqrt{1 - \frac{4u^2}{r^2}} + c;$$

donc

$$A_{\psi} = \frac{1}{2} \int_0^{\psi} r^2 d\psi = A_{\psi};$$

ce qui démontre la propriété.

9. Quant à l'aire exacte A de l'hémicyclide, si l'on représente par γ l'angle que fait, avec le plan des XY , le plan tangent mené en un quelconque m de ses points, on aura

$$A = 2 \int_0^{\psi} d\psi \int_0^r \frac{u du}{\cos \gamma} = 2 \int_0^{\psi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2},$$

formule dans laquelle r et dr devront, avant tout calcul, être remplacés par leur valeur en fonction de ψ . On voit après cela que la première des intégrations à effectuer, celle par rapport à θ , dépend déjà des fonctions elliptiques, ce qui justifie ce que nous avons fait pressentir au n° 7 des complications inhérentes au calcul d'une aire semblable.

10. Il est essentiel d'observer, dès à présent, que si le mode de transformation adopté altère l'expression finie de l'aire de la surface, il n'en sera pas de même de l'expression du volume, puisque la somme des éléments solides que l'on néglige est infiniment petite par rapport à ce volume lui-même.

11. THÉORÈME II. — *La portion de volume du cylindre droit circonscrit à une hémicyclide, comprise entre cette dernière surface et sa projection sur le plan horizontal, est exactement le quart de l'onglet correspondant, si on limite le cylindre à la courbe des contacts; elle en est la moitié si l'on n'arrête le cylindre qu'au conoïde que forment les tangentes horizontales de l'hémicyclide.*

En effet, le volume d'angle ψ de l'hémicyclide a pour expres-

sion

$$(9) \quad V = \frac{1}{3} \int_0^\psi d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{12} \int_0^\psi r^3 d\psi.$$

D'autre part, celui du cylindre circonscrit limité à la courbe de contact est

$$(10) \quad U = \int_0^\psi d\psi \int_0^{\frac{r}{2}} z u du,$$

avec la condition

$$u^2 = z(r - z).$$

Résolvant par rapport à z et substituant dans l'expression de U la plus petite racine, il vient par intégration

$$U = \frac{1}{48} \int_0^\psi r^3 d\psi = \frac{1}{4} V.$$

Doublant enfin le résultat, puisque la courbe des contacts est une ligne diamétrale, on aura le volume total du cylindre extérieur à l'onglet et arrêté au conoïde qui en forme la base supérieure, c'est-à-dire $\frac{1}{2}V$.

C. Q. F. D.

Ces deux théorèmes constituent une haute généralisation des théorèmes d'Archimède relatifs au rapport qui existe entre la sphère et son cylindre circonscrit.

12. THÉORÈME III. — *La transformée par rayons vecteurs réciproques de toute hémicyclide est un conoïde parallèle à celui que forment ses tangentes horizontales.*

On le démontre sans peine en se souvenant que l'inverse d'une circonférence qui passe par le pôle d'inversion est une droite.

III.

Application des théorèmes précédents à l'indicatrice convexe de courbure d'une pseudo-surface.

13. Aux trois variétés (γ) de l'indicatrice plane de courbure correspondent, en coordonnées polaires et rectangulaires, les trois

hémicyclides

$$(11) \quad \begin{cases} \rho = \left(\frac{\cos^2 \psi}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \psi}{R_2^2} \right) \cos \theta, \\ \rho = \left(\frac{\cos^2 \psi}{R_1^2} - \frac{\sin^2 \psi}{R_2^2} \right) \cos \theta, \\ \rho = \frac{\cos^2 \psi}{R_1^2} \cos \theta, \end{cases}$$

$$(11') \quad \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{(R_2^2 X^2 + R_1^2 Y^2)Z}{R_1^2 R_2 (X^2 - Y^2)}, \\ X^2 + Y^2 - Z^2 = \frac{(R_2^2 X^2 - R_1^2 Y^2)Z}{R_1^2 R_2 (X^2 + Y^2)}, \\ X^2 + Y^2 - Z^2 = \frac{X^2 Z}{R_1 (X^2 - Y^2)}. \end{cases}$$

Ce sont trois surfaces fermées. Dans la première, les diamètres des sections normales varient entre un maximum $\frac{1}{R_1}$ et un minimum $\frac{1}{R_2}$. Dans la seconde, les plans verticaux, conduits suivant les tangentes à l'origine de l'indicatrice plane correspondante, lui sont tangents et la divisent en quatre parties symétriques deux à deux et situées de part et d'autre du plan horizontal. Enfin la troisième surface dérive de la seconde en ce que les plans tangents dont on vient de parler coïncident.

On peut vérifier, à l'aide de la formule (8), qu'une fois transformées ou, pour mieux dire, *sphérisées*, ces surfaces sont bien équivalentes aux indicatrices planes (7).

IV. *Volumes indicateurs*. — Les volumes des indicatrices convexes (11) étant chacun le lieu géométrique de toutes les composantes orthogonales des courbures des diverses sections normales faites autour du point M dans la surface F_x représentent par là même (nous ne disons pas mesurent) la courbure de la surface en ce point.

Parcourons successivement ces volumes : leurs expressions sont intégrables :

1° Le volume de la première des indicatrices (11), calculé au moyen de la formule (9), a pour expression

$$V = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_1^2} \right).$$



2° En ce qui concerne le second, comme l'intégrale qui l'exprime change de signe dans les directions $\tan \psi_1 = \pm \sqrt{\frac{R_2''}{R_1''}}$ qui sont celles des tangentes à l'origine, il faut user de l'intégrale dédoublée

$$\frac{1}{3} \int_0^{\psi_1} r^3 d\psi - \frac{1}{3} \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} r^3 d\psi.$$

En posant, pour plus de symétrie,

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\pi}{4} + \psi'_1, \\ P &= \frac{1}{144} \left(\frac{3.5}{R_1''^2} - \frac{2.7}{R_1'' R_2''} + \frac{3.5}{R_2''^2} \right) \frac{1}{\sqrt{R_1'' R_2''}}, \\ Q &= \frac{1}{48} \left(\frac{5}{R_1''^2} + \frac{2}{R_1'' R_2''} + \frac{5}{R_2''^2} \right) \left(\frac{1}{R_1''} - \frac{1}{R_2''} \right), \end{aligned}$$

on trouve, pour le volume total,

$$V_2 = 2P + 2Q_1 \psi'_1,$$

et, pour les volumes partiels,

$$\begin{aligned} V'^2 &= P + Q \left(\frac{\pi}{4} + \psi'_1 \right), \\ V''^2 &= P - Q \left(\frac{\pi}{4} - \psi'_1 \right); \end{aligned}$$

le premier étant situé au-dessus du plan horizontal et le second au-dessous.

Ces divers résultats se simplifient singulièrement lorsque $R_1'' = R_2''$, ce qui est le cas (le signe — ayant été explicité) des *pseudo-surfaces minima*.

On a alors

$$V'^2 = V''^2 = P = \frac{1}{9R_1''^3},$$

valeur que l'on peut du reste vérifier directement en calculant l'intégrale correspondante

$$\frac{1}{3R_1''^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 2\psi d\psi.$$

3^o Le troisième volume se tire de l'un quelconque des deux premiers en y faisant $R_2'' = \infty$. On trouve

$$V_3 = \frac{5}{96} \frac{\pi}{R_1^3}.$$

15. Aux volumes des hémicyclides on peut substituer équivalamment ceux des *cylindres indicateurs* correspondants (n^o 11), puisque, arrêtés à la courbe de contact, ils sont le quart des premiers. C'est donc au même titre qu'eux qu'ils peuvent servir à *représenter* la courbure au point M.

Il est à remarquer que la base de ces cylindres est homothétique à l'indicatrice plane de MM. Bourget et Housel et, de plus, qu'elle en vaut le quart. On peut donc, pour éviter ce que la construction de celle-ci a d'artificiel, s'en tenir à la considération de ces bases.

16. *Propriétés diverses.* — Nous ferons observer avant tout que ce qui suit n'est applicable qu'au cas où l'indicatrice de la surface F_μ est elliptique.

I. Si l'on retranche de l'aire $A_{v_1} = A_{\eta_1}$ de la première des indicatrices convexes transformée, l'aire A_σ de la sphère dont le rayon $\frac{1}{4} \left(\frac{1}{R_1''} + \frac{1}{R_2''} \right)$ est la moitié de la courbure sphérique au point M, on trouve, pour l'excès relatif de la première de ces surfaces sur la seconde :

$$\varepsilon = \frac{A_{v_1} - A_\sigma}{A_\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_2'' - R_1''}{R_1'' + R_2''} \right)^2.$$

D'autre part, la comparaison des volumes correspondants (que le premier soit transformé ou non) donne aussi

$$\varepsilon' = \frac{V_1 - V_\sigma}{V_\sigma} = \frac{3}{2} \left(\frac{R_2'' - R_1''}{R_1'' + R_2''} \right)^2.$$

On en déduit cette relation simple

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{1}{3}.$$

II. Considérons la courbe infinitésimale

$$(\lambda) \quad d\lambda = \frac{(R_2'' - R_1'') \sin \psi \cos \psi}{\sqrt{R_1''^2 \sin^2 \psi + R_2''^2 \cos^2 \psi}} ds.$$

C'est la projection sur le plan des XY de la ligne de *striction axiale* (I, n° 28) des génératrices du pinceau [MN] des (vraies) normales de la surface F_μ . Or, si l'on calcule le rapport de son aire à celle du cercle infinitésimal de rayon ds , directrice du pinceau, on trouve

$$\frac{\Omega_2}{\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_2'' - R_1''}{R_1'' + R_2''} \right)^2 = \varepsilon.$$

III. De même, si l'on cherche le volume compris entre la courbe (λ) et la surface conoïdale formée par les plus courtes distances IK, puis que l'on compare ce volume à celui d'un cylindre de révolution qui aurait pour base le cercle de rayon ds et une hauteur égale à $\frac{R_1'' R_2''}{R_1'' + R_2''} + \frac{1}{4} (R_1'' + R_2'')$, on reconnaît que leur rapport est, lui aussi, égal à ε .

17. Hâtons-nous d'ajouter que les calculs d'intégration qui précèdent seraient bien moins simples si, au lieu de considérer le pinceau de normales [MN] de F_μ , nous avions pris le pinceau de pseudo-normales correspondant. Le radical qui figure dans l'équation (λ) n'eût pas été alors indépendant des courbures alternantes $\frac{1}{P_1}$ et $\frac{1}{P_2}$ des lignes coordonnées actuellement tangentes aux axes de l'indicatrice; car si, dans ce cas, on a généralement $\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} = 0$ pour tout pinceau de pseudo-normales circumaxial de MN, on n'a $\frac{1}{P_1} = 0$ et $\frac{1}{P_2} = 0$ que pour le seul pinceau des vraies normales de la surface F_μ .

IV.

Application à divers lieux géométriques complémentaires relatifs à la courbure de la surface auxiliaire F_μ .

18. Au lieu de rabattre sur le plan horizontal, ainsi que nous l'avons fait au n° 6, les inverses $\frac{1}{r''}$ ou $\frac{1}{r''}$ des rayons de courbure des

sections normales de la surface F_μ , rabattons ces rayons eux-mêmes; nous aurons les trois courbes

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \psi}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \psi}{R_2^2}, \\ \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \psi}{R_1^2} - \frac{\sin^2 \psi}{R_2^2}, \\ \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \psi}{R_1^2}. \end{cases}$$

On en conclut pour les hémicyclides correspondantes, c'est-à-dire, d'après le théorème de Meusnier, pour le lieu des centres de courbure de toutes les sections normales ou obliques faites autour du point M dans la surface F_μ ,

$$(13) \quad \begin{cases} \rho = \frac{R_1^* R_2^*}{R_2^* \cos^2 \psi + R_1^* \sin^2 \psi} \cos \theta, \\ \rho = \frac{R_1^* R_2^*}{R_2^* \cos^2 \psi - R_1^* \sin^2 \psi} \cos \theta, \\ \rho = \frac{R_1^*}{\cos^2 \psi} \cos \theta, \end{cases}$$

$$(13') \quad \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{R_1^* R_2^* (X^2 + Y^2) Z}{R_2^* X^2 + R_1^* Y^2}, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{R_1^* R_2^* (X^2 + Y^2) Z}{R_2^* X^2 - R_1^* Y^2}, \\ X^2 - Y^2 + Z^2 = \frac{R_1^* (X^2 + Y^2) Z}{X^2}. \end{cases}$$

La première de ces surfaces est fermée. Les deux dernières ont des nappes infinies : l'une, dans les directions asymptotiques $\tan \psi_1 = \sqrt{\frac{R_2^*}{R_1^*}}$; l'autre, dans la direction $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$.

A ces surfaces s'en rattachent d'autres qui leur sont homothétiques et que l'on pourrait qualifier de *surfaces de courbure*, puisqu'elles sont le lieu des *cercles* de courbure de toutes les sections normales faites autour du point M. Comme on les obtient en doublant les rayons vecteurs des précédentes, il suffira de s'occuper de celles-ci.

19. 1° L'application des deux premiers théorèmes généraux d'

§ II nous donne, pour le premier cas,

$$A'_{0,1} = \pi \left(\frac{R'_1 + R'_2}{2} \right) \sqrt{R'_1 R'_2} \text{ (aire d'une ellipse),}$$

$$V'_1 = \frac{\pi}{48} (3R'_1 + 2R'_1 R'_2 + 3R'_2) \sqrt{R'_1 R'_2}.$$

Lorsque $R'_1 = R'_2$, c'est-à-dire, quand le point M est un *ombilic* pour chacun des points de la surface F_μ , on retrouve l'expression connue de la surface ou du volume de la sphère de rayon R'_1 .

2° Quant à l'aire transformée et au volume de la seconde surface, comme ils deviennent infinis pour $\psi = \psi_1$, il n'y a lieu que d'en calculer un fuseau ou un onglet d'angle inférieur à cette limite. On trouve ainsi, pour l'aire transformée du fuseau,

$$8A'_{0,1} = \frac{R'_1 R'_2 (R'_1 + R'_2) \sin^2 \psi}{R'_2 \cos^2 \psi - R'_1 \sin^2 \psi} + (R'_1 - R'_2) \sqrt{R'_1 R'_2} L \left(\frac{R'_2 \cos \psi + R'_1 \sin \psi}{R'_2 \cos \psi - R'_1 \sin \psi} \right).$$

Le cas de $R'_1 = R'_2$, correspondant aux pseudo-surfaces minima, est particulièrement intéressant.

On constate d'abord que la limite du dernier terme de $A'_{0,1}$ est zéro. Il vient ensuite

$$A'_{0,1} = \frac{R_1'^2}{4} \tan^2 \psi.$$

Ceci fait voir que, dans le cas actuel, l'aire totale de la surface que nous considérons est, au point M, la même que celle de la bande du plan horizontal comprise entre deux parallèles équidistantes de l'origine de la quantité R'_1 .

Passant au volume de l'onglet correspondant à $\psi < \psi_1$, et posant, pour abréger,

$$P' = [R'_2 (5R'_1 - 3R'_2) \cos^2 \psi + R'_1 (5R'_2 - 3R'_1) \sin^2 \psi] \frac{R'_1 R'_2 (R'_1 + R'_2) \sin^2 \psi}{(R'_2 \cos^2 \psi - R'_1 \sin^2 \psi)^2},$$

$$Q' = (3R_1'^2 - 2R'_1 R'_2 + 3R_2'^2) \sqrt{R'_1 R'_2} L \left(\frac{R'_2 \cos \psi + R'_1 \sin \psi}{R'_2 \cos \psi - R'_1 \sin \psi} \right),$$

on a la relation

$$192 V'_2 = P' + Q'.$$

Lorsque $R'_1 = R'_2$, il vient

$$V'_2 = \frac{R_1'^3}{48} \left[\frac{\tan^2 \psi}{\cos^2 \psi} + L \tan \left(\frac{\pi}{4} + \psi \right) \right].$$

1

1

1

1

1



1

1

que forment les tangentes horizontales de la première des indicatrices convexes (11'), le module de la transformation étant l'unité.

Quand ce module devient égal à $R_1'' R_2''$, l'équation de la transformée devient

$$(14) \quad Z = \frac{R_2'' X^2 + R_1'' Y^2}{X^2 + Y^2}.$$

C'est le conoïde de *striction axiale* (I, n° 29) du pinceau [MN] des normales de la surface F_μ .

Dans ce dernier cas, l'intersection des deux surfaces appartient à la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R_1'' R_2'',$$

et sa projection sur le plan horizontal est la courbe

$$r^2 = (R_2'' - R_1'')(R_1'' \sin^2 \psi - R_2'' \cos^2 \psi).$$

2° Revenons aux indicatrices convexes de courbure (11) ou (11'). Comme l'on a semblablement $MC \cdot M\gamma = 1$, la transformée par rayons réciproques de la première des surfaces (11') est le conoïde

$$Z = \frac{R_1'' R_2'' (X^2 + Y^2)}{R_2'' X^2 + R_1'' Y^2},$$

lieu des tangentes horizontales de la première des surfaces (13'), la constante étant égale à l'unité.

Lorsque cette constante devient égale à $\frac{1}{R_1'' R_2''}$, on a le conoïde

$$Z = \frac{X^2 + Y^2}{R_2'' X^2 + R_1'' Y^2},$$

qui ne diffère que par le changement de Z en $\frac{1}{Z}$ du conoïde (14).

Ici l'intersection des surfaces a lieu sur la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{1}{R_1'' R_2''},$$

et sa projection sur le plan horizontal est la courbe

$$r^2 = \left(\frac{1}{R_1''} - \frac{1}{R_2''} \right) \frac{R_1'' \sin^2 \psi - R_2'' \cos^2 \psi}{(R_1'' \sin^2 \psi + R_2'' \cos^2 \psi)^2}.$$

Des considérations du même genre seraient applicables à la *déviatrice* dont nous avons parlé au n° 5, mais sans utilité pour tout ce qui concerne du moins la courbure des surfaces ou des pseudo-surfaces en chacun de leurs points.

*Démonstration élémentaire d'un théorème énoncé
par M. E. Catalan ⁽¹⁾; par M. BERDELLÉ.*

Tout multiple de 8 est la somme de 8 carrés impairs.

Un multiple effectif de 8 est de la forme

$$8 + 8n;$$

on sait que l'on peut écrire

$$n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2;$$

or

$$a^2 = \frac{a^2 - a}{2} + \frac{a^2 + a}{2},$$

donc

$$8a^2 = (4a^2 - 4a) + (4a^2 + 4a);$$

d'où l'on conclut facilement

$$\begin{aligned} 8 + 8n = &+ (1 + 4a^2 - 4a) + (1 + 4a^2 + 4a) \\ &+ (1 + 4b^2 - 4b) + (1 + 4b^2 + 4b) \\ &+ (1 + 4c^2 - 4c) + (1 + 4c^2 + 4c) \\ &+ (1 + 4d^2 - 4d) + (1 + 4d^2 + 4d), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

On voit de plus que les huit nombres impairs se divisent en couples de deux nombres impairs consécutifs

$$2a - 1, \quad 2a + 1, \quad \dots$$

Toutefois, si k des nombres a, b, c, d sont nuls, il y aura k couples de carrés qui, au lieu d'être les carrés de deux impairs consécutifs, seront tous les deux égaux à 1.

Sur une propriété des surfaces minima;
par M. E. GOURSAT.

Considérons une surface minima S , dont l'élément linéaire est donné par la formule

$$(1) \quad ds^2 = R(du^2 + dv^2),$$

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société mathématique*, vol. XVI, p. 129.

tandis que l'élément linéaire de la représentation sphérique a pour expression

$$(2) \quad d\sigma^2 = \frac{1}{R} (du^2 + dv^2);$$

R désigne le rayon de courbure principal et les lignes de courbure de la surface ont pour équations

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}$$

(voir DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, p. 312). Sur la normale en un point quelconque M_0 de la surface minima portons, de part et d'autre du pied de la normale, deux longueurs égales M_0M_1 , M_0M_2 , variant d'une manière continue quand on se déplace sur la surface S. Les deux points M_1 , M_2 décrivent deux surfaces, S_1 , S_2 , dont il est aisé d'avoir l'élément linéaire. On aura, par exemple, en désignant par λ la longueur M_0M_1 ,

$$(3) \quad \begin{cases} ds_1^2 = \frac{(\lambda - R)^2 du^2 + (\lambda + R)^2 dv^2}{R} + d\lambda^2, \\ ds_2^2 = \frac{(\lambda + R)^2 du^2 + (\lambda - R)^2 dv^2}{R} + d\lambda^2; \end{cases}$$

Les éléments superficiels dA_1 , dA_2 de ces deux surfaces auront de même pour expressions

$$\begin{cases} dA_1^2 = \left[\left(\frac{\lambda^2 - R^2}{R} \right)^2 + \frac{(\lambda + R)^2}{R} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} \right)^2 + \frac{(\lambda - R)^2}{R} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v} \right)^2 \right] du^2 dv^2, \\ dA_2^2 = \left[\left(\frac{\lambda^2 - R^2}{R} \right)^2 + \frac{(\lambda + R)^2}{R} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v} \right)^2 + \frac{(\lambda - R)^2}{R} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} \right)^2 \right] du^2 dv^2. \end{cases}$$

Pour que ces éléments superficiels soient identiques, il faut et il suffit que l'on ait

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} \right)^2 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v} \right)^2$$

ou

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \pm \frac{\partial \lambda}{\partial v},$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \varphi(u + v) \quad \text{ou} \quad \lambda = \varphi(u - v),$$

φ désignant une fonction arbitraire. En remarquant maintenant que les équations

$$u + v = \text{const.}, \quad u - v = \text{const.}$$

représentent les deux systèmes de lignes asymptotiques de la surface, on est conduit au théorème suivant :

Étant donnée une surface minima quelconque, sur chaque normale on porte, à partir du pied M_0 de la normale et de part et d'autre de ce point, deux longueurs égales M_0M_1 et M_0M_2 , la longueur M_0M_1 restant constante quand on se déplace suivant une ligne asymptotique de l'un des systèmes et variant suivant une loi quelconque, quand on passe d'une ligne asymptotique à une autre du même système; les points M_1, M_2 décrivent deux surfaces S_1, S_2 , telles qu'un pinceau de normales à la surface S découpe sur ces deux surfaces des aires équivalentes.

On peut déduire de cette propriété la solution de certains problèmes de déblais et de remblais.

Prenons une portion finie S de surface minima sans point singulier et formons, comme il vient d'être expliqué, deux portions finies de surface S_1 et S_2 ; si l'on suppose ces deux surfaces S_1 et S_2 comprises tout entières à l'intérieur des deux nappes de la surface, lieu des centres de courbure principaux de S , les normales à la surface S permettront d'effectuer le déblai de S_1 sur S_2 et fourniront le *minimum absolu* du travail, pourvu que la portion S de surface soit suffisamment petite [voir APPELL, *Mémoire sur les déblais et les remblais* (*Journal des Savants étrangers*, t. XXIX, p. 15)].

Sur un déterminant remarquable; par C.-A. LAISANT.

Soit le déterminant

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots & \dots & a_m \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

Il est facile de démontrer que ce déterminant est identique au polynôme entier

$$(2) \quad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m = f(x).$$

En effet, si on le développe suivant les éléments de la première colonne, on a

$$a_0 \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots & \dots & a_m \\ -1 & x & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

Le premier de ces deux déterminants se réduit évidemment au terme de la diagonale x^m , et le second est identiquement de même forme que (1), mais compte un élément de moins par côté. Si donc la propriété est établie pour le déterminant de $(m-1)^2$ éléments, elle le sera, par cela même, pour celui de m^2 éléments. Or, pour deux éléments,

$$\begin{vmatrix} a_{m-1} & a_m \\ -1 & x \end{vmatrix},$$

elle est évidente, ce qui démontre l'identité des deux expressions (1) et (2).

Si, dans le déterminant (1), on remplace tous les éléments -1 par $-y$, ce qui donne

$$(1') \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots & \dots & a_m \\ -y & x & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -y & x & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -y & x & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -y & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -y & x \end{vmatrix},$$

on aura une expression identique à

$$(2') \quad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + a_2 x^{m-2} y^2 + \dots + a_{m-1} x y^{m-1} + a_m y^m = \varphi(x, y).$$

Cette remarque très simple permet donc d'écrire, sous forme de déterminant, soit un polynôme entier en x , soit une forme binaire de degré quelconque.

La loi de formation des dérivées du déterminant (1) est assez intéressante. Si, au-dessous des termes de la première ligne, on écrit successivement 0, 1, 2, 3, ... de droite à gauche, de manière à former le Tableau suivant :

a_0	a_1	a_2	...	a_{m-2}	a_{m-1}	a_m
m	$m-1$	$m-2$	...	2	1	0
$m-1$	$m-2$	$m-3$	...	1	0	
$m-2$	$m-3$	$m-4$	...	0		
.....			...	..		

et si l'on remplace cette première ligne par les produits

1° des éléments des 2 premières lignes						
2°	•	3	•			
.....						
p°	•	$p-1$	•			
.....						

de ce Tableau.

on aura successivement, en supprimant chaque fois la dernière ligne et la dernière colonne du déterminant obtenu.

$$f(x), f'(x), \dots, f^{(p)}(x), \dots$$

Si l'on faisait la même opération, en conservant seulement le même nombre d'éléments, au lieu de supprimer chaque fois une ligne et une colonne, on aurait

$$xf(x), x^2f'(x), \dots, x^pf^{(p)}(x), \dots$$

Une règle analogue permet de former les dérivées de la forme binaire (1) ou (2). On écrira le Tableau

Y	1							
		0	1	1	...	$m-3$	$m-2$	$m-1$
X	1	0	1	•	3	...	$m-2$	$m-1$
		a_0	a_1	a_2	a_3	...	a_{m-2}	a_{m-1}
X	1	m	$m-1$	$m-2$	$m-3$	...	2	1
		$m-1$	$m-2$	$m-3$	$m-4$	...	1	0
X	1							
								

On comptera n lignes, à partir de celle des a , dans la région (X), p lignes dans la région (Y). Formant alors le produit des éléments qui se trouvent dans une même verticale, et prenant ce résultat pour première ligne du déterminant, en supprimant au fur et à

mesure autant de colonnes, à gauche ou à droite, et autant de lignes au-dessous de celle des a , ou au bas du déterminant, qu'il y a de produits égaux à zéro, on a

$$\frac{d^{n+p}\varphi(x,y)}{dx^n dy^p}.$$

En ne supprimant ni lignes, ni colonnes, on aurait

$$x^n y^p \frac{d^{n+p}\varphi(x,y)}{dx^n dy^p}.$$

Sur les nombres de Bernoulli; par M. MAURICE D'OCAGNE.

Deux Notes récentes ⁽¹⁾ ayant attiré l'attention de la *Société mathématique* sur les nombres de Bernoulli, je saisisrai cette occasion pour rappeler et, en même temps, pour simplifier l'expression générale explicite de ces nombres ⁽²⁾ que j'ai donnée dans mon Mémoire : *Sur une classe de nombres remarquables*.

Ces nombres remarquables, que je désigne par la notation K_m^p et que je définis par les relations

$$\begin{aligned} K_m^1 &= 1, & K_m^m &= 1, \\ K_m^p &= p K_{m-1}^p + K_{m-1}^{p-1}, \end{aligned}$$

relations qui se traduisent par un triangle arithmétique analogue à celui de Pascal, ont l'expression générale suivante, obtenue dans mon Mémoire [formule (5')],

$$(1) \quad K_m^p = \frac{p^m - C_p^1(p-1)^m + C_p^2(p-2)^m - \dots + (-1)^{p-1} C_p^{p-1} 1^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}.$$

Cela dit, je rappellerai, en quelques mots, la marche que j'ai suivie pour parvenir à la formule qui donne explicitement les nombres de Bernoulli.

Et tout d'abord, la définition de ces nombres à laquelle je me suis conformé est celle qui résulte de la considération du dévelop-

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société Mathématique*, t. XVI, pp. 144 et 157.

⁽²⁾ *American Journal of Mathematics*, t. IX, p. 380.

pement (1)

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1} x + \frac{B_2}{1.2} x^2 + \dots + \frac{B_m}{1.2 \dots m} x^m + \dots,$$

et qui donne

$$B_0 = 1, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad \dots, \\ B_1 = \frac{1}{2}, \quad B_{2n+1} = 0.$$

Avec cette définition B_m est le coefficient de p dans le développement de $1^m + 2^m + \dots + p^m$ suivant les puissances de p . C'est la remarque sur laquelle je me suis appuyé.

Je vais indiquer maintenant le rapprochement des différents passages de mon Mémoire d'où résulte la démonstration de ma formule.

Je commence par faire voir [n° 14, formule (23)] qu'en posant

$$Y_1 = \frac{d}{dx} xY, \quad Y_2 = \frac{d}{dx} xY_1, \quad Y_3 = \frac{d}{dx} xY_2, \quad \dots,$$

on a

$$Y_m = K_{m+1}^1 Y + K_{m+1}^2 xY' + \dots + K_{m+1}^m x^m Y^{(m)};$$

puis, appliquant cette formule à la fonction $Y = x^p$, pour laquelle un calcul direct donne $Y_m = (p+1)^m x^p$, j'obtiens [n° 15, formule (24)],

$$(p+1)^m = K_{m+1}^1 + A_p^1 K_{m+1}^2 + \dots + A_p^m K_{m+1}^m,$$

A_p^m étant le nombre des arrangements de p objets m à m . Après remplacement de m par $m-1$, cette formule donne (n° 15)

$$1^{m-1} = K_{m+1}^1, \\ 2^{m-1} = K_{m+1}^1 + A_p^1 K_{m+1}^2, \\ \dots \dots \dots \\ p^{m-1} = K_{m+1}^1 + A_{p-1}^1 K_{m+1}^2 + \dots + A_{p-1}^{m-1} K_{m+1}^m.$$

(1) Quand on définit les nombres de Bernoulli au moyen du développement

$$\frac{x}{e^x - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1} x + \frac{B_2}{1.2} x^2 + \dots + \frac{B_m}{1.2 \dots m} x^m + \dots,$$

ils ont les mêmes valeurs que ci-dessus, sauf B_1 qui est alors égal à $-\frac{1}{2}$. La généralité de la formule (1) de la présente Note est un argument en faveur de la définition ici adoptée.

Additionnant ces égalités après avoir multiplié la première par 1, la deuxième par 2, ..., la $p^{\text{ième}}$ par p , j'ai [n° 27, formule (47)]

$$1^m + 2^m + \dots + p^m = 1! C_{p+1}^1 K_m^1 + 2! C_{p+1}^2 K_m^2 + \dots + p! C_{p+1}^p K_m^p.$$

On tire aisément de là, pour le coefficient de p , qui est, comme nous l'avons dit, B_m [n° 29, formule (54)],

$$(2) \quad B_m = \frac{K_m^1}{2} - \frac{1! K_m^2}{3} + \frac{2! K_m^3}{4} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{(m-1)! K_m^m}{m+1}.$$

Telle est l'expression à laquelle je me suis borné dans mon **Mémoire**; mais si, tirant maintenant de (1) les valeurs de $K_m^1, K_m^2, \dots, K_m^m$ en fonction de m , je porte ces valeurs dans (2), je fais disparaître les nombres particuliers sur les propriétés desquels était basée mon analyse, et j'obtiens, après quelques réductions dont on retrouvera aisément le détail, l'expression suivante, remarquable par sa simplicité,

$$(3) \quad B_m = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \left[(-1)^{\mu+1} \mu^{m-1} \sum_{\lambda=\mu}^{\lambda=m} \frac{C_{\lambda-1}^{\mu-1}}{\lambda+1} \right],$$

où C_p^q est le nombre des combinaisons de p objets q à q . De cette façon, les nombres de Bernoulli se trouvent exprimés, et très simplement, au moyen des coefficients du binôme. Pour m impair, B_m étant nul, la formule (3) donne alors une propriété particulière de ces derniers nombres.

Sur les courbes de M. Bertrand; par M. CH. BIOCHE.

On sait que la détermination d'une courbe de M. Bertrand, c'est-à-dire d'une courbe dont les normales principales sont normales principales d'une seconde courbe, se ramène aux quadratures. Les formules qui donnent la solution de ce problème sont susceptibles d'une interprétation qui me paraît curieuse.

1. M. Serret a montré dans une Note (citée par M. Liouville dans son édition de Monge, note I), que les différentielles des coordonnées des points d'une courbe peuvent s'exprimer par l'un des

systèmes

$$(1) \quad \frac{dx}{\sin \theta} = \frac{dy}{-\cos \theta} = \frac{dz}{\varphi(\theta)} = R \frac{\sqrt{1 + \varphi'^2 + \varphi''^2}}{(1 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta,$$

$$(2) \quad \frac{dx}{\sin \theta} = \frac{dy}{-\cos \theta} = \frac{dz}{\varphi(\theta)} = T \frac{\varphi + \varphi''}{1 + \varphi'^2 + \varphi''^2} d\theta,$$

R et T étant les rayons de courbure et de torsion de la courbe considérée, et $\varphi(\theta)$ une fonction arbitraire de la variable indépendante θ ; les accents indiquent des dérivées prises par rapport à θ .

Entre les courbures d'une courbe de M. Bertrand existe une relation que l'on peut écrire, α et ψ étant des constantes,

$$(3) \quad \frac{1}{R} - \frac{\cot \psi}{T} = \frac{1}{\alpha}.$$

On déduit des équations précédentes, par combinaison,

$$dx \left(\frac{1}{R} - \frac{\cot \psi}{T} \right) = \left[\frac{\sqrt{1 + \varphi'^2 + \varphi''^2}}{(1 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}} - \cot \psi \frac{\varphi + \varphi''}{1 + \varphi'^2 + \varphi''^2} \right] \sin \theta d\theta,$$

et deux expressions analogues pour dy et dz , de sorte que les coordonnées des points d'une courbe de M. Bertrand se déterminent par

$$\frac{dx}{\sin \theta} = \frac{dy}{-\cos \theta} = \frac{dz}{\varphi(\theta)} = \alpha \left[\frac{\sqrt{1 + \varphi'^2 + \varphi''^2}}{(1 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}} - \cot \psi \frac{\varphi + \varphi''}{1 + \varphi'^2 + \varphi''^2} \right] d\theta.$$

2. Si l'on pose

$$(C) \quad \frac{dX_1}{\sin \theta} = \frac{dY_1}{-\cos \theta} = \frac{dZ_1}{\varphi(\theta)} = \alpha \frac{\sqrt{1 + \varphi'^2 + \varphi''^2}}{(1 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta,$$

$$(T) \quad \frac{dX_2}{\sin \theta} = \frac{dY_2}{-\cos \theta} = \frac{dZ_2}{\varphi(\theta)} = \alpha \frac{\varphi + \varphi''}{1 + \varphi'^2 + \varphi''^2} d\theta,$$

la courbe (C) dont les points auraient pour coordonnées (X_1, Y_1, Z_1) sera une courbe à courbure constante $\frac{1}{\alpha}$; et la courbe (T) dont les points auraient pour coordonnées (X_2, Y_2, Z_2) sera une courbe à torsion constante $\frac{1}{\alpha}$. Toute courbe (B) donnée par les équations

$$(B) \quad x = \alpha X_1 + \beta X_2, \quad y = \alpha Y_1 + \beta Y_2, \quad z = \alpha Z_1 + \beta Z_2,$$

α et β étant des constantes, sera une courbe de M. Bertrand dont les constantes seraient données par

$$a' = \alpha x, \quad \cot \psi' = -\frac{\beta}{\alpha}$$

et inversement, on voit que toute courbe de cette nature peut se représenter par les équations (B) lorsque les constantes α et β et la fonction φ sont convenablement choisies. Or ces dernières équations ont une analogie visible avec celles qui donnent les coordonnées des points d'une droite en fonction des coordonnées de deux de ses points; c'est ce qui conduit à l'interprétation annoncée.

3. Les équations

$$(B') \quad x = \frac{\alpha X_1 + \beta X_2}{\alpha + \beta}, \quad y = \frac{\alpha Y_1 + \beta Y_2}{\alpha + \beta}, \quad z = \frac{\alpha Z_1 + \beta Z_2}{\alpha + \beta}$$

représentent une courbe homothétique à la courbe (B) si l'on y considère α et β comme constantes; si, au contraire, $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2$ sont supposées constantes, ces équations représentent une droite D qui rencontre les courbes (C) et (T) en deux points M_1 et M_2 , correspondant à une même valeur de la variable θ . Le lieu des points qui divisent les segments, tels que $M_1 M_2$, dans un rapport constant, est une courbe de M. Bertrand.

La surface lieu des droites D est une développable. En effet, aux points M_1 et M_2 , les tangentes aux courbes (C) et (T) sont parallèles. Leurs coefficients directeurs étant proportionnels à

$$\sin \theta, \quad -\cos \theta, \quad \varphi(\theta),$$

il en est de même d'ailleurs pour la tangente à toute courbe décrite par un point M qui divise $M_1 M_2$ dans un rapport constant; il n'y a donc qu'un plan tangent pour chaque génératrice; ce qui montre que la surface est développable.

4. En résumé : on peut déterminer deux courbes, l'une à courbure, l'autre à torsion constante, de façon que les tangentes à ces courbes soient deux à deux parallèles. Sur la développable des plans déterminés par ces couples de tangentes les lieux des points qui divisent les génératrices dans un rapport constant sont des courbes de M. Bertrand.

On peut avoir toutes les courbes de cette nature en disposant de la fonction arbitraire dont dépendent les deux courbes à courbure et à torsion constante, ainsi que des valeurs absolues de leurs courbures constantes.

5. On peut obtenir les coordonnées de l'arête de rebroussement de la développable, dont il a été question, au moyen des intégrales qui expriment les coordonnées des points des courbes (C) et (T). Si sur une génératrice, correspondant à une valeur $\theta = \theta'$ de la variable indépendante, on prend le point M pour lequel on a

$$2 \frac{\sqrt{1 + \varphi^2 + \varphi'^2}}{(1 + \varphi^2)^{\frac{3}{2}}} + 3 \frac{\varphi + \varphi'}{1 + \varphi^2 + \varphi'^2} = 0,$$

les différentielles des coordonnées de la courbe de M. Bertrand qui passe par ce point deviennent nulles; ce point est donc sur l'arête de rebroussement. Les coordonnées des points de cette courbe sont donc données par

$$x = \frac{(\varphi + \varphi')(1 + \varphi^2)^{\frac{3}{2}} X_1 - (1 + \varphi^2 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}} X_2}{(\varphi + \varphi')(1 + \varphi^2)^{\frac{3}{2}} - (1 + \varphi^2 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et deux équations du même type donnant y et z .

Mouvement d'un point pesant sur une sphère. — Détermination, à l'aide des conditions initiales, des cas où le mobile quitte la sphère: par M. CHAILAN.

(Séance du 23 janvier 1889.)

Soient r , θ et z les coordonnées semi-polaires d'un point M, de masse m , placé sur la surface intérieure d'une sphère de rayon l , le plan des xy étant le plan horizontal passant par le centre, l'axe des z étant dirigé vers le bas.

Les équations du mouvement sur la sphère sont

$$(1) \quad dt = \frac{l dz}{\sqrt{\varphi(z)}}.$$

$$(2) \quad d\theta = \frac{cl dz}{(l^2 - z^2) \sqrt{\varphi(z)}}.$$

en posant

$$\varphi(z) = (2gz + c')(l^2 - z^2) - c^2,$$

les constantes étant données par

$$c^2 = (l^2 - z_0^2) \nu_0^2 \cos^2 \alpha_0, \quad c' = \nu_0^2 - 2gz_0.$$

Appelons α, β, γ les racines de $\varphi(z)$: nous savons que

$$(3) \quad \frac{z}{\varphi(z)} \left| \begin{array}{c} -\infty \\ +\infty \end{array} \right| \begin{array}{c} \gamma \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} -l \\ -c^2 \end{array} \begin{array}{c} \alpha \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} z_0 \\ \nu_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0 \end{array} \begin{array}{c} \beta \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} +l \\ -c^2 \end{array}.$$

Nous avons, pour la pression,

$$N = \frac{m}{l} (3gz + c');$$

cette pression sera nulle pour une valeur z_1 ,

$$z_1 = -\frac{c'}{3g}.$$

Cherchons les cas où z_1 sera compris entre les racines α et β , auxquels cas le point matériel quittera la sphère.

Pour que $\alpha < z_1 < \beta$, nous voyons, en nous reportant à (3), qu'il faut et il suffit que $-l < z_1$ ou

$$(4) \quad l > \frac{c'}{3g},$$

et que $\varphi(z_1) > 0$ ou

$$(5) \quad \frac{c'}{3} \left(l^2 - \frac{c'^2}{9g^2} \right) - c^2 > 0;$$

d'où

$$\cos^2 \alpha_0 < \frac{c'}{3(l^2 - z_0^2) \nu_0^2} \left(l^2 - \frac{c'^2}{9g^2} \right).$$

En supposant (4) satisfait :

I. Si $\frac{c'}{3(l^2 - z_0^2) \nu_0^2} \left(l^2 - \frac{c'^2}{9g^2} \right) - 1 > 0$, le mobile quittera *forcément* la sphère, c'est-à-dire quelle que soit la direction initiale.

II. Si $\frac{c'}{3(l^2 - z_0^2) \nu_0^2} \left(l^2 - \frac{c'^2}{9g^2} \right) - 1 < 0$, le mobile quittera *conditionnellement* la sphère, c'est-à-dire pour toutes les directions de la vitesse initiale supérieures à l'angle déterminé par

$$\cos^2 \alpha_0 = \frac{c'}{3(l^2 - z_0^2) \nu_0^2} \left(l^2 - \frac{c'^2}{9g^2} \right),$$

équation qui aura une racine si

$$(6) \quad c' > 0.$$

Le premier membre des deux inégalités considérées peut s'écrire

$$- \frac{\nu_0^2 + g z_0}{27 g^2 \nu_0^2 (l^2 - z_0^2)} [\nu_0^4 - 7 g z_0 \nu_0^2 + 2 g^2 (9 l^2 - 4 z_0^2)];$$

laissons de côté le dénominateur, qui est toujours positif, et décomposons le trinôme entre crochets, en remarquant que ses deux racines sont du signe de z_0 ,

$$(7) \quad -(\nu_0^2 + g z_0) \left[\nu_0^2 - \frac{g}{2} (7 z_0 + 3 \sqrt{9 z_0^2 - 8 l^2}) \right] \left[\nu_0^2 - \frac{g}{2} (7 z_0 - 3 \sqrt{9 z_0^2 - 8 l^2}) \right].$$

I. Cette expression (7) sera positive :

1° Si, en supposant $9 z_0^2 < 8 l^2$, nous avons

$$\nu_0^2 + g z_0 < 0,$$

cette inégalité implique $z_0 < 0$; alors (4) est forcément vérifié, car nous pouvons l'écrire

$$\nu_0^2 < g(3l + 2z_0).$$

2° Si, en supposant $9 z_0^2 > 8 l^2$:

(a) $z_0 < 0$, le trinôme a ses racines négatives, nous avons

$$\nu_0^2 + g z_0 < 0 :$$

l'inégalité (4) est encore satisfaite.

(b) $z_0 > 0$, alors $\nu_0^2 + g z_0$ est positif, nous avons

$$\frac{g}{2} (7 z_0 - 3 \sqrt{9 z_0^2 - 8 l^2}) < \nu_0^2 < \frac{g}{2} (7 z_0 + 3 \sqrt{9 z_0^2 - 8 l^2}) :$$

l'inégalité (4) est vérifiée, car $g(3l + 2z_0)$ est supérieur à la plus grande des racines du trinôme.

II. L'expression (7) sera négative :

1° Si, en supposant $9 z_0^2 < 8 l^2$, nous avons

$$\nu_0^2 + g z_0 > 0,$$

(a) $z_0 < 0$, la condition (4) et la précédente nous donnent

$$g(3l + 2z_0) > \nu_0^2 > -g z_0 :$$

l'inégalité (6) est forcément vérifiée.

(b) $z_0 > 0$, la condition $v_0^2 + g z_0 > 0$ est vérifiée d'elle-même, les inégalités (4) et (6) nous donnent

$$g(3l + 2z_0) > v_0^2 > 2gz_0.$$

2° Si, en supposant $9z_0^2 > 8l^2$:

(a) $z_0 < 0$, nous avons

$$v_0^2 + g z_0 > 0.$$

Cette condition, réunie avec (4), nous donne

$$g(3l + 2z_0) > v_0^2 > -g z_0 :$$

l'inégalité (6) est forcément vérifiée.

(b) $z_0 > 0$, nous avons pour v_0^2 des valeurs prises en dehors des racines du trinôme.

Mais (6) indique qu'il faut prendre

$$v_0^2 > 2gz_0;$$

or $2gz_0$ est inférieure à la plus petite racine; de plus, nous devons satisfaire à (4), de telle sorte que nous pouvons prendre

$$\frac{g}{2} (7z_0 - 3\sqrt{g z_0^2 - 8l^2}) > v_0^2 > 2gz_0$$

ou

$$g(3l + z_0) > v_0^2 > \frac{g}{2} (7z_0 + 3\sqrt{g z_0^2 - 8l^2}).$$

En résumé, si à l'origine :

I. Le mobile est au-dessus du plan des xy :

1° Il quittera forcément la sphère si

$$v_0^2 + g z_0 < 0;$$

2° Il quittera conditionnellement la sphère si

$$g(3l + 2z_0) > v_0^2 > -g z_0.$$

II. Le mobile est au-dessous du plan des xy , mais au-dessus du plan $z = \frac{2}{3}l\sqrt{2}$.

Il quittera conditionnellement la sphère si

$$g(3l + 2z_0) > v_0^2 > 2gz_0.$$

III. Le mobile est au-dessous du plan $z = \frac{2}{3} l\sqrt{2}$:

1° Il quittera forcément la sphère si

$$\frac{g}{2} (7z_0 + 3\sqrt{9z_0^2 - 8l^2}) > v_0^2 > \frac{g}{2} (7z_0 - 3\sqrt{9z_0^2 - 8l^2});$$

2° Il quittera conditionnellement la sphère si

$$\frac{g}{2} (7z_0 - 3\sqrt{9z_0^2 - 8l^2}) > v_0^2 > 2gz_0$$

ou si

$$g(3l + 2z_0) > v_0^2 > \frac{g}{2} (7z_0 + 3\sqrt{9z_0^2 - 8l^2}).$$

Remarquons que, dans tous les cas où c' est positif et, par suite, z_1 est négatif, le mobile quitte la sphère dans l'hémisphère supérieur. Dans le cas que nous venons d'établir, au mouvement sur la sphère succédera un mouvement sur une parabole située dans un plan vertical. Nous pouvons obtenir l'équation de cette parabole dans son plan.

Supposons que le plan des xz soit parallèle au plan osculateur en z_1 à la trajectoire sphérique, dont ρ est le rayon de courbure. Nous savons que ρ est aussi le rayon de courbure de la parabole, et le rayon du petit cercle de la sphère déterminé par le plan osculateur.

La parabole à axe vertical

$$(x - \alpha)^2 = 2p(z - \beta)$$

sera la trajectoire si nous exprimons qu'elle a un contact du deuxième ordre au point z_1 avec le cercle

$$x^2 + z^2 = \rho^2,$$

ce qui aura lieu si nous prenons

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(\rho - z_1^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2}, \\ \beta &= \frac{z_1(3l^2 - z_1^2)}{2\rho^2}, \\ n &= -\frac{z_1^3}{\rho^2}. \end{aligned}$$

Pour déterminer ρ , ne faisons plus d'hypothèse sur le plan

des zx ; le rayon de courbure en z_1 est donné par la formule

$$\frac{v^2}{\rho} = g \sin \alpha.$$

De la formule connue

$$v^2 = 2gz + c'$$

nous tirons, pour $z = z_1$,

$$v^2 = \frac{c'}{3}.$$

Nous savons que

$$\cos \alpha = \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}};$$

mais nous avons

$$r^2 + z^2 = l^2$$

et

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta;$$

d'où, en différentiant,

$$dx = -\frac{xz}{l^2 - z^2} dz - y d\theta,$$

$$dy = -\frac{yz}{l^2 - z^2} dz - x d\theta.$$

Ces formules, conjointement avec (1) et (2), nous donnent

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{xz}{l^2 - z^2} \frac{\sqrt{\varphi(z)}}{l} - \frac{cy}{l^2 - z^2}, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{yz}{l^2 - z^2} \frac{\sqrt{\varphi(z)}}{l} + \frac{cx}{l^2 - z^2}, \\ \frac{dz}{dt} = -\frac{\sqrt{\varphi(z)}}{l}; \end{cases}$$

d'où

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{(2gz + c')z^2 + c^2}{(2gz + c')l^2}};$$

faisons $z = z_1$,

$$\sin \alpha = \frac{1}{3gl} \sqrt{\frac{c'^3 + 27g^2c^2}{c'}},$$

d'où enfin

$$\rho = c'l \sqrt{\frac{c'}{c'^3 + 27g^2c^2}}.$$

Soit d la distance du plan de la parabole à l'axe des z : nous avons

$$d = \frac{3 g c l \sqrt{3}}{\sqrt{c'^2 + 27 g^2 c^2}}.$$

REMARQUE. — Si le mobile est lancé sous la direction initiale α_0 définie par l'équation

$$\cos^2 \alpha_0 = \frac{c'}{3(l^2 - z_0^2) v_0^2} \left(l^2 - \frac{c'^2}{9 g^2} \right),$$

le mobile ne quitte pas la sphère. En effet, cette égalité revient à

$$\varphi(z_1) = 0;$$

d'où

$$z_1 = \alpha.$$

Au point α , nous savons que la trajectoire sur la sphère a sa tangente horizontale; la parabole à axe vertical, qui a même rayon de courbure, a alors avec la sphère un contact de troisième ordre; elle est tout entière en dehors de la sphère : le point, ne pouvant, par hypothèse, traverser la sphère, restera sur cette surface.

Sur une propriété caractéristique des lignes géodésiques d'un cône; par M. X. ANTONARI (1).

On sait que les géodésiques d'un cône peuvent être considérées comme les arêtes de rebroussement des développables circonscrites à une sphère, et réciproquement; de sorte que la propriété dont il va être question est aussi une propriété caractéristique de ces arêtes de rebroussement. C'est même en envisageant les lignes géodésiques d'un cône comme les arêtes de rebroussement de développables circonscrites à une sphère que nous allons établir cette propriété.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point M d'une courbe gauche (C), arête de rebroussement d'une dévelop-

(1) J'avais achevé la rédaction de cette Note lorsque j'ai appris que M. Enneper s'était occupé du même sujet. Je n'ai, d'ailleurs, pas pu me procurer le travail du géomètre allemand.

pable circonscrite à la sphère S de rayon r ayant son centre à l'origine. Appelons, suivant l'habitude :

α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente en M à la courbe (C) ;
 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ceux de la normale principale;
 $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ ceux de la binormale.

Le plan osculateur en M à la courbe (C) étant tangent à la sphère S , x, y, z satisfont à la relation

$$(1) \quad \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = r.$$

Prenons comme variable indépendante l'arc s de la courbe (C) compté à partir d'une origine arbitraire, et différencions deux fois successivement les deux membres de la relation (1). L'emploi des formules de Serret conduit alors facilement aux expressions suivantes des coordonnées x, y, z du point M

$$\begin{aligned} x &= r(\alpha_1 - \theta \alpha), \\ y &= r(\beta_1 - \theta \beta), \\ z &= r(\gamma_1 - \theta \gamma), \end{aligned}$$

où θ désigne le rapport $\frac{\rho}{\tau}$ du rayon de courbure au rayon de torsion.

De ces relations on déduit

$$\begin{aligned} dx &= -r\alpha d\theta, \\ dy &= -r\beta d\theta, \\ dz &= -r\gamma d\theta, \end{aligned}$$

et enfin

$$ds^2 = r^2 d\theta^2.$$

Il suit de là que le rapport des deux courbures de la courbe (C) est une fonction linéaire et entière de l'arc s .

Réciproquement, toute courbe qui jouit de cette propriété peut être considérée comme l'arête de rebroussement d'une développable circonscrite à une sphère, ou, ce qui revient au même, comme une géodésique d'un cône.

Soit, en effet,

$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{s + s_0}{r},$$

r désignant une constante. De cette relation et des suivantes,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\alpha_1}{\rho}, \quad \frac{d\alpha_2}{ds} = \frac{\alpha_1}{\tau},$$

on déduit facilement l'équation

$$r \frac{d\alpha_2}{ds} - (s + s_0) \frac{dx}{ds} = 0.$$

Cette équation est identique à

$$x + r \frac{d\alpha_2}{ds} - x - (s + s_0) \frac{dx}{ds} = 0,$$

dont le premier membre est la dérivée exacte de $x + r\alpha_2 - (s + s_0)x$ par rapport à s . On en déduira donc

$$x + r\alpha_2 - x(s + s_0) = a,$$

et les équations analogues

$$y + r\beta_2 - \beta(s + s_0) = b,$$

$$z + r\gamma_2 - \gamma(s + s_0) = c.$$

Ces trois équations, multipliées respectivement par α_2 , β_2 , γ_2 et ajoutées membre à membre, donnent

$$\alpha_2(x - a) + \beta_2(y - b) + \gamma_2(z - c) + r = 0;$$

ce qui montre que la distance du point (a, b, c) au plan osculateur de la courbe est constante et égale à r et, par conséquent, que ce plan est constamment tangent à la sphère de centre (a, b, c) et de rayon r .

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante, qui fait l'objet de cette courte Note.

Dans toute géodésique d'un cône, le rapport $\frac{\rho}{\tau}$ du rayon de courbure au rayon de torsion est une fonction linéaire et entière de l'arc de la ligne géodésique, et, réciproquement, toute courbe qui jouit de cette propriété est une géodésique d'un cône.

Voici, du reste, la démonstration géométrique de la proposition et de sa réciproque.

Soit M' le point où le plan osculateur en M touche la sphère. Le lieu du point M' est une courbe sphérique (C') orthogonale aux droites MM' , de sorte que (C) est une développée de (C') .

Soient, d'autre part,

M_0, M'_0 un couple de points correspondants;

s l'arc $M_0 M$;

l la longueur MM' ;

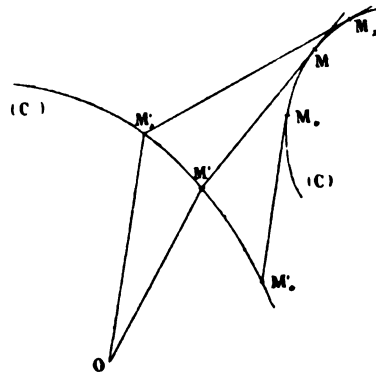
l_0 la longueur $M_0 M'_0$.

On sait que l'on a

$$s = l - l_0.$$

Ceci posé, déplaçons infiniment peu le point M en M_1 , et soit M'_1 le point correspondant sur la sphère O .

Fig. 1.



Puisque OM' est normal à l'arc $M'M'_1$, on a, dans le triangle $OM'M'_1$,

$$(2) \quad M'M'_1 = OM' \times \text{angle } M'OM'_1.$$

On peut maintenant considérer les deux tangentes MM' et $M_1M'_1$ comme se coupant en M , et alors le triangle $M'M'_1M$ donne

$$(3) \quad M'M'_1 = MM' \times \text{angle } M'MM'_1.$$

Mais l'angle $M'OM'_1$ est évidemment l'angle de deux binormales consécutives à la courbe (C); et de même $M'MM'_1$ est l'angle de deux tangentes consécutives à cette même courbe. On a donc

$$\widehat{M'OM'_1} = \frac{ds}{\tau},$$

$$M'MM'_1 = \frac{ds}{\rho}.$$

D'ailleurs $OM' = r$, et, en divisant membre à membre les relations (2) et (3), on obtient facilement

$$\frac{MM'}{r} = \frac{\rho}{\tau}$$

ou bien

$$\frac{l}{r} = \frac{\rho}{\tau} = \frac{s + l_0}{r}.$$

Ainsi le rapport du rayon de courbure au rayon de torsion est une fonction linéaire et entière de l'arc.

Réciproquement, si une courbe (C) jouit de cette propriété, elle est la développée d'une courbe sphérique et, par suite, l'arête de rebroussement d'une développable circonscrite à leur sphère.

Portons, en effet, sur la tangente en M à la courbe (C) la longueur $MM' = l = s + l_0$. Supposons, d'ailleurs, que, pour chaque point M de la courbe (C), on ait

$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{s + l_0}{r},$$

l_0 et x désignant des constantes. Le lieu du point M' est une trajectoire orthogonale (C') des génératrices de la développable engendrée par les tangentes à la courbe (C); celle-ci est dès lors une développée de (C'). Tout revient à prouver que (C') est une courbe sphérique. Considérons, en effet, deux génératrices voisines MM' , $M_1M'_1$ et menons les normales en M' et M'_1 à la développable dont (C) est l'arête de rebroussement. Comme (C') est ligne de courbure de cette développable, les normales se coupent en un point O.

Appelons λ la distance OM' . On a alors, comme plus haut,

$$\frac{MM'}{OM'} = \frac{\text{angle } M'O M'_1}{\text{angle } M'M M'_1}$$

ou

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{\rho}{\tau}.$$

Or on a aussi

$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{l}{r};$$

donc

$$\lambda = r = \text{const.}$$

La normalie développable, lieu de la droite M'O, est donc un

cône ayant son sommet en O, et la sphère de centre O et de rayon r touche tout le long de (C') la développable lieu de MM'. La réciproque est donc démontrée.

On peut enfin rattacher la proposition précédente à un ordre d'idées plus général se rapportant aux lignes géodésiques d'une surface développable.

Prenons, en effet, comme variable indépendante l'arc σ de l'indicatrice sphérique de la développable, et appelons s l'arc de l'arête de rebroussement compté à partir d'une origine arbitraire. L'élément linéaire de la surface est de la forme

$$dS^2 = du^2 + (u - s)^2 d\sigma^2.$$

On considère, bien entendu, s comme une fonction de σ . Au reste, si l'on appelle λ la distance d'un point M de la surface au point de contact avec l'arête de rebroussement de la génératrice qui passe par M, on a

$$u = \lambda + s,$$

ce qui complète la définition des variables coordonnées.

Ceci posé, les lignes géodésiques de la surface s'obtiennent, comme l'on sait, en intégrant l'équation

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \sigma}\right)^2 + (u - s)^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2 = (u - s)^2.$$

On obtient, φ désignant une constante,

$$\theta = u \cos(\sigma - \varphi) + \int s \sin(\sigma - \varphi) d\sigma,$$

et l'équation d'une ligne géodésique quelconque est alors

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \text{const.},$$

ou bien

$$u = \frac{\int s \cos(\sigma - \varphi) d\sigma + C}{\sin(\sigma - \varphi)}.$$

Si maintenant on désigne par S l'arc d'une géodésique, on trouve facilement

$$\frac{dS^2}{d\tau^2} = \frac{(u - s)^2}{\sin^2(\sigma - \varphi)},$$

ou, au signe près,

$$(4) \quad \frac{dS}{d\tau} = \frac{C}{\sin^2(\sigma - \varphi)} - \frac{\int s \sin(\sigma - \varphi) d\sigma}{\sin^2(\sigma - \varphi)},$$

ρ désignant le rayon de courbure de l'arête de rebroussement de la développable.

Remarquons à présent que la ligne géodésique considérée fait avec la génératrice qui passe par un de ses points un angle ω , tel que

$$\tan \omega = -\tan(\sigma - \varphi).$$

D'autre part, M. Paul Serret a démontré, dans sa thèse (p. 139), qu'en chaque point d'une ligne géodésique tracée sur une surface développable, le rapport $\frac{R_2}{R_1}$ des deux courbures est égal à la tangente de son inclinaison sur la génératrice correspondante de la surface. On aura donc

$$\frac{R_1}{R_2} = -\cot(\sigma - \varphi).$$

Or, dans la formule (4), le premier terme du second membre est justement la dérivée de $-\cot(\sigma - \varphi)$. Posant alors

$$\frac{f h \sin(\sigma - \varphi) d\sigma}{\sin^2(\sigma - \varphi)} = f(\sigma)$$

et intégrant, il vient

$$S - S_0 = C \frac{R_1}{R_2} - \int f(\sigma) d\sigma.$$

De cette formule on peut déduire plusieurs conséquences.

En voici deux très simples :

1° Si la surface développable est un cône, $\rho = 0$, et l'on obtient la formule

$$S - S_0 = C \frac{R_1}{R_2},$$

démontrée plus haut de deux manières.

2° Si l'arête de rebroussement de la développable est une courbe dont la première courbure est constante, on a encore, en intégrant,

$$S - S_0 = C \frac{R_1}{R_2} + \frac{a \cos(\sigma - \varphi)}{\sin^2(\sigma - \varphi)}$$

ou bien

$$S - S_0 = C \frac{R_1}{R_2} + a \frac{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}{R_2}.$$

*Note sur l'intégration des équations aux dérivées partielles
du second ordre;*

par F. GOMES TEIXEIRA.

1. Je vais considérer l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(1) \quad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

où H, K, L, M, N représentent des fonctions de x, y, z, p, q , et où l'on pose, suivant l'usage,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

M. Imschenetsky a fait voir, dans son *Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre* (pages 130 et 131 de la traduction par M. J. Houël), que cette équation peut être transformée dans une équation linéaire, quand on connaît une intégrale primitive particulière avec trois constantes arbitraires. Ensuite, en se basant sur les importantes recherches sur la théorie des intégrales des équations aux dérivées partielles publiées par Ampère dans les Cahiers XVII et XVIII du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, il fait voir que cette équation se simplifie considérablement quand cette intégrale satisfait à un ou aux deux systèmes d'équations de la *caractéristique*, auxquels Monge et Ampère ramènent le problème de l'intégration de (1).

Comme la théorie d'Ampère, qui ne se prête pas aisément à une exposition succincte, ne se trouve pas dans les *Traité*s systématiques de Calcul intégral, je crois qu'il ne sera pas inutile de voir comme on obtient les mêmes résultats par des considérations directes. C'est le but que nous nous proposons dans cette Note.

2. Soit

$$(2) \quad z = \omega(x, y, \alpha, \beta, \gamma)$$

une intégrale particulière de (1) avec trois constantes arbitraires

α, β, η . Nous avons l'identité

$$(3) \quad H_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2K_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + L_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + M_1 + N_1 \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0,$$

où H_1, K_1, L_1, M_1, N_1 représentent des fonctions de $\omega, x, y, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}$.

M. Imschenetsky considère ensuite α, β, η comme variables et introduit en (1), au lieu de la variable dépendante z , la variable η déterminée par (2) et, au lieu des variables indépendantes x et y , les variables α et β déterminées par les équations

$$(4) \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} = 0.$$

Pour obtenir l'équation dans laquelle se transforme de cette manière l'équation proposée, on tire de (2)

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial \omega}{\partial x}, & q &= \frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ r &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial \beta} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) \frac{\partial \beta}{\partial x}, \\ s &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \left(\frac{\partial p}{\partial \beta} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) \frac{\partial \beta}{\partial y}, \\ t &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial q}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \left(\frac{\partial q}{\partial \beta} + \frac{\partial q}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) \frac{\partial \beta}{\partial y}; \end{aligned}$$

ensuite on substitue dans les expressions précédentes de r, s, t les valeurs de $\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \beta}{\partial x}, \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \frac{\partial \beta}{\partial y}$ que l'on tire des équations du premier degré qui résultent de la différentiation des deux équations (4), par rapport à x et à y ; et enfin on substitue les valeurs qui résultent pour r, s, t dans l'équation (1). On trouve de cette manière, ayant égard à (3), l'équation suivante :

$$(5) \quad R \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha^2} + 2S \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha \partial \beta} + T \frac{\partial^2 \eta}{\partial \beta^2} + U = 0,$$

où R, S, T, U sont des fonctions de $\alpha, \beta, \eta, \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}, \frac{\partial \eta}{\partial \beta}$ données par

les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 -R &= + (H + N t_1) \left(\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right)^2 \\
 &\quad + 2(K - N s_1) \left(\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) \left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) \\
 &\quad + (L + N r_1) \left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right)^2, \\
 S &= + (H + N t_1) \left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) \\
 &\quad + (K - N s_1) \left[\left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) \right. \\
 &\quad \quad \left. + \left(\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) \left(\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial q_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right) \right] \\
 &\quad + (L + N r_1) \left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) \left(\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial q_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right), \\
 -T &= + (H + N t_1) \left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right)^2 \\
 &\quad + 2(K - N s_1) \left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial q_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right) \\
 &\quad + (L + N r_1) \left(\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial q_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right)^2, \\
 \frac{\partial \omega}{\partial \eta} U &= + N \left[\left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) \right. \\
 &\quad \quad \left. - \left(\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) \left(\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial q_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right) \right]^2 \\
 &\quad + R \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right)^2 \right] \\
 &\quad + 2S \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) \\
 &\quad + T \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right)^2 \right],
 \end{aligned}$$

où je pose, pour abréger,

$$p_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad q_1 = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad r_1 = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad s_1 = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}, \quad t_1 = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}.$$

3. Cela posé, j'entre dans le sujet de cette Note, c'est-à-dire, je vais considérer le cas où l'on obtient l'intégrale (2) au moyen d'une ou de deux intégrales intermédiaires particulières de (1), avec une constante arbitraire chacune.

Soit

$$(6) \quad f(x, y, z, p, q) = \alpha$$

une intégrale intermédiaire de (1) avec une constante arbitraire α .
On sait que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ satisfait aux équations qui résultent de l'élimination de deux des quantités r, s, t entre (1) et les équations suivantes

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p} r + \frac{\partial f}{\partial q} s = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial f}{\partial p} s + \frac{\partial f}{\partial q} t = 0, \end{cases}$$

et que ces équations sont (1)

$$\begin{aligned} P &= H \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{\partial f}{\partial q} - H \frac{\partial f}{\partial p} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &\quad - 2K \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{\partial f}{\partial p} + M \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)^2 - N \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 = 0, \\ Q &= H \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right)^2 - 2K \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} + L \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)^2 \\ &\quad - N \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{\partial f}{\partial q} - N \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{\partial f}{\partial p} = 0. \end{aligned}$$

Soit maintenant l'équation (2) une intégrale particulière de (6) que l'on peut obtenir, comme on sait, par la méthode de Lagrange et Charpit. La valeur qu'il donne pour z satisfait aux équations précédentes, et par conséquent satisfait aussi à l'équation suivante

$$(8) \quad (H + Nt) \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right)^2 - 2(K - Ns) \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} + (L + Nr) \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)^2 = 0$$

qui résulte de l'élimination de

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z}$$

dans la seconde au moyen des équations (7).

Mais, en différentiant (6) par rapport à β et considérant z, p, q comme des fonctions de β déterminées par (2), on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \frac{\partial \omega}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial f}{\partial p_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial p_1}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial f}{\partial q_1} \left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_1}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial \beta} \right) = 0$$

(1) C. JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. III, p. 365.

ou, en vertu des équations (4),

$$\frac{\partial f}{\partial p_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial f}{\partial q_1} \left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) = 0.$$

En substituant maintenant dans l'expression de R la quantité

$$\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta}$$

par sa valeur donnée par cette équation, on trouve

$$-R = \frac{\left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1} \right)^2} \left[(H_1 + N_1 t) \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \right)^2 - 2(K_1 - N_1 s_1) \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} + (L_1 + N_1 r_1) \left(\frac{\partial f}{\partial p_1} \right)^2 \right].$$

Donc, en vertu de la formule (8), nous avons $R = 0$, et l'équation (5) prend la forme simplifiée suivante :

$$2S \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial \beta} + T \frac{\partial^2 \eta}{\partial \beta^2} + U = 0.$$

4. Soient maintenant

$$(9) \quad f(x, y, z, p, q) = \alpha, \quad F(x, y, z, p, q) = \beta$$

deux intégrales intermédiaires particulières de (1) avec deux constantes arbitraires α et β . Si chacune d'elles satisfait à un des deux systèmes d'équations différentielles ordinaires, auxquels la méthode de Monge ramène le problème de l'intégration de l'équation (1), ou à un des deux systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre auxquels la méthode de Boole ramène le même problème, on sait que les valeurs de p et q données par les équations (9) rendent

$$dz = p dx + q dy$$

intégrable. De cette intégration résulte l'équation (2).

Dans ce cas, on voit, comme dans le cas antérieur, que $R = 0$. Ensuite, en éliminant dans l'expression de T la quantité

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

au moyen de l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial F}{\partial q_1} \left(\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial x} \right) = 0,$$

et ayant égard à l'équation qui résulte du changement dans (8) de f en F , on voit aussi que $T = 0$.

L'équation (5) prend donc la forme suivante :

$$2S \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial \beta} + U = 0.$$

5. Soit maintenant

$$K^2 - HL + MN = 0$$

ce qui arrive quand les deux systèmes d'équations de la *caractéristique* coïncident, et soit encore

$$(6) \quad f(x, y, z, p, q) = \alpha$$

une intégrale particulière de (1) avec une constante arbitraire α .

En différentiant cette équation par rapport à α et à β , considérant z, p, q comme des fonctions de α et β déterminées par (2) et ayant égard à (4), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial p_1}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial f}{\partial q_1} \left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_1}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial \beta} \right) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial p_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial f}{\partial q_1} \left(\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial x} \right) &= 1. \end{aligned}$$

En substituant ensuite dans l'expression de S les valeurs que ces équations donnent pour

$$\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial p_1}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial x},$$

on trouve

$$\begin{aligned} S &= \frac{\left(\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_1}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial \beta} \right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1} \right)^2} \\ &\times \left[(H_1 + N_1 t_1) \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2(K_1 - N_1 s_1) \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} + (L_1 + N_1 r_1) \left(\frac{\partial f}{\partial p_1} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{\left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_1}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial \beta} \right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1} \right)^2} \left[- (H_1 + N_1 t_1) \frac{\partial f}{\partial q_1} + (K_1 - N_1 s_1) \frac{\partial f}{\partial p_1} \right]. \end{aligned}$$

et par conséquent, en vertu de (8),

$$S = \frac{\left(\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \beta}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)^2} \left[-(\Pi_1 + N_1 t_1) \frac{\partial f}{\partial q_1} + (K_1 - N_1 s_1) \frac{\partial f}{\partial p_1} \right].$$

Mais l'équation (8) donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial q} &= \frac{K - Ns \pm \sqrt{(K - Ns)^2 - (H + Nt)(L + Nr)}}{H + Nt} \frac{\partial f}{\partial p} \\ &= \frac{K - Ns \pm \sqrt{K^2 - HL + MN}}{H + Nt} \frac{\partial f}{\partial p} \\ &= \frac{K - Ns}{H + Nt} \frac{\partial f}{\partial p}. \end{aligned}$$

Donc nous avons $S = 0$, et l'équation (5) prend la forme

$$T \frac{\partial^2 \eta}{\partial \beta^2} + U = 0.$$

Sur certaines expressions quadruplement périodiques;

par M. ÉMILE PICARD.

On sait combien il est facile de former des séries représentant des fonctions doublement périodiques. Prend-on, par exemple, une fonction rationnelle de e^x , soit $f(e^x)$, la série

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} f(e^{x+m\omega}),$$

si elle est convergente, représentera une fonction doublement périodique aux périodes $2\pi i$ et ω .

La généralisation se présente d'elle-même quand on passe au cas de deux variables. Soit $f(e^x, e^y)$ une fonction rationnelle de e^x et e^y ; on forme la série double

$$(S) \quad \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(e^{x+m\alpha+n\beta}, e^{y+m\alpha'+n\beta'}).$$

Si elle est convergente, on aura une fonction quadruplement

périodique de x et y . Mais on n'a jamais, que je sache, donné d'exemples effectifs de séries de cette forme, ni cherché à se rendre compte de la nature des fonctions ainsi représentées. J'ai été tout naturellement conduit à l'étude de ces séries, qui ne sont qu'un cas particulier des fonctions que j'ai désignées sous le nom de *fonctions hyperabéliennes* (*Journal de Mathématiques*, 1885). Je commence donc par rappeler quelques généralités sur ces fonctions, et je suis ainsi conduit à une série $\varphi(x, y)$ du type (S), qui joue le rôle essentiel dans cette théorie. Cette série d'ailleurs peut être formée *a priori*, et son étude se fait indépendamment des considérations par lesquelles on y a été amené. Signalons seulement, en ce moment, la formation des expressions quadruplement périodiques de seconde espèce, et la forme remarquable du développement en série trigonométrique de l'expression fondamentale φ . Les résultats qui suivent ont été succinctement indiqués dans les *Comptes rendus* (18 mars et 1^{er} avril 1889).

1. Comme je viens de le dire, c'est en étudiant un cas particulier des fonctions hyperabéliennes que nous avons été conduit à certaines expressions quadruplement périodiques. Il nous faut donc rappeler brièvement la formation des séries qui se rencontrent dans la théorie de ces fonctions. Un groupe hyperabélien est un groupe discontinu relatif à deux variables u et v dont les substitutions sont de l'une ou l'autre forme

$$\left(u, v, \frac{au+b}{cu+d}, \frac{a'v+b'}{c'v+d'}\right),$$

$$\left(u, v, \frac{av+b}{cv+d}, \frac{a'u+b'}{c'u+d'}\right),$$

les coefficients des diverses substitutions étant réels.

Nous considérons particulièrement le domaine des variables u et v , pour lesquels le coefficient de i est positif; on peut commencer par remplacer ces deux demi-plans par deux cercles C et C' ayant l'unité pour centre; il suffira de poser

$$\xi = \frac{u-i}{u+i}, \quad \tau_1 = \frac{v-i}{v+i},$$

et l'on aura alors des substitutions de même forme relatives aux variables ξ et τ_1 ; seulement les coefficients de ces substitutions ne

seront plus réels, et nous pouvons admettre d'ailleurs que chacun des déterminants $ad - bc, \dots$ est égal à l'unité. Écrivons donc de nouveau le type des substitutions relatives cette fois à ξ et η , en mettant encore les mêmes lettres $a, b, \dots$ qui ne sont pas, bien entendu, les mêmes que plus haut, et supposons, comme cela se rencontrera plus bas, qu'il n'y a que des substitutions du premier type, soit

$$\left(\xi, \eta, \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'} \right).$$

On peut supposer

$$ad - bc = a'd' - b'c' = 1.$$

Dans ces conditions la série

$$(1) \quad \sum \frac{1}{(c\xi + d)^{2\mu}(c'\eta + d')^{2\mu}},$$

étendue à toutes les substitutions du groupe, représente une fonction qui est certainement holomorphe à l'intérieur des cercles C et C' , l'entier μ étant supérieur à l'unité.

2. Ces résultats rappelés, cherchons ce qu'ils vont nous donner dans le cas particulier, où le groupe initial est formé, des deux substitutions fondamentales suivantes

$$(u, v, au, a'v), \quad (u, v, bu, b'v),$$

a, b, a' et b' étant des quantités positives quelconques. Ce groupe est évidemment discontinu, car toute substitution est de la forme

$$(u, v, a^m b^n u, a'^m b'^n v),$$

m et n désignant des entiers positifs ou négatifs; or on ne peut pas choisir les entiers m et n de telle sorte que

$$a^m b^n \quad \text{et} \quad a'^m b'^n$$

soient aussi voisins que l'on voudra de l'unité, sauf dans un cas particulier que l'on aperçoit de suite.

Appliquons donc à ce cas particulier les remarques générales du paragraphe précédent. Après quelques calculs de transformation,

qui ne présentent aucune difficulté, on arrive pour la série (1) à l'expression

$$\sum \frac{a^m b^n}{[\xi(a^m b^n - 1) + a^m b^n + 1]^{2\mu}} \frac{a'^m b'^n}{[\xi(a'^m b'^n - 1) + a'^m b'^n + 1]^{2\mu}},$$

et, en revenant aux variables initiales u et v , on a

$$\sum \sum \frac{a^m b^n a'^m b'^n}{(ua^m b^n + i)^{2\mu} (va'^m b'^n + i)^{2\mu}},$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières positives et négatives de m et n .

3. Ce résultat obtenu, nous allons étudier directement la somme précédente donnée *a priori*; nous allons même y faire $\mu = 1$, ce qui n'empêchera pas la convergence. Prenons donc la série

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{a^m b^n}{(ua^m b^n + i)^2} \frac{a'^m b'^n}{(va'^m b'^n + i)^2},$$

ou, en remplaçant u et v par iu et iv , la série

$$(2) \quad \sum \sum \frac{a^m b^n}{(ua^m b^n + 1)^2} \frac{a'^m b'^n}{(va'^m b'^n + 1)^2}.$$

Je dis qu'elle est convergente pour toute valeur de u et v , à l'exception des valeurs réelles et négatives.

Considérons d'abord la série pour $u = v = 1$. Nous avons

$$\sum \frac{a^m b^n}{(1 + a^m b^n)^2} \frac{a'^m b'^n}{(1 + a'^m b'^n)^2};$$

c'est une série à termes positifs, montrons qu'elle est convergente.

Posons

$$a = e^\alpha, \quad b = e^\beta, \quad a' = e^{\alpha'}, \quad b' = e^{\beta'},$$

les α et β étant réels.

Je considère le quotient

$$\frac{e^x}{(1 + e^x)^2};$$

cette expression ne change pas quand on change x en $-x$; on a



donc, x étant positif,

$$\frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} < e^{-x};$$

donc, pour x de signe quelconque, nous pouvons écrire

$$\frac{e^x}{(1+e^x)^2} < e^{-|x|},$$

$|x|$ désignant la valeur absolue de x . Nous aurons donc

$$\frac{a^m b^n}{(1+a^m b^n)^2} \frac{a'^m b'^n}{(1+a'^m b'^n)^2} < e^{-|m\alpha+n\beta|-|m\alpha'+n\beta'|};$$

mais, si x et y désignent deux nombres positifs, on a

$$e^{-x-y} < e^{-\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Comme, d'autre part, pour x positif et suffisamment grand,

$$e^{-x} < \frac{1}{x^\mu}$$

μ étant un entier positif quelconque, il en résulte que

$$e^{-x-y} < \frac{1}{(x^2+y^2)^\mu}$$

et, par suite, le terme général de notre série est moindre que

$$\frac{1}{[(m\alpha+n\beta)^2+(m\alpha'+n\beta')^2]^\mu},$$

μ étant un entier positif quelconque. La série (2) est donc absolument convergente pour $u=1$, $v=1$.

Donnons maintenant à (u, v) une valeur quelconque, en supposant seulement que u et v ne prennent pas des valeurs réelles négatives. Nous pouvons écrire le terme général de notre série sous la forme

$$\frac{a^m b^n}{(1+a^m b^n)^2} \frac{a'^m b'^n}{(1+a'^m b'^n)^2} \left(\frac{1+a^m b^n}{u+a^m b^n} \right)^2 \left(\frac{1+a'^m b'^n}{v+a'^m b'^n} \right)^2;$$

or le module du quotient $\frac{1+a^m b^n}{u+a^m b^n}$ représente le rapport des distances des points 1 et u au point $-a^m b^n$, c'est-à-dire à un point situé sur la partie négative de l'axe réel. Ce rapport restera donc

compris entre deux limites finies déterminées; il en sera de même pour $\frac{1+a^m b'^n}{u+a^m b'^n}$. Par suite, la série (2) sera absolument convergente, sauf pour les valeurs indiquées de u et v . Posons maintenant

$$f(u, v) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{ua^m b^n}{(1+ua^m b^n)^2} \frac{v.a'^m b'^n}{(1+v.a'^m b'^n)^2};$$

on aura évidemment

$$f(au, a'v) = f(bu, b'v) = f(u, v).$$

4. La série précédente permet d'en former une infinité d'autres jouissant des mêmes propriétés.

Prenons, en effet, deux fonctions rationnelles $R(u)$ et $R_1(v)$ dont tous les pôles soient situés sur la partie négative de l'axe des quantités réelles, et qui restent finies respectivement pour $u = 0$, $u = \infty$ et pour $v = 0$, $v = \infty$.

La série

$$F(u, v) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} R(a^m b^n u) R_1(a'^m b'^n v) \frac{ua^m b^n}{(1+ua^m b^n)^2} \frac{va'^m b'^n}{(1+va'^m b'^n)^2}$$

sera convergente comme la série $f(u, v)$. En effet, le module de

$$R(a^m b^n u)$$

reste moindre qu'une quantité déterminée, puisque $a^m b^n u$ reste sur la droite joignant l'origine au point u . Il en est de même du second facteur $R_1(a'^m b'^n v)$.

On a d'ailleurs évidemment

$$F(au, a'v) = F(bu, b'v) = F(u, v)$$

5. Posons maintenant

$$u = e^x, \quad v = e^y, \quad a = e^\alpha, \quad b = e^\beta, \quad a' = e^{\alpha'}, \quad b' = e^{\beta'}.$$

Notre fonction $f(u, v)$ devient une fonction de x et y ,

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{x+m\alpha+n\beta}}{(1+e^{x+m\alpha+n\beta})^2} \frac{e^{y+m\alpha'+n\beta'}}{(1+e^{y+m\alpha'+n\beta'})^2}.$$

Cette *expression* admettra quatre couples de périodes, dont le Tableau est évidemment

$$(S) \quad \left(\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 2\pi i & 0 \\ 0 & 2\pi i \\ \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{array} \right)$$

Mais cette *expression* ne représente pas une fonction quadruplement périodique, se comportant pour toute valeur finie de x et y comme une fonction rationnelle. Le fait, *a priori*, est impossible, car une fonction quadruplement périodique de x et y , et méromorphe pour toute valeur finie de ces variables, ne peut admettre le système (S) de périodes, où les α et β sont des quantités réelles arbitraires.

D'ailleurs, en nous reportant au paragraphe précédent, nous voyons que la fonction $\varphi(x, y)$ ne sera pas définie pour les valeurs de x et y , rendant e^x et e^y réels et négatifs, c'est-à-dire en posant

$$x = x' + ix'', \quad y = y' + iy''$$

pour les valeurs de x et y correspondant

$$\text{soit à } x'' = (2k + 1)\pi, \quad \text{soit à } y'' = (2h + 1)\pi,$$

h et k étant des entiers quelconques positifs ou négatifs.

Nous avons donc ainsi une expression $\varphi(x, y)$, *quadruplement périodique, avec le tableau S de périodes, et avec des surfaces de singularités essentielles* qui empêchent le prolongement analytique de l'expression.

6. Revenons un moment aux variables u et v et au groupe considéré dans les paragraphes (2) et (3). De même que nous avons formé des expressions restant invariables pour les substitutions de ce groupe, nous pouvons pareillement, et en suivant toujours les indications de la théorie générale, obtenir des expressions se reproduisant à des facteurs constants près A et B.

Formons, en effet, la série dont le terme général est

$$A^{-m} B^{-n} \frac{\alpha^m \mu b^n \mu}{(1 + \alpha^m b^n u)^{2\mu}} \frac{\alpha'^m \mu b'^n \mu}{(1 + \alpha'^m b'^n u)^{2\mu}}.$$

μ est un entier positif fixe; m et n , comme plus haut, varient de $-\infty$ à $+\infty$. Il est bien aisé de voir que cette série est convergente si μ est choisi suffisamment grand; en effet, si nous faisons, comme plus haut, $u = \sqrt{-1}$ et si nous remplaçons le troisième et le quatrième facteur par leur limite supérieure, nous aurons, en posant

$$A = e^{P+iQ}, \quad B = e^{R+iS},$$

à considérer la série dont le terme général est

$$e^{-\mu\{|mx+n\beta|+|m'x'+n'\beta'|\}-mP-nQ},$$

et qui, quels que soient les signes de P et Q , est manifestement convergente si l'entier positif μ est pris suffisamment grand.

Si nous posons alors

$$f_1(u, v) = \sum_{m=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A^{-m} B^{-n} \frac{u^m \alpha^m \mu b^n \mu}{(1 + \alpha^m b^n u)^{2\mu}} \frac{v^n \alpha'^m \mu b'^n \mu}{(1 + \alpha'^m b'^n v)^{2\mu}},$$

on aura

$$\begin{aligned} f_1(au, a'v) &= A f_1(u, v), \\ f_1(bu, b'v) &= B f_1(u, v). \end{aligned}$$

C'est une expression de seconde espèce. Si nous revenons alors aux variables x et y , nous aurons des expressions de seconde espèce quadruplement périodiques, et possédant les mêmes singularités que plus haut.

7. Je reviens maintenant à la fonction $\varphi(x, y)$ du n° 5, en changeant seulement un peu les notations. Écrivons la série

$$\hat{\varphi}(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{\alpha(x+m\omega)+\beta(y+n\omega')}}{[1 + e^{\alpha(x+m\omega)+\beta(y+n\omega')}]^2} \frac{e^{\alpha'(x+m\omega)+\beta'(y+n\omega')}}{[1 + e^{\alpha'(x+m\omega)+\beta'(y+n\omega')}]^2},$$

$\omega, \omega', \alpha, \alpha', \beta$ et β' étant réels et $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ différent de zéro. Il est clair que cette expression ne diffère de celle que nous avons considérée plus haut qu'en ce qu'une substitution linéaire a été effectuée sur les variables.

Le tableau des périodes est pour l'expression précédente

x	y
ω	0
0	ω'
Gi	$G'i$
Hi	$H'i$

G , G' , H et H' sont définies par les deux systèmes d'équations

$$\begin{array}{l|l} \alpha G + \beta G' = 2\pi & \alpha H + \beta H' = 0 \\ \alpha' G + \beta' G' = 0 & \alpha' H + \beta' H' = 2\pi \end{array}$$

Les singularités essentielles correspondent, d'une part, à

$$\alpha x'' + \beta y'' = (2k + 1)\pi;$$

d'autre part, à

$$\alpha' x'' + \beta' y'' = (2h + 1)\pi,$$

en posant toujours

$$x = x' + ix'', \quad y = y' + iy''.$$

La fonction $\mathcal{F}(x, y)$ est donc périodique par rapport à x et par rapport à y . Nous pouvons donc, pour x et y réels, la développer en série trigonométrique; ce sont les coefficients de ce développement que nous allons chercher.

Avant de prendre le cas de deux variables, je traiterai le cas d'une seule variable, c'est-à-dire d'une série doublement périodique. Soit

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{e^{x+m\omega}}{(1 + e^{x+m\omega})^2},$$

où nous supposons ω réel. La fonction précédente est doublement périodique avec les deux périodes ω et $2\pi i$; développons-la, pour x réel, en série trigonométrique. La fonction étant paire, nous aurons

$$\mathcal{F}(x) = \sum A_p \cos \frac{2p\pi x}{\omega}.$$

Il faut calculer les coefficients A_p . On aura

$$A_p = \frac{2}{\omega} \int_0^\omega \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{e^{x+m\omega}}{(1 + e^{x+m\omega})^2} \cos \frac{2p\pi x}{\omega} dx$$

que l'on transforme de suite en

$$A_p = \frac{2}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \cos \frac{2p\pi x}{\omega} dx = \frac{4}{\omega} \int_0^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \cos \frac{2p\pi x}{\omega} dx.$$

On peut calculer sans peine l'intégrale définie qui précède.

Posons $\frac{2p\pi}{\omega} = a$. Nous avons à calculer l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \cos ax dx;$$

or, en intégrant par parties, cette intégrale peut s'écrire

$$\frac{1}{2} - a \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{1+e^x} dx;$$

mais

$$\frac{1}{1+e^x} = e^{-x} - e^{-2x} + \dots + (-1)^n e^{-(n+1)x} + \dots$$

et, comme

$$\int_0^{\infty} \sin ax \cdot e^{-(n+1)x} dx = \frac{a}{(n+1)^2 + a^2},$$

nous aurons

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \cos ax dx = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{a^2}{n^2 + a^2}.$$

Or on a l'identité

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n a^2}{a^2 + n^2} = \frac{\pi a i}{2 \sin \pi a i},$$

par suite

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \cos ax dx = \frac{\pi a i}{2 \sin \pi a i};$$

nous avons donc

$$A_p = \frac{4\pi a}{\omega(e^{\pi a} - e^{-\pi a})}.$$

Le développement cherché est alors

$$f(x) = \frac{2}{\omega} + \frac{4\pi}{\omega} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{a}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} \cos ax,$$

où l'on a posé

$$a = \frac{2p\pi}{\omega}.$$

8. Revenons maintenant à la fonction de deux variables $\tilde{f}(x, y)$ pour la développer en série trigonométrique. La fonction satisfaisant à la relation

$$\tilde{f}(x, y) = \tilde{f}(-x, -y),$$

son développement sera évidemment de la forme

$$\sum \sum A_{p,q} \cos \frac{2p\pi x}{\omega} \cos \frac{2q\pi y}{\omega'} + B_{p,q} \sin \frac{2p\pi x}{\omega} \sin \frac{2q\pi y}{\omega'}.$$

Calculons d'abord $A_{p,q}$. On a

$$A_{p,q} = \frac{4}{\omega\omega'} \int_0^\omega \int_0^{\omega'} \tilde{f}(x, y) \cos \frac{2p\pi x}{\omega} \cos \frac{2q\pi y}{\omega'} dx dy,$$

qui se transforme de suite en

$$A_{p,q} = \frac{4}{\omega\omega'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2x+2y}}{(1+e^{2x+2y})^2} \frac{e^{2x+2y}}{(1+e^{2x+2y})^2} \cos \frac{2p\pi x}{\omega} \cos \frac{2q\pi y}{\omega'} dx dy.$$

Posons

$$2x + 2y = u,$$

$$2'x + 2'y = v,$$

d'où se tirent

$$x = \lambda u + \mu v,$$

$$y = \lambda' u + \mu' v;$$

en posant

$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \quad \lambda' = \frac{-\alpha'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta},$$

$$\mu = \frac{-\beta'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \quad \mu' = \frac{\alpha}{\alpha\beta' - \alpha'\beta},$$

on aura

$$A_{p,q} = \frac{4(\lambda\mu' - \lambda'\mu)}{\omega\omega'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^u}{(1+e^u)^2} \frac{e^v}{(1+e^v)^2} \cos a(\lambda u + \mu v) \cos b(\lambda' u + \mu' v) du dv,$$

où

$$a = \frac{2p\pi}{\omega}, \quad b = \frac{2q\pi}{\omega'}.$$

Remplaçons maintenant

$$2 \cos a(\lambda u + \mu v) \cos b(\lambda' u + \mu' v)$$

par

$$\begin{aligned} & \cos(a\lambda + b\lambda')u \cdot \cos(a\mu + b\mu')v - \sin(a\lambda + b\lambda')u \cdot \sin(a\mu + b\mu')v \\ & + \cos(a\lambda - b\lambda')u \cdot \cos(a\mu - b\mu')v - \sin(a\lambda - b\lambda')u \cdot \sin(a\mu - b\mu')v. \end{aligned}$$

La partie relative aux sinus disparaît dans l'intégration. Il reste une somme de deux intégrales doubles : chacune d'elles est un produit de deux intégrales simples rentrant dans le type correspondant à une seule variable. Toute réduction faite, on aura

$$A_{p,q} = \frac{8}{\omega\omega'(\alpha\beta' - \alpha'\beta)} \left(\frac{A}{e^{\Lambda} - e^{-\Lambda}} \frac{B}{e^B - e^{-B}} + \frac{A'}{e^{\Lambda'} - e^{-\Lambda'}} \frac{B'}{e^{B'} - e^{-B'}} \right),$$

en posant

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{2\pi^2}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \left(\frac{p\beta'}{\omega} - \frac{q\alpha'}{\omega'} \right), & B &= \frac{2\pi^2}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \left(-\frac{p\beta}{\omega} + \frac{q\alpha}{\omega'} \right), \\ \Lambda' &= \frac{2\pi^2}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \left(\frac{p\beta'}{\omega} + \frac{q\alpha'}{\omega'} \right), & B' &= \frac{2\pi^2}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \left(-\frac{p\beta}{\omega} - \frac{q\alpha}{\omega'} \right). \end{aligned}$$

Le second coefficient $B_{p,q}$ s'obtient par un calcul tout semblable : on a seulement entre parenthèses une différence au lieu d'une somme. On trouve ainsi

$$B_{p,q} = \frac{8}{\omega\omega'(\alpha\beta' - \alpha'\beta)} \left(-\frac{A}{e^{\Lambda} - e^{-\Lambda}} \frac{B}{e^B - e^{-B}} + \frac{A'}{e^{\Lambda'} - e^{-\Lambda'}} \frac{B'}{e^{B'} - e^{-B'}} \right).$$

Nous obtenons donc des séries trigonométriques dépendant de deux variables complexes *et présentant une grande analogie avec les séries trigonométriques d'une variable que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques*. La forme des coefficients, qui est fort simple, me paraît digne d'être remarquée. Quant à la fonction $\mathfrak{F}(x, y)$ et aux expressions analogues, il est très vraisemblable qu'elles satisfont à des relations différentielles rappelant de loin celles de la théorie des fonctions elliptiques ou abéliennes, mais c'est une étude qui exige de longs calculs, et que je n'ai pas encore achevée.

Note sur la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n^2}$; par M. ALFRED JONQUIÈRE.

(Séance du 3 avril 1889.)

Dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Stockholm, en décembre 1888, j'ai considéré les séries de la

forme $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n^s}$ en supposant que s est un nombre entier positif.

Soit $\zeta(s, x)$ la fonction des deux variables s et x qui est définie par ladite série pour toutes les valeurs de x dont le module est moindre que l'unité. Soit, de plus, $\gamma(s, x)$ la fonction dite de Bernoulli, définie par l'équation

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \gamma(s, x) z^s.$$

J'ai démontré la relation suivante

$$(1) \quad \zeta(s, x) + (-1)^s \zeta\left(s, \frac{1}{x}\right) = -(2i\pi)^s \gamma\left(s, \frac{\log x}{2i\pi}\right).$$

Par cette simple équation la fonction $\zeta(s, x)$ qui, par la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n^s}$, n'est donnée qu'à l'intérieur d'un cercle de rayon 1, est étendue au plan entier et peut donc être regardée comme connue pour tous les points du plan.

En supposant que s est un nombre réel ou imaginaire quelconque, je me suis proposé la question de savoir s'il existe pour la fonction plus générale $\zeta(s, x)$ une relation analogue à celle que j'ai donnée pour des valeurs entières et positives de la variable s .

Il s'agit, en premier lieu, de définir la fonction $\zeta(s, x)$ d'une manière générale, c'est-à-dire pour des valeurs quelconques des variables s et x .

De l'équation connue

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-nz} z^{s-1} dz,$$

on déduira aisément

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty z^{s-1} \sum_{n=1}^{n=\infty} (xe^{-z})^n dz,$$

$$\zeta(s, x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{xz^{s-1} dz}{e^z - x}.$$

Par cette équation la fonction $\zeta(s, x)$ est bien définie pour des

valeurs quelconques de x , mais l'intégrale n'a de sens que si la partie réelle de s est positive. Il faudra donc remplacer cette intégrale par une autre qui ne soit pas soumise à cette restriction.

Considérons l'intégrale $\int \frac{xz^{s-1} dz}{e^z - x}$, et supposons que le contour d'intégration soit un lacet partant du point $+\infty$ et entourant en sens direct le point 0 sans enfermer aucun autre des points critiques $z = \log x \pm 2n i \pi$. En supposant, pour le moment, que la partie réelle de s est positive, le contour d'intégration pourra être réduit à deux droites, l'une allant de $+\infty$ à 0 et l'autre de 0 à $+\infty$, et à un cercle de rayon infiniment petit entourant le point 0 en sens direct. D'après la supposition que nous venons de faire, l'intégrale prise le long du petit cercle sera évidemment nulle. La variable z qui, en allant du point $+\infty$ à 0, a l'argument 0 aura l'argument 2π après avoir entouré le point 0 et devra donc être remplacée par $e^{2i\pi} z$. Pour abréger, je désignerai l'intégrale prise en sens direct le long dudit lacet par $\int_l \frac{xz^{s-1} dz}{e^z - x}$, en ajoutant au signe d'intégration l'indice l .

En ayant égard à tout ce que nous venons de dire, on trouvera

$$\begin{aligned} \int_l \frac{xz^{s-1} dz}{e^z - x} &= \int_{\infty}^0 \frac{xz^{s-1} dz}{e^z - x} + e^{2i\pi s} \int_0^{\infty} \frac{xz^{s-1} dz}{e^z - x} \\ &= e^{i\pi s} (e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}) \int_0^{\infty} \frac{xz^{s-1} dz}{e^z - x}, \\ \int_0^{\infty} \frac{xz^{s-1} dz}{e^z - x} &= \frac{e^{-i\pi s}}{2i \sin \pi s} \int_l \frac{xz^{s-1} dz}{e^z - x}. \end{aligned}$$

Nous pourrions donc définir la fonction $\zeta(s, x)$ de la manière suivante

$$\zeta(s, x) = \frac{e^{-i\pi s}}{2i \sin \pi s \Gamma(s)} \int_l \frac{xz^{s-1} dz}{e^z - x}$$

ou bien

$$(3) \quad \zeta(s, x) = \frac{e^{-i\pi s}}{2i\pi} \Gamma(1-s) \int_l \frac{xz^{s-1} dz}{e^z - x}.$$

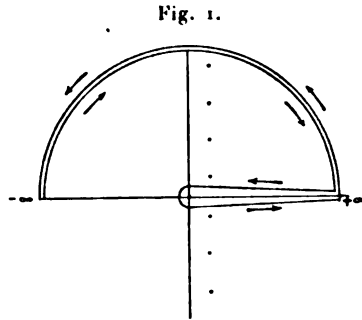
Cette équation de définition s'applique à des valeurs quelconques de s et de x . Si la partie réelle de s est négative, on élargira le lacet de telle manière que le point $z = 0$ ne soit pas atteint. Il

faudra toujours faire attention à ce que le contour d'intégration n'enferme aucun des points critiques $z = \log x \pm 2ni\pi$ de l'intégrale. Si l'un de ces points s'approche du contour d'intégration, on pourra facilement déformer le lacet, afin d'éviter le point critique. L'équation (3) permet aussi d'étudier les changements de la fonction $\zeta(s, x)$ quand on a fait décrire à la variable x un chemin quelconque. Mais je ne veux pas insister sur ce point.

Remarquons encore que l'équation (3) prend une forme indéterminée quand s est un nombre entier positif. Mais, dans ce cas, la fonction $\zeta(s, x)$ pourra être définie par l'équation (2).

Les points critiques $z = \log x \pm 2ni\pi$ sont tous situés sur une parallèle à l'axe imaginaire. Pour fixer les idées, je supposerai la partie imaginaire de $\log x$ comprise entre 0 et $2i\pi$, de sorte que les points $\log x, \log x + 2i\pi, \log x + 4i\pi, \dots$ sont situés au-dessus de l'axe réel.

J'appelle *horizon* un cercle de rayon infiniment grand décrit de l'origine comme centre. En supposant la partie réelle de s négative, il est facile de voir que l'intégrale $\int \frac{xz^{s-1} dz}{e^z - x}$ prise le long d'une portion quelconque de l'horizon est nulle. Nous pourrions donc ajouter au contour d'intégration formé par le lacet la moitié de l'horizon située au-dessus de l'axe réel, de la manière indiquée par la *fig. 1*.



La variable z part du point $-\infty$, décrit un demi-cercle de rayon infiniment grand jusqu'au point $+\infty$, parcourt le lacet en sens direct et revient par le même demi-cercle au point $-\infty$. L'argument de z ayant la valeur π au point de départ $-\infty$, diminue de π à 0, augmente ensuite de 0 à 2π et continue à aug-

menter jusqu'à 3π . Il est évident qu'en supposant négative la partie réelle de s l'intégrale $\int \frac{xz^{s-1} dz}{e^z - x}$, prise le long du contour indiqué, sera égale à l'intégrale $\int_l \frac{xz^{s-1} dz}{e^z - x}$ prise le long du lacet.

Le demi-cercle est supposé ne rencontrer aucun des points $\log x + 2ni\pi$.

Fixons les deux bouts du contour d'intégration au point $-\infty$ et resserrons ce contour en vertu du théorème de Cauchy. Il est aisé de voir que le contour pourra être transformé en un lacet partant du point $-\infty$ et entourant l'origine en sens direct, et en deux courbes fermées entourant les points

$$\log x + 2ni\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

l'une en sens direct, l'autre en sens inverse. Ces deux courbes pourront de plus être réduites à des cercles infiniment petits autour des points critiques. Chacun de ces points sera entouré de deux petits cercles parcourus en sens contraire. La variable z , en décrivant en sens *inverse* un cercle autour du point $\log x + 2ri\pi$, aura un argument compris entre π et θ ; mais elle aura un argument, situé entre 2π et 3π , en décrivant le même cercle en sens *direct*. Cela résulte immédiatement de ce que nous avons dit plus haut sur l'argument de la variable z . Dans le premier cas, on égalera z à $\log x + 2ri\pi + h$, en désignant par h une grandeur infiniment petite, et, dans le second cas, on posera

$$z = e^{2i\pi}(\log x + 2ri\pi + h).$$

L'argument du facteur $\log x + 2ri\pi + h$ est entre θ et π , et la variable h décrit autour de l'origine un petit cercle, en sens inverse dans le premier cas, et en sens direct dans le second.

D'après cela, il est facile de voir que l'intégrale $\int \frac{xz^{s-1} dz}{e^z - x}$, prise en sens inverse le long du petit cercle autour du point $\log x + 2ri\pi$, est égale à $-2i\pi(\log x + 2ri\pi)^{s-1}$. La même intégrale, prise en sens opposé, devra être égalée à $+2i\pi e^{2i\pi s}(\log x + 2ri\pi)^{s-1}$. La somme de ces deux intégrales est égale à

$$\begin{aligned} & 2i\pi \cdot e^{i\pi s} (e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}) (\log x + 2ri\pi)^{s-1} \\ &= -4\pi e^{i\pi s} \sin \pi s (\log x + 2ri\pi)^{s-1}. \end{aligned}$$

Dans cette expression, r prendra toutes les valeurs entières et

positives de zéro jusqu'à l'infini. En ajoutant au signe d'intégration l'indice ℓ , j'indiquerai que l'intégrale est prise le long d'un lacet partant du point $-\infty$ et entourant l'origine en sens direct, en supposant que l'argument de la variable z varie de π à 3π .

Nous pourrions enfin écrire

$$\int_{\ell} \frac{xz^{s-1} dz}{e^z - x} = -4\pi \cdot e^{i\pi s} \cdot \sin \pi s \sum_{r=0}^{r=\infty} (\log x + 2ri\pi)^{s-1} + \int_r \frac{xz^{s-1} dz}{e^z - x}$$

ou bien

$$\zeta(s, x) = 2i \sin \pi s \cdot \Gamma(1-s) (2i\pi)^{s-1} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{\left(r + \frac{\log x}{2i\pi}\right)^{1-s}} + \frac{e^{-i\pi s} \Gamma(1-s)}{2i\pi} \int_r \frac{xz^{s-1} dz}{e^z - x}.$$

La somme qui entre dans cette équation est évidemment convergente, puisque la partie réelle de s est supposée négative.

En remplaçant z par $e^{i\pi} z$, l'intégrale $\int_r \frac{xz^{s-1} dz}{e^z - x}$ se transformera en $e^{i\pi(s-1)} \int_{\ell} \frac{xz^{s-1} dz}{x - e^{-z}}$, la nouvelle variable z décrivant le lacet désigné par l'indice ℓ ; on aura donc

$$\zeta(s, x) = \frac{(2i\pi)^s}{\Gamma(s)} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{\left(r + \frac{\log x}{2i\pi}\right)^{1-s}} - \frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi} \int_{\ell} \frac{xz^{s-1} dz}{x - e^{-z}}.$$

Développons $\frac{x}{x - e^{-z}}$ suivant les puissances ascendantes de $\frac{e^{-z}}{x}$, en supposant pour le moment x plus grand que toutes les valeurs que puisse prendre e^{-z} .

Nous aurons

$$\int_{\ell} \frac{xz^{s-1} dz}{x - e^{-z}} = \int_{\ell} z^{s-1} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{-nz}}{x^{n+1}} dz = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{x^{n+1}} \int_{\ell} e^{-nz} \cdot z^{s-1} dz.$$

L'intégrale $\int_{\ell} z^{s-1} dz$ est nulle, puisqu'on peut étendre le contour d'intégration jusqu'à l'horizon, et l'intégrale prise le long de l'horizon est égale à zéro, d'après la supposition faite sur s . Le premier terme de la somme est donc celui pour lequel on a $n = 1$.

L'intégrale $\int_I e^{-nz} z^{s-1} dz$ peut évidemment être remplacée par $\frac{1}{n^s} \int_I e^{-z} z^{s-1} dz$.

Mais $\int_I e^{-z} z^{s-1} dz$ n'est autre chose que $2i \sin \pi s e^{i\pi s} \Gamma(s)$.

C'est ce qui est facile à vérifier en considérant pour l'instant la partie réelle de s comme positive, et en réduisant ensuite le lacet à deux droites allant de ∞ à 0 et de 0 à $+\infty$. Nous aurons donc

$$\int_I \frac{x z^{s-1} dz}{x - e^{-z}} = 2i \sin \pi s e^{i\pi s} \Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \frac{1}{x^n},$$

$$\zeta(s, x) = \frac{(2i\pi)^s}{\Gamma(s)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\left(r + \frac{\log x}{2i\pi}\right)^{1-s}} - e^{i\pi s} \zeta\left(s, \frac{1}{x}\right)$$

ou bien

$$(4) \quad \zeta(s, x) + e^{i\pi s} \zeta\left(s, \frac{1}{x}\right) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} e^{\frac{i\pi}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\left(r + \frac{\log x}{2i\pi}\right)^{1-s}}.$$

Cette relation est contenue comme cas particulier dans une formule qui a été donnée par M. Lerch, dans une Note très intéressante insérée dans les *Acta mathematica* (t. XI). M. Lerch désigne par $R(w, x, s)$ la fonction définie par la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi i x}}{(w+k)^s}$$

et démontre d'une manière élégante l'équation suivante :

$$R(w, x, 1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left[e^{i\pi(\frac{1}{2}s - 2wx)} R(x, -w, s) + e^{i\pi(-\frac{1}{2}s + 2w(1-x))} R(1-x, w, s) \right].$$

De cette formule, on pourrait déduire l'équation (4), en posant $x=1$ et en supposant que la partie réelle de s est négative. J'ai préféré démontrer directement la relation (4) en suivant la marche qui m'y a conduit la première fois.

Si l'on compare les deux équations (1) et (4), on est tenté de soupçonner qu'il y a une certaine liaison entre la fonction

$$\chi\left(s, \frac{\log x}{2i\pi}\right),$$

définie pour des valeurs entières et positives de s , et la somme

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{\left(r + \frac{\log x}{2i\pi}\right)^{1-s}},$$

qui n'est convergente que si la partie réelle de s est négative. Il y a lieu de présumer qu'il existe une fonction de s et de x , comprenant comme cas particulier, d'une part, cette série et, d'autre part, la fonction connue sous le nom de *Bernoulli*.

En effet, considérons la somme $\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{(r+x)^s}$. En profitant de l'équation $\Gamma(s) = (r+x)^s \int_0^{\infty} e^{-z(r+x)} z^{s-1} dz$, nous pourrons écrire

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{(r+x)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-xz} z^{s-1} \sum_{r=0}^{r=\infty} e^{-rz} dz = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xz} z^{s-1} dz}{1 - e^{-z}}.$$

Pour que l'intégrale soit convergente, il faut supposer que la partie réelle de x est positive, et, en outre, la partie réelle de s doit être plus grande que l'unité. Mais, à ces conditions, il est facile de voir que l'intégrale $\int_l \frac{e^{-xz} z^{s-1} dz}{1 - e^{-z}}$, prise le long d'un lacet partant du point $+\infty$ et entourant l'origine en sens direct, est égale à $2i \sin \pi s e^{i\pi s} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xz} z^{s-1} dz}{1 - e^{-z}}$. Nous pourrons donc remplacer $\int_0^{\infty} \frac{e^{-xz} z^{s-1} dz}{1 - e^{-z}}$ par $\frac{e^{-i\pi s}}{2i \sin \pi s} \int_l \frac{e^{-xz} z^{s-1} dz}{1 - e^{-z}}$, et cette dernière intégrale s'appliquera à des valeurs quelconques de s . Remplaçons encore z par $e^{i\pi} z$. Le lacet désigné par l'indice l se transformera en un autre qui part du point $-\infty$ et entoure l'origine en sens direct. L'argument de la nouvelle variable z commence par $-\pi$ et augmente jusqu'à $+\pi$. Pour désigner ce contour d'intégration différent des deux lacets que nous avons rencontrés jusqu'ici, j'emploierai l'indice L . D'après cela, nous aurons

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{(r+x)^s} &= - \frac{1}{2i \sin \pi s \Gamma(s)} \int_l \frac{e^{xz} z^{s-1} dz}{e^z - 1} \\ &= - \frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi} \int_L \frac{e^{xz} z^{s-1} dz}{e^z - 1}. \end{aligned}$$

En substituant $1 - s$ au lieu de s , il suit

$$-\frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{(r+x)^{1-s}} = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{e^{xz} z^{-s} dz}{e^z - 1}.$$

L'intégrale $\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{e^{xz} z^{-s} dz}{e^z - 1}$ met en évidence la liaison avec la fonction de Bernoulli $\chi(s, x)$. En effet, supposons que s soit un nombre entier positif; le lacet désigné par L pourra être réduit à un cercle entourant l'origine en sens direct. En développant l'expression $\frac{e^{xz} z^{-s}}{e^z - 1}$ suivant les puissances ascendantes de z et en intégrant ensuite, tous les termes du développement disparaîtront, excepté celui qui contient la variable z à la puissance -1 . Mais le coefficient de z^{-1} dans le développement est précisément $\chi(s, 1)$. L'intégrale $\frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{e^{xz} z^{-s} dz}{e^z - 1}$ contient donc, en effet, comme cas particulier, la fonction de Bernoulli. Si je désigne cette fonction généralisée par le même symbole, je pose

$$\chi(s, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{e^{xz} z^{-s} dz}{e^z - 1}.$$

Nous pouvons donc écrire

$$-\frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{(r+x)^{1-s}} = \chi(s, x),$$

et l'équation (4) se transforme en

$$(5) \quad \zeta(s, x) + e^{i\pi s} \zeta\left(s, \frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{i\pi}{2}s} (2\pi)^s \chi\left(s, \frac{\log x}{2i\pi}\right),$$

résultat qui comprend comme cas particulier la relation (1).

La fonction généralisée de Bernoulli $\chi(s, x)$ me semble mériter d'être étudiée plus spécialement. Pour le moment, je ne puis en indiquer que les propriétés suivantes :

La dérivée par rapport à x de la fonction $\chi(s, x)$ est aussi une fonction de Bernoulli. Il est très facile de voir que

$$\frac{d}{dx} \chi(s, x) = \chi'(s, x) = \chi(s-1, x),$$

relation qui était bien connue pour des valeurs entières et positives de s .

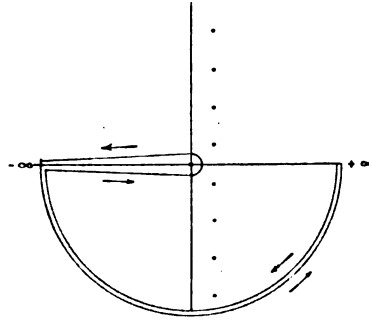
Considérons, de plus, la fonction

$$\chi(s, 1-x) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{e^{(1-x)z} z^{-s} dz}{e^z - 1},$$

en supposant pour le moment que la partie réelle de x est entre 0 et +1.

Si la partie réelle de s est essentiellement positive, l'intégrale prise le long de l'horizon sera nulle, et nous pourrons ajouter au lacet L la partie de l'horizon située au-dessous de l'axe réel, de la manière indiquée par la *fig. 2*. La variable z part du point $+\infty$,

Fig. 2.



parcourt un demi-cercle de rayon infiniment grand situé au-dessous de l'axe réel, décrit le lacet L et revient par le même demi-cercle à $+\infty$. L'argument de z commence par 0, diminue jusqu'à $-\pi$ et augmente ensuite jusqu'à 2π .

En fixant les deux bouts de ce contour et en le resserrant en vertu du théorème de Cauchy, il est facile de voir que le contour pourra être transformé en un lacet (ℓ) et en deux courbes fermées entourant les points critiques $-2in\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), l'une en sens direct, l'autre en sens inverse. Ces deux courbes pourront, de plus, être réduites à des cercles infiniment petits entourant les points critiques. La variable z , parcourant un de ces cercles en sens direct, aura un argument situé entre π et 2π , et l'intégrale correspondante $\frac{1}{2i\pi} \int \frac{e^{(1-x)z} z^{-s} dz}{e^z - 1}$ a donc la valeur

$$e^{2ni\pi x} e^{-\frac{3i\pi}{2}s} (2n\pi)^{-s}.$$

Mais, si la variable z parcourt le même cercle en sens inverse, son argument sera compris entre $-\pi$ et 0, et l'intégrale correspondante $\frac{1}{2i\pi} \int \frac{e^{(1-x)z} z^{-s} dz}{e^z - 1}$ est égale à $-e^{2ni\pi x} e^{\frac{i\pi}{2}s} (2n\pi)^{-s}$. La somme de ces deux intégrales est

$$-e^{-\frac{i\pi}{2}s} (e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}) e^{2ni\pi x} (2n\pi)^{-s} = -2i \sin \pi s e^{-\frac{i\pi}{2}s} \frac{e^{2ni\pi x}}{(2n\pi)^s},$$

et n y prendra toutes les valeurs entières et positives de 1 à ∞ .

Dans l'intégrale $\frac{1}{2i\pi} \int_l \frac{e^{(1-x)z} z^{-s} dz}{e^z - 1}$, prise le long du lacet (l) qui part de $+\infty$ et enferme l'origine en sens direct, remplaçons z par $e^{i\pi} z$. La nouvelle variable z parcourra le lacet L, et l'intégrale se transformera en

$$\frac{1^n}{2i\pi} e^{-i\pi s} \int_L \frac{e^{-(1-x)z} z^{-s} dz}{1 - e^{-z}} = \frac{e^{-i\pi s}}{2i\pi} \int_L \frac{e^{xz} z^{-s} dz}{e^z - 1} = e^{-i\pi s} \chi(s, x).$$

En ayant égard à ce que nous venons de dire, nous trouverons la relation suivante

$$\chi(s, 1-x) = e^{-i\pi s} \chi(s, x) - 2i \sin \pi s e^{-\frac{i\pi}{2}s} \frac{1}{(2\pi)^s} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{2ni\pi x}}{n^s}$$

ou bien

$$(6) \quad \chi(s, 1-x) = e^{-i\pi s} \chi(s, x) - 2i (2\pi)^{-s} e^{-\frac{i\pi}{2}s} \sin \pi s \cdot \zeta(s, e^{i\pi x}).$$

Cette équation montre la relation intime qui existe entre la fonction $\zeta(s, x)$ et la fonction de Bernoulli. La fonction ζ peut être exprimée par deux fonctions χ de la manière suivante :

$$\zeta(s, e^{2i\pi x}) = (2\pi)^s \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}s} \chi(s, x) - e^{\frac{i\pi}{2}s} \chi(s, 1-x)}{2i \sin \pi s}.$$

Si s est un nombre entier positif ou négatif, la fraction prend la valeur indéterminée $\frac{0}{0}$.

Je ne veux pas entrer dans plus de détails sur ce sujet. Le but principal de cette Note était de déduire l'équation (5). Je fais encore remarquer que cette équation pourrait aisément être démontrée en partant de l'équation de définition de la fonction généralisée de Bernoulli que j'ai donnée plus haut.

Sur les lois de force centrale fonction de la distance pour laquelle toutes les trajectoires sont algébriques; par M. G. KOENIGS.

1. Soit $f'(r)$ une loi de force centrale fonction de la distance; le mouvement sur le rayon vecteur est défini par l'équation

$$(1) \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2f(r) + h - \frac{c^2}{r^2}.$$

h est la constante des forces vives, et c est la constante des aires.

Supposons que, dans une zone Z comprise entre les cercles de rayons a et $b > a$ dont les centres sont à l'origine, la force soit attractive, c'est-à-dire que $f'(r)$ soit négative entre a et b . Prenons un point M_0 dont le r sera égal à r_0 , et lançons de ce point le mobile avec une vitesse angulaire θ'_0 et une vitesse d'élongation r'_0 . On aura

$$(2) \quad c = r_0^2 \theta'_0, \quad h = r_0'^2 - 2f(r_0) + r_0^2 \theta_0'^2.$$

Soit r_1 une valeur de r supérieure à r_0 , mais comprise entre a et b ,

$$b > r_1 > r_0 > a;$$

comme $f'(r) < 0$, la fonction $f(r)$ est décroissante; on a donc

$$f(r_0) - f(r_1) > 0.$$

Il est alors possible de déterminer la quantité θ'_0 , de telle sorte que l'expression

$$(I) \quad 2[f(r_0) - f(r_1)] - \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_1^2} r_0^2 \theta_0'^2 > 0$$

soit positive; choisissons ensuite r'_0 vérifiant l'inégalité

$$(I') \quad r_0'^2 < 2[f(r_0) - f(r_1)] - \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_1^2} r_0^2 \theta_0'^2.$$

Cela posé, si nous étudions le mouvement correspondant à ce choix des données initiales, nous verrons que le second membre de (1) est positif pour $r = r_0$, mais négatif pour $r = r_1$, en vertu de l'inégalité (I').

Cela prouve que la trajectoire est tout entière comprise à l'intérieur du cercle de rayon r_1 qui a son centre à l'origine; de là le lemme suivant :

LEMME. — *Si une loi de force centrale fonction de la distance est attractive dans une zone L, tous les mouvements dont les données initiales vérifient certaines inégalités ont lieu sur des trajectoires comprises à l'intérieur d'un cercle de rayon fini.*

En un mot, ces trajectoires n'ont pas de point à l'infini; représentons par (T) l'ensemble de ces trajectoires soumises, répétons-le, à de simples conditions d'inégalité pour les données initiales.

2. Ce lemme conduit au corollaire suivant :

Si une loi de force centrale fonction de la distance a toutes ses trajectoires algébriques et si, de plus, elle est attractive dans une certaine zone, toutes les trajectoires (T) relatives à cette zone étant à distance finie sont nécessairement fermées puisqu'elles sont algébriques.

Il suit de là, d'après un théorème bien connu de M. Bertrand, que la loi de force doit être la loi d'attraction de la nature, ou la loi d'attraction proportionnelle à la distance.

On peut en effet énoncer le théorème de M. Bertrand sous la forme suivante, immédiatement applicable au cas qui nous occupe.

Si une loi de force centrale fonction de la distance est telle que, sous le bénéfice de certaines inégalités entre les données initiales, les trajectoires satisfaisant à ces inégalités soient toutes fermées, la loi est justement l'attraction de la nature ou l'attraction proportionnelle à la distance.

3. Mais il se peut que la loi de force centrale ne soit attractive dans aucune zone, et alors le raisonnement précédent n'est plus applicable, parce que l'on ne peut plus satisfaire à l'inégalité (I).

Pour lever cette difficulté, il suffit de faire la remarque suivante.

Supposons généralement qu'on ait dans le plan les équations d'un mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda Y \quad (1).$$

(1) Dans une Note aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, M. Appell a attiré le premier l'attention sur l'indifférence du facteur λ vis-à-vis des trajectoires.

où λ est une constante arbitraire et X, Y des fonctions de x, y .

Tous les mouvements qui correspondent à diverses valeurs de λ ont les mêmes trajectoires. On sait en effet qu'on obtient l'équation du troisième ordre des trajectoires en éliminant le temps entre ces deux équations; or il est clair que λ s'élimine en même temps que t .

On peut dire encore que l'on passe d'un mouvement à l'autre en y remplaçant t par $t\sqrt{\lambda}$.

Prenons, en particulier, $\lambda = -1$, et nous arrivons au résultat suivant.

Les mouvements

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X, & \frac{d^2x}{dt^2} &= -X, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y, & \frac{d^2y}{dt^2} &= -Y \end{aligned}$$

ont les mêmes trajectoires ou, si l'on veut s'en tenir à la considération du temps réel, les trajectoires de ces deux mouvements constituent en quelque sorte les deux moitiés d'une même famille de courbes à trois paramètres.

Il suit de là que, si les trajectoires d'un mouvement sont algébriques, celles du second le sont aussi. On peut ainsi ramener le cas d'une force centrale répulsive au cas d'une force attractive et retomber sur le problème de M. Bertrand.

On a donc ce théorème général :

Les seules lois de forces centrales fonctions de la distance pour lesquelles les trajectoires sont toutes algébriques sont l'attraction et la répulsion en raison inverse du carré de la distance, et l'attraction et la répulsion proportionnelles à la distance.

Sur une proposition empirique énoncée au Bulletin;
par M. JOSEPH PERROTT.

Au tome XVI, page 129, du *Bulletin de la Société mathématique*, M. Catalan a donné un théorème empirique sur lequel il a appelé l'attention des géomètres, et qu'il n'a d'ailleurs énoncé que sous une forme dubitative.

Cette proposition est la suivante :

n étant un nombre entier, soit n_1 la somme des diviseurs de n , inférieurs à n , soit n_2 la somme des diviseurs de n_1 , inférieurs à n_1 , etc. Cela posé, les nombres $n, n_1, n_2, \dots$ tendent vers une limite λ , laquelle est 1 ou un nombre parfait.

Elle ne semble pas exacte : si l'on fait $n = 220$, on aura

$$n_1 = 284, \quad n_2 = 220, \quad n_3 = 284, \quad n_4 = 220$$

et, d'une manière générale,

$$n_{2k} = 220, \quad n_{2k+1} = 284.$$

On n'arrive donc pas à une limite.

Sur les fonctions réduites suivant un module premier ;
par M. A.-E. PELLET.

1. La théorie des fonctions entières, réduites suivant un module premier p , offre la plus grande analogie avec celle des équations abéliennes, et, en retour, la théorie algébrique des équations en retire le plus précieux concours au point de vue des applications.

Le théorème qui sert de base à la méthode que j'ai développée dans le *Bulletin* (t. XV, p. 66) devient ici :

$\theta(x)$ étant une fonction rationnelle à coefficients entiers, soit μ le nombre de valeurs distinctes qu'elle prend lorsqu'on remplace x successivement par les m racines d'une congruence irréductible $(\text{mod } p)$ et de degré m ; μ est un diviseur de m et ces μ valeurs sont racines d'une congruence irréductible.

Ainsi soit A une fonction rationnelle d'un nombre quelconque de racines de congruences irréductibles suivant le mod p : formons la suite

$$A, \quad A^p, \quad A^{p^2}, \quad \dots, \quad A^{p^t}, \quad \dots$$

Soit ν le nombre de valeurs distinctes comprises dans cette suite; on a $A^{p^\nu} \equiv A \pmod{p}$, et ces ν valeurs sont racines d'une congruence irréductible $(\text{mod } p)$ à coefficients entiers. En effet, quel que soit le nombre de ces congruences, leurs racines peuvent

s'exprimer en fonction entière d'une racine d'une seule congruence irréductible dont le degré est égal au plus petit multiple commun des degrés de ces diverses congruences. Posant $A \equiv f(i)(\text{mod } p)$, il vient $f(i^p) \equiv A^p$.

2. Supposons que l'on connaisse l'exposant de A , c'est-à-dire le plus petit nombre n , tel que $A^n \equiv 1(\text{mod } p)$; on en conclura facilement le nombre ν ; ν est le plus petit nombre, tel que $p^\nu - 1$ soit divisible par n . On aura des indications sur cet exposant n , lorsqu'on connaîtra une relation de la forme $A^m \equiv a(\text{mod } p)$, a étant un nombre réel ou imaginaire d'exposant connu. Remarquons d'abord qu'on peut supposer m premier avec p ; car de $A^{mp} \equiv a$, on déduit $A^m \equiv a^{p^{\nu-1}}$, ν étant le degré de la fonction irréductible dont a est racine. Désignons par e l'exposant de a ; de la congruence $A^m \equiv a(\text{mod } p)$, on déduit $A^{me} \equiv 1(\text{mod } p)$. Soit g une racine primitive de la congruence

$$(1) \quad x^{me} = 1 \pmod{p};$$

a et A sont des puissances de g . Posons $a \equiv g^{km}$; k est premier avec e ; et $x \equiv g^{\xi m}$. La congruence $x^m \equiv a(\text{mod } p)$ deviendra

$$g^{\xi m} - g^{km} \equiv 0 \pmod{p};$$

d'où

$$\xi m - km \equiv 0 \pmod{me};$$

et enfin

$$\xi \equiv k \pmod{e}.$$

Ainsi l'on a

$$A \equiv g^{k+\alpha e} \pmod{p},$$

α étant un des nombres $0, 1, 2, 3, \dots (m-1)$.

L'exposant n auquel appartient $g^{k+\alpha e}$ est le plus petit nombre n tel que $(k + \alpha e)n$ soit divisible par me . Soit e_1 le produit des facteurs premiers de e , entrant dans m pris avec l'exposant dont ils sont affectés dans m ; $\frac{m}{e_1}$ est premier avec e ; k étant premier avec e l'est aussi avec $e_1 e$, et, pour que le produit $(k + \alpha e)n$ soit divisible par $e_1 e$, il faut que n le soit. En particulier, si m ne contient que des facteurs premiers divisant e , on a $e_1 = m$, $n = e_1 e$. On déduit de là ce théorème de M. Serret : Si dans une fonction $F(x)$ irréductible $(\text{mod } p)$, de degré ν et d'exposant n , on

remplace x par x^λ , λ ne renfermant que des facteurs premiers qui entrent dans n , $F(x^\lambda)$ se décompose en facteurs irréductibles d'exposant $n\lambda$ et, par suite, d'égal degré; le degré de ces facteurs est égal à νq , q étant le plus petit nombre tel que $p^{\nu q} - 1$ soit divisible par $n\lambda$. La recherche de ce nombre q est un problème d'Arithmétique complètement résolu par M. Serret dans son *Algèbre supérieure* (t. II, chap. III).

3. Désignons par P le produit des racines de la congruence $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$ et par i une de ses racines; on a

$$i^{1+p+p^2+\dots+p^{\nu-1}} \equiv P \pmod{p}.$$

e étant l'exposant de P , le nombre e_1 sera tel que $\frac{p^\nu-1}{(p-1)e_1}$ soit premier avec e , et l'exposant n de i sera un multiple de $e_1 e$, $n_1 e_1 e$, divisant $\frac{p^\nu-1}{p-1} e$. Prenons pour λ un facteur premier de e ; la fonction $F(x^\lambda)$ appartient à l'exposant $\lambda n_1 e_1 e$; on a

$$\frac{p^{\nu q}-1}{\lambda n_1 e_1 e} = \frac{p^\nu-1}{n_1 e_1 (p-1)} \frac{(p^{\nu q}-1)(p-1)}{(p^\nu-1)\lambda e}.$$

Le premier facteur du produit qui figure au second membre est un nombre entier non divisible par λ ; si donc $\frac{p^\nu-1}{e}$ n'est pas divisible par λ , il faut que $\frac{p^{\nu q}-1}{p^\nu-1}$ le soit; ce qui exige que $q = \lambda$; donc, λ étant un facteur premier de e ne divisant pas $\frac{p^\nu-1}{2e}$, $F(x^\lambda)$ est irréductible $\pmod{p}$; si λ divise $\frac{p^\nu-1}{e}$, $F(x^\lambda)$ se décompose en λ facteurs irréductibles de degré ν et d'égal exposant.

Dans le cas où λ est un nombre premier divisant $p-1$, mais ne divisant pas e , $F(x^\lambda)$ se décompose encore en λ facteurs irréductibles de degré ν , mais l'exposant n'est pas le même pour tous les facteurs.

Exemple. — Soit $P \equiv -1 \pmod{p}$; e est égal à 2. Si $\frac{p^\nu-1}{2}$ est impair ou p de la forme $4m-1$, $F(x^2)$ est irréductible; si, de plus, le degré de $F(x)$ est pair, le produit des racines de $F(x^2)$ est encore congru à -1 et $F(x^{2^\alpha})$ est irréductible, quel que soit l'entier α .

4. Comme seconde application du théorème fondamental, nous établirons le théorème suivant :

$F(x)$ étant une fonction irréductible $(\text{mod } p)$, de degré ν , dans laquelle le coefficient du terme de degré $\nu - 1$ n'est pas congru à 0 $(\text{mod } p)$, la fonction $F(x^p - x)$, obtenue en remplaçant x par $x^p - x$ dans la première, est irréductible.

Soit I une racine de la congruence

$$(1) \quad I^p - I \equiv i \pmod{p},$$

i étant une racine de $F(x) \equiv 0$. On a

$$I^{p^2} \equiv I + i + i^p, \quad I^{p^3} \equiv I + i + i^p + i^{p^2}, \quad \dots$$

Soit $I^{p^k} \equiv I \pmod{p}$, on en conclut

$$i + i^p + i^{p^2} + \dots + i^{p^{k-1}} \equiv 0 \pmod{p};$$

d'où, élevant à la puissance p^{k-1} et retranchant membre à membre,

$$i^{p^k} - i \equiv 0 \pmod{p},$$

ce qui exige que k soit divisible par ν . Désignons par s_1 la somme $i + i^p + i^{p^2} + \dots + i^{p^{\nu-1}}$; on a

$$I^{p^\nu} \equiv I \pmod{p}$$

si $s_1 \equiv 0 \pmod{p}$, et I est alors racine d'une congruence irréductible de degré ν . Les p racines de la congruence (1) sont effectivement données par la formule

$$I \equiv \alpha_0 + \frac{1}{\nu} (i^p + 2i^{p^2} + \dots + (\nu - 1)i^{p^{\nu-1}}),$$

où α_0 est un des nombres 0, 1, 2, ..., $p - 1$, lorsque ν n'est pas divisible par p . Mais, si s_1 n'est pas congru à 0, on aura

$$I^{p^\nu} \equiv I + s_1, \quad I^{p^{m\nu}} \equiv I + ms_1,$$

et, pour que $I^{p^{m\nu}}$ soit congru à I , il faut et il suffit que m soit divisible par p . Ainsi, dans ce cas, le plus petit nombre k tel que $I^{p^k} \equiv I \pmod{p}$ est $p\nu$.

Il faut remarquer, pour l'application de ce théorème et de celui qui précède, que, par une transformation linéaire, on pourra presque toujours donner au produit et à la somme des racines d'une congruence une valeur assignée.

Exemple. — Si, dans $x - 1$, on change x en $x^p - x$, on obtient la fonction $x^p - x - 1$, qui est irréductible. La congruence

$$x^p - x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

transformée de $x^p - x - 1$, en changeant x en $\frac{1}{x}$ est aussi irréductible: la somme des racines est congrue à -1 ; en changeant x en $x^p - x$, la nouvelle congruence sera irréductible

$$x^{p^2} - x^p + (x^p - x)^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Sur les périodes des racines de l'unité.

5. P étant un nombre premier, considérons la congruence

$$(1) \quad \frac{x^p - 1}{x - 1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Son premier membre se décompose en $\frac{P-1}{\nu}$ facteurs irréductibles de degré ν , exposant de p relativement à P , c'est-à-dire plus petit nombre, tel que $p^\nu - 1$ soit divisible par P . Désignons par G une racine primitive du nombre premier P , et par θ une racine de la congruence (1), qui peut être réelle ou imaginaire. Les racines de cette congruence seront

$$\theta, \theta^G, \theta^{G^2}, \dots, \theta^{G^{p-1}}.$$

Soit $f(x) = 0$ l'équation aux q périodes des racines P èmes de l'unité. Les racines de la congruence $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ sont

$$s_i \equiv \sum_{i_1=0}^{i_1=\omega-1} \theta^{G^{i_1+i_2q}} \pmod{p},$$

ω désignant $\frac{P-1}{q}$ et i un des nombres $0, 1, 2, \dots, q-1$.

Elles sont réelles si ν divise ω , et il y en a d'imaginaires si ν ne divise pas ω .

En effet, soit $p \equiv G^{x+\beta q} \pmod{P}$: p^ν étant congru à $1 \pmod{P}$, $\nu(x + \beta q)$ est divisible par $P-1$; on a: $\nu x = m \cdot \omega q - \beta \nu q$; et l'on voit que x est égal à 0 si ν divise ω , différent de 0 si ν ne divise pas ω . Il vient

$$(\theta^{G^{x+\beta q}})^p \equiv \theta^{G^{x+\beta q} + \nu(x+\beta q)} \pmod{p}.$$

Si α est égal à 0, s_i^p est donc congru à s_i , qui est par suite un nombre réel; mais si α n'est pas nul, $s_i^p \equiv s_{i+\alpha} \pmod{p}$; si donc s_i est réel, on aura dans ce cas

$$s_i \equiv s_{i+\alpha} \equiv s_{i+2\alpha} \equiv s_{i+3\alpha} \equiv \dots \pmod{p},$$

et s_i sera une racine multiple de la congruence $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$, son degré de multiplicité sera un diviseur de q . D'ailleurs les q nombres s_i ne peuvent être réels, car autrement on en déduirait la décomposition de $\frac{x^p-1}{x-1}$ en q facteurs à coefficients entiers, et réels de degré $\frac{p-1}{q}$; ces facteurs se décomposeraient en $\frac{p-1}{q \cdot v}$, facteurs d'égal degré v ; v diviserait donc $\frac{p-1}{q} = \omega$, ce qui est contre l'hypothèse.

6. L'équation aux deux périodes des racines $P^{\text{èmes}}$ de l'unité est

$$x^2 + x + \frac{1 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} P}{4} = 0.$$

Elle est irréductible $(\text{mod } 2)$ si le produit de ses racines est un nombre impair, et elle a deux racines réelles $(\text{mod } 2)$ si ce produit est un nombre pair. Ainsi 2 est résidu quadratique pour les nombres premiers de la forme $8k \pm 1$, non-résidu quadratique pour les nombres premiers de la forme $8k \pm 3$.

Pour tout nombre premier p différent de 2, nous pouvons mettre le premier membre de l'équation aux deux périodes sous la forme

$$(2x+1)^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} P = 0.$$

Elle a deux racines réelles $(\text{mod } p)$ ou est irréductible $(\text{mod } p)$, suivant que $\left[(-1)^{\frac{p-1}{2}} P\right]^{\frac{p-1}{2}}$ est congru à 1 ou $-1 \pmod{p}$; d'où, en employant le symbole $\left(\frac{P}{p}\right)$ pour désigner ± 1 suivant que P est résidu quadratique ou non suivant le module p ,

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{p-1}{2} \left(\frac{P}{p}\right) \left(\frac{p}{P}\right) = 1.$$

qui exprime un théorème célèbre de Legendre.

7. Si $P - 1$ est divisible par 8, on a, pour l'équation aux quatre périodes,

$$y^2 - xy - (b^2 + m^2 + mx) = 0,$$

b et m étant définis par l'équation

$$16b^2 + (4m - 1)^2 = P,$$

et x étant une des racines de l'équation

$$x^2 + x + \frac{1-P}{4} = 0.$$

(Voir mon Mémoire *Sur la théorie des équations algébriques*, *Bulletin de la Société*, année 1887.)

Pour le nombre premier 2, les racines de la congruence aux deux périodes sont 0 et 1; les quatre périodes sont données par les congruences

$$y^2 - (b^2 + m^2) \equiv 0, \quad y^2 + y - b^2 \equiv 0 \pmod{2},$$

en remarquant que $m^2 + m$ est toujours divisible par 2. Les quatre périodes sont réelles si b est pair; il y en a deux d'imaginaires si b est impair; dans le premier cas, 2 est résidu biquadratique (mod P); dans le second cas, il est non-résidu biquadratique (mod P).

Pour tout nombre premier p différent de 2, nous pouvons mettre le premier membre de la congruence aux quatre périodes sous la forme

$$(1) \quad \left(z^2 - \frac{P}{16}\right)^2 - \frac{P}{4} \left(z + \frac{a}{4}\right)^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

en posant

$$y + \frac{1}{4} = z, \quad a = 4m - 1.$$

Cherchons dans quel cas p est résidu biquadratique (mod P). Il faut d'abord qu'il soit résidu quadratique et alors P , d'après le théorème de Legendre, est aussi résidu quadratique (mod p); soit $P \equiv \alpha^2 \pmod{p}$. La congruence (1) se décompose dans les deux suivantes :

$$z^2 - \frac{\alpha}{2} z - \frac{\alpha^2 + 2\alpha z}{16} \equiv 0, \quad z^2 + \frac{\alpha}{2} z - \frac{\alpha^2 - 2\alpha z}{16} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Pour que les quatre périodes soient réelles, il faut et il suffit

que les deux nombres

$$(n) \quad 2x(x+a), \quad 2x(x-a)$$

soient résidus quadratiques (mod p). Leur produit, étant congru à $4x^2(x^2 - a^2) \equiv \frac{x^2 b^2}{4}$, est résidu quadratique (mod p) si p ne divise pas b .

Si p divise b , l'un des nombres (n) est congru à 0 (mod p), l'autre à $4x^2$ (mod p); p est donc résidu biquadratique (mod P). Si p divise a , les deux nombres n se réduisent à $2x^2$ (mod p); ils sont résidus quadratiques (mod p), et, par suite, p résidu biquadratique (mod P) si p est de la forme $8k \pm 1$.

p ne divisant ni b ni a , posons $a \equiv r\alpha$ (mod p). Pour que les nombres (n) soient résidus quadratiques (mod p), il faut qu'on ait à la fois

$$r^{p-1} - 1 \equiv 0, \quad (1+r)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (1-r)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Ces congruences sont incompatibles pour p égal à 3, 5, 7, et, par conséquent, ces nombres ne peuvent être résidus biquadratiques (mod P) que s'ils divisent b ou a .

8. Si $P-1$ est divisible par 4, mais non par 8, 2 n'est pas résidu biquadratique (mod P); en désignant par $z = \frac{1}{4}$ une des quatre périodes des racines $P^{\text{ièmes}}$ de l'unité, on a l'équation

$$\left(z^2 + \frac{3P}{4}\right)^2 - \frac{P}{4}\left(z + \frac{\alpha}{4}\right)^2 = 0,$$

α étant déterminé par les deux conditions

$$4b^2 + a^2 = P, \quad a \equiv -1 \pmod{4}.$$

Supposant p résidu quadratique (mod P), nous pourrions poser $P \equiv x^2$ (mod p), x étant réel, comme plus haut. La congruence

$$\left(z^2 + \frac{3x^2}{16}\right)^2 - \frac{x^2}{4}\left(z + \frac{\alpha}{4}\right)^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

se décompose dans les deux suivantes :

$$z^2 - \frac{x}{2}z + \frac{3x^2 - 2\alpha x}{16} \equiv 0, \quad z^2 + \frac{x}{2}z + \frac{3x^2 + 2\alpha x}{16} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Pour que leurs racines soient réelles, il faut et il suffit que les

deux nombres

$$(n') \quad -2x(x-a), \quad -2x(x+a)$$

soient résidus quadratiques (mod p). C'est donc la condition nécessaire et suffisante pour que p soit résidu biquadratique (mod P).

Si p divise b , l'un des nombres (n') est congru à 0 (mod p), l'autre à $-4x^2$; p sera donc résidu biquadratique (mod P) s'il est de la forme $4m+1$, non-résidu biquadratique s'il est de la forme $4m-1$. Si p divise a , les nombres (n') sont congrus à $-2x^2$; p sera donc résidu biquadratique (mod P) s'il est de l'une des deux formes $8k+1$ ou $8k+3$, non-résidu biquadratique s'il est de l'une des formes $8k+5$, $8k+7$.

p ne divisant ni a ni b , posons $a \equiv rx \pmod{p}$. Pour que les nombres (n') soient résidus biquadratiques (mod p), il faut qu'on ait à la fois

$$r^{p-1} - 1 \equiv 0, \quad (1+r)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (1-r)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-2)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Ces congruences sont incompatibles si p est égal à 3 ou à 5; toujours satisfaites si $p = 7$.

9. L'équation aux trois périodes des racines P ièmes de l'unité est

$$x^3 + x^2 - \omega x - \frac{P(n_0+1) - \omega^2}{3} = 0,$$

ω désignant le rapport $\frac{P-1}{3}$ et n_0 étant déterminé par l'équation

$$27N^2 + (9n_0 - 3\omega + 7)^2 = 4P.$$

Posons $n_0 = -1 + \omega^2 + 3m$; l'équation aux trois périodes devient

$$x^3 + x^2 - \omega x - \omega^3 - 3m\omega - m = 0,$$

et la relation précédente montre que l'on a

$$N^2 - m + \omega^2(\omega - 1) \equiv 0 \pmod{3}.$$

Faisant dans la congruence

$$x^3 + x^2 - \omega x - \omega^3 - m \equiv 0 \pmod{3},$$

ou

$$x^3 + x^2 - \omega x - N^2 + \omega^3 + \omega^2 \equiv 0 \pmod{3},$$

les trois hypothèses ω congru à 0, 1 ou 2 (mod 3), on voit que,

pour qu'elle ait ses trois racines réelles, il faut et il suffit dans chaque cas que N soit divisible par 3. La condition nécessaire et suffisante pour que 3 soit résidu cubique (mod P) est donc que $4P = 27 \cdot 9 \cdot N^2 + L^2$.

Pour tout nombre premier p autre que 3, nous poserons $3x + 1 = y$, et l'équation aux trois périodes devient

$$y^3 - 3Py - PL = 0,$$

L étant déterminé par les deux conditions

$$4P = L^2 + 27N^2, \quad L \equiv 1 \pmod{3}.$$

p sera résidu cubique (mod P) si la congruence

$$y^3 - 3Py - PL \equiv 0 \pmod{p}$$

a ses trois racines réelles. Si p divise N , cette congruence devient

$$y^3 - \frac{3L^2}{4}y - \frac{L^3}{4} \equiv 0 \pmod{p};$$

elle admet la racine simple L et la racine double $-\frac{L}{2}$. Si p divise L , elle devient

$$y^3 - \frac{9^2 N^2}{4}y \equiv 0 \pmod{p};$$

elle a encore ses trois racines réelles. Ainsi, tout nombre divisant N ou L est résidu cubique (mod P).

Pour que le nombre premier p , ne divisant ni L ni N , soit résidu cubique mod P , il faut et il suffit que la congruence

$$y^3 - 3Py - PL \equiv 0 \pmod{p}$$

ait trois racines distinctes et différentes de 0. Il en sera de même de la congruence

$$z^3 - \frac{3P}{\alpha^2}z - \frac{PL}{\alpha^3} \equiv 0 \pmod{p},$$

transformée de la précédente en posant $y \equiv \alpha z$, et l'on peut choisir α de manière que $\frac{3P}{\alpha^2}$ soit congru à 1 si $3P$ est résidu quadratique (mod p), à un nombre non-résidu quadratique assigné si $3P$ est non-résidu quadratique, à 2 par exemple, pour p égal à 5, 11, 13, à 3 si $p = 7$. On voit alors, par un calcul assez court, qu'une telle congruence est impossible pour p égal à 2, 5, 7; ces nom-

bres premiers ne peuvent donc être résidus cubiques (mod P) que s'ils divisent L ou N. Pour p égal à 11, les valeurs (mod 11) de $x^3 - x$ et $x^3 - 2x$ sont respectivement

$$\begin{array}{l} x^3 - x \dots\dots 0, -5, 2, 5, -1, 0, 5, -2, -5, +1 \\ x^3 - 2x \dots\dots -1, 4, -1, 1, 5, 1, -4, 1, -1, 6 \end{array}$$

pour les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, -1, -2, -3, -4, -5 de x .

Les seules congruences satisfaisant aux conditions requises sont donc

$$x^3 - 2x \pm 1 \equiv 0 \pmod{11}.$$

Si donc 11 est résidu cubique (mod P), on doit avoir

$$\frac{3P}{\alpha^2} \equiv 2, \quad \frac{PL}{\alpha^3} \equiv \pm 1 \pmod{11};$$

d'où, par l'élimination de α ,

$$L^2 \equiv 2P \pmod{11}.$$

Cette condition nécessaire est aussi suffisante.

Pour P égal à 13, les valeurs (mod 13) de $x^3 - x$ et de $x^3 - 2x$ sont

$$\begin{array}{l} x^3 - x \dots\dots\dots 0, 6, -2, -5, 3, 2, 0, -6, 2, 5, -3, -2, \\ x^3 - 2x \dots\dots\dots -1, 4, -5, 4, -2, -4, 1, -4, 5, -4, 2, 4 \end{array}$$

pour les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, -1, -2, -3, -4, -5, -6 de x .

Les seules congruences satisfaisant aux conditions requises sont donc

$$x^3 - 2x \pm 4 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Pour que 13 soit résidu (mod P), il faut et il suffit que l'on ait

$$3P \equiv 2\alpha^2, \quad PL \equiv \pm L\alpha^3 \pmod{13},$$

α étant un nombre réel; d'où, par l'élimination de α ,

$$L^2 \equiv 2P \pmod{13}.$$

Ainsi, lorsque l'un des nombres 11 ou 13 ne divise ni L ni N, pour qu'il soit résidu cubique (mod P), il faut et il suffit que l'on ait

$$L^2 \equiv 27N^2 \equiv 2P \pmod{11 \text{ ou } 13}.$$

Cette condition implique que P soit non-résidu quadratique (mod 11 ou 13).

Sur un problème de Géométrie cinématique; par M. LAQUIÈRE.

Dans la séance du 16 juillet 1888, M. Laisant a résolu, par la théorie des équipollences, la question suivante :

Deux mobiles, X, Y, parcourent leurs trajectoires d'un mouvement uniforme; déterminer les éléments de la trajectoire du point Z, qui divise, proportionnellement aux deux vitesses constantes, la droite qui joint les positions simultanées des deux mobiles.

La Géométrie infinitésimale fournit facilement les mêmes résultats. Soient XX' , YY' deux arcs élémentaires correspondants. Menons XX_1 , parallèle à YY' et égal à XX' ; le point Z sera l'intersection des deux droites YX et $Y'X_1$. Menons ensuite ZZ' , parallèle à X, X' ; on aura la position Z' , simultanée de X', Y' , par l'intersection de ZZ' avec $Y'X'$.

Donc l'élément de la trajectoire Z est parallèle à X, X' , c'est-à-dire également incliné sur les deux éléments de X et Y . Calculons sa longueur ZZ' . Soient m, n, φ les grandeurs des deux vitesses et leur angle d'inclinaison mutuelle; on aura les proportions

$$\frac{ZZ'}{X_1X'} = \frac{ZZ'}{2XX' \sin \frac{1}{2}\varphi} = \frac{Z'Y'}{X'Y'} = \frac{Z'Y'}{Z'Y' - Z'X'} = \frac{n}{n-m};$$

d'où

$$\frac{ZZ'(n-m)}{2mn \sin \frac{1}{2}\varphi} = \frac{XX'}{m} = \frac{YY'}{n} = dt.$$

La vitesse du point Z est donc $\frac{2mn \sin \frac{1}{2}\varphi}{n-m}$.

Soient encore R_x, R_y, R_z les rayons de courbure des trajectoires en X, Y, Z , et $dx, d\beta, d\omega$ les angles de contingence. La direction de ZZ' étant bissectrice (extérieure) des directions XX' et YY' ,

$$2d\omega = dx + d\beta$$

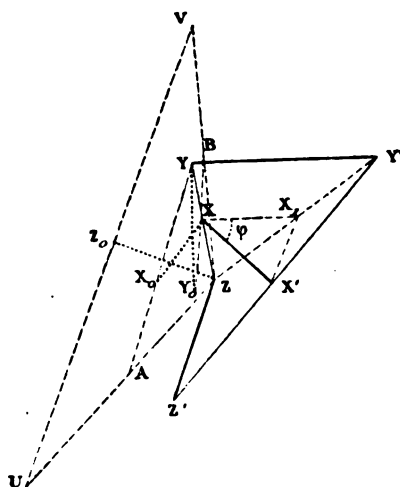
ou bien

$$2 \frac{ZZ'}{R_z} = \frac{XX'}{R_x} + \frac{YY'}{R_y};$$

soit, en vertu des proportions ci-dessus,

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2} \varphi}{R_z} = \frac{1}{\frac{2n}{n-m} R_x} + \frac{1}{\frac{2m}{n-m} R_y}.$$

La longueur R_z est donc celle de la bissectrice d'un triangle formé par deux côtés de longueur $\frac{2n}{n-m} R_x$, $\frac{2m}{n-m} R_y$, comprenant entre eux l'angle $(180 - \varphi)$, supplémentaire de celui des deux normales XX_0 , YY_0 . Or la normale ZZ_0 ayant précisément cette direction, le centre de courbure Z_0 sera situé sur la base du triangle UZV construit de la manière suivante :



Joignons par les droites YX_0 , XY_0 le point de chacune des trajectoires au centre de courbure de la seconde ; menons par Z les parallèles ZU , ZV , aux normales en X et Y ; elles sont respectivement rencontrées par les droites YX_0 , XY_0 en des points A et B , tels que $ZA = \frac{n}{n-m} R_x$; $ZB = \frac{m}{n-m} R_y$.

Prenons $ZU = 2ZA$ et $ZV = 2ZB$, on obtiendra la droite UV ,

base du triangle dont la bissectrice en Z sera la normale à la courbe Z, et aura pour pied le centre de courbure Z_0 .

Note sur les variations du rapport anharmonique de quatre points, dont trois sont fixes; par M. C.-A. LAISANT.

(Séance du 23 janvier 1889.)

1. Soit $\frac{MC}{MB} : \frac{AC}{AB} = \lambda$ le rapport anharmonique des quatre points M, A, B, C situés dans un même plan, les trois points A, B, C étant fixes; λ sera en général un rapport géométrique dont le module r sera un nombre positif, et dont nous désignons l'argument par θ .

Posons, en outre,

$$\text{gr AC} = b, \quad \text{gr AB} = c, \quad \text{ang BAC} = A.$$

Nous aurons

$$(1) \quad \frac{MC}{MB} = r \frac{b}{c} e^{\theta + A}.$$

2. La forme de cette relation (1) nous montre immédiatement :

1° Que si θ est constant et r variable, le lieu géométrique décrit par M est une circonférence passant par les points B et C (segment capable de l'angle $\theta + A$, décrit sur la corde BC);

2° Que si r est constant et θ variable, le lieu géométrique de M est une circonférence dont le centre est situé sur BC (lieu des points tels que le rapport de deux distances à C et B est égal à $\frac{rb}{c}$).

En particulier :

Si $\theta = 0$, le lieu géométrique de M est la circonférence circonscrite au triangle ABC; le rapport anharmonique est alors réel;

Si $\theta = -A$, le lieu géométrique de M n'est autre que la droite BC;

Si $\theta = \frac{\pi}{2} - A$, le lieu géométrique de M est la circonférence décrite sur BC comme diamètre;

Si $r = 1$, le lieu géométrique de M est une circonférence passant par A, par le pied de la bissectrice de A dans le triangle ABC, et ayant son centre sur BC;

Si $r = \frac{c}{b}$, le lieu géométrique de M se réduit à la droite perpendiculaire sur le milieu de BC.

3. Lorsque, θ étant seul variable, on donne successivement à r deux valeurs r', r'' , telles que $r' r'' = \frac{c^2}{b^2}$, les deux lieux géométriques qu'on obtient ainsi pour M sont deux circonférences symétriques par rapport au milieu du côté BC.

Lorsque, r étant seul variable, on donne successivement à θ deux valeurs θ', θ'' , telles que $\theta' + \theta'' = -2A$, les deux lieux géométriques qu'on obtient pour M sont deux circonférences symétriques par rapport à la droite BC.

On remarquera que, dans le cas où r est variable, il faut, pour obtenir les lieux géométriques complets, supposer que r prend toutes les valeurs réelles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; autrement, en ne donnant à r que des valeurs positives, on n'aurait qu'un arc des circonférences en question

4. La relation (1) peut s'écrire $\frac{MC}{MB} = \lambda \frac{AC}{AB}$ ou

$$(2) \quad m - c = \lambda(m - b) \frac{a - c}{a - b} = \lambda \alpha(m - b).$$

En la différentiant, on a

$$d_m(1 - \lambda \alpha) = \alpha d\lambda(m - b).$$

Si l'on donne à λ un autre accroissement infiniment petit $\partial\lambda$, on aura de même

$$\partial_m(1 - \lambda \alpha) = \alpha \partial\lambda(m - b),$$

et, par conséquent,

$$(3) \quad \frac{d_m}{\partial_m} = \frac{d\lambda}{\partial\lambda}.$$

Appelons $d\lambda$ l'accroissement de λ lorsque, r restant constant, on fait seulement varier θ , et $\partial\lambda$ l'accroissement qu'on obtient en laissant θ constant et faisant varier r . Alors

$$d\lambda = i d\theta r \varepsilon^0, \quad \partial\lambda = dr \varepsilon^0.$$

Donc, en vertu de la relation (3),

$$(4) \quad \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{M}} = i \frac{r d\theta}{dr} \parallel i.$$

Il en résulte, par conséquent, que les deux déplacements infiniment petits du point M ainsi obtenus sont rectangulaires, c'est-à-dire que les deux systèmes de circonférences considérés au n° 2 ci-dessus sont orthogonaux.

5. Si l'on écrit une relation réelle quelconque entre les deux variables r et θ ,

$$(5) \quad f(r, \theta) = 0,$$

le point M sera assujéti à se mouvoir sur une certaine courbe que l'équation (5) représente. On a ainsi un système de coordonnées tout à fait analogue comme notation aux coordonnées polaires, mais d'une interprétation géométrique bien différente.

Quand, une position du point M étant déterminée, on fait varier successivement l'une ou l'autre de ses deux coordonnées, en laissant l'autre fixe, le point M se déplace, soit sur l'une, soit sur l'autre des deux circonférences orthogonales des deux systèmes.

L'équation $r = 0$, en particulier, représente le point C et l'équation $r = \infty$, le point B.

Sur les isométriques d'une droite par rapport à un système de droites concourantes; par M. M. d'OCAGNE.

Je rappelle que j'ai donné le nom d'*isométrique* ⁽¹⁾ d'une courbe K, par rapport à un système de courbes (C), toute courbe telle que son arc compris entre deux quelconques des courbes du

⁽¹⁾ Voir le *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIII, p. 71.

système (C) soit égal à l'arc de la courbe K compris entre les mêmes courbes.

En particulier, une courbe est isométrique d'une droite D par rapport aux droites issues d'un point O, lorsque l'arc de cette courbe compris entre deux quelconques des droites issues de O est égal au segment de la droite D compris entre ces droites.

Ce cas se trouve traité au n° 5 du petit Mémoire que je viens de rappeler. Je vais en donner ici une solution plus simple.

Prenant pour origine le point O, pour axe des x la perpendiculaire abaissée de O sur la droite D, l'axe Oy étant parallèle à D, et appelant a la distance du point O à la droite D, on a, pour l'ordonnée h du point où la droite D est coupée par la droite qui joint le point O au point (x, y) ,

$$(1) \quad h = \frac{ay}{x},$$

et l'on doit avoir

$$(2) \quad h' = \sqrt{1 + y'^2},$$

h' et y' représentant les dérivées $\frac{dh}{dx}$ et $\frac{dy}{dx}$.

Dans une première solution, j'éliminais h entre ces deux équations, de façon à avoir l'équation différentielle de la courbe cherchée. On va voir qu'on est conduit à des calculs plus simples en éliminant y . En effet, (1) donne

$$y' = \frac{h + h'x}{a}.$$

L'équation (2) devient donc

$$h' = \sqrt{1 + \left(\frac{h + h'x}{a}\right)^2}$$

ou

$$(3) \quad h + h'x = a\sqrt{h'^2 - 1}.$$

Prenant la dérivée par rapport à x , on a

$$2h' + x \frac{dh'}{dx} = \frac{ah'}{\sqrt{h'^2 - 1}} \frac{dh'}{dx}$$

ou

$$\frac{dx}{dh'} + \frac{x}{2h'} = \frac{a}{2\sqrt{h'^2-1}}.$$

Intégrant, en prenant x pour fonction de h' , on a, C étant une constante arbitraire,

$$x = e^{-\int \frac{dh'}{2h'}} \left[C + \int e^{\int \frac{dh'}{2h'}} \frac{dh'}{2\sqrt{h'^2-1}} \right]$$

ou

$$x = \frac{1}{\sqrt{h'}} \left[C + a \int \frac{dh'}{\sqrt{4h'^3-4h'}} \right].$$

Posons

$$u = \int_{\infty}^{h'} \frac{dh'}{\sqrt{4h'^3-4h'}}.$$

Dès lors, suivant la notation de M. Weierstrass,

$$h' = p(u) \quad (\text{avec } g_2 = 4, \quad g_3 = 0)$$

et

$$(4) \quad x = \frac{C + au}{\sqrt{p(u)}}.$$

L'équation (3) donne alors

$$h = a \sqrt{p(u)^2-1} - (C + au) \sqrt{p(u)},$$

puis l'équation (1),

$$(4') \quad y = \frac{C + au}{a \sqrt{p(u)}} [a \sqrt{p(u)^2-1} - (C + au) \sqrt{p(u)}].$$

Les équations (4) et (4') résolvent le problème. Remarquant que $p(u)^2 - 1$ est ici égal à $\frac{p'(u)^2}{4p(u)}$, on peut remplacer la formule (4') par la suivante :

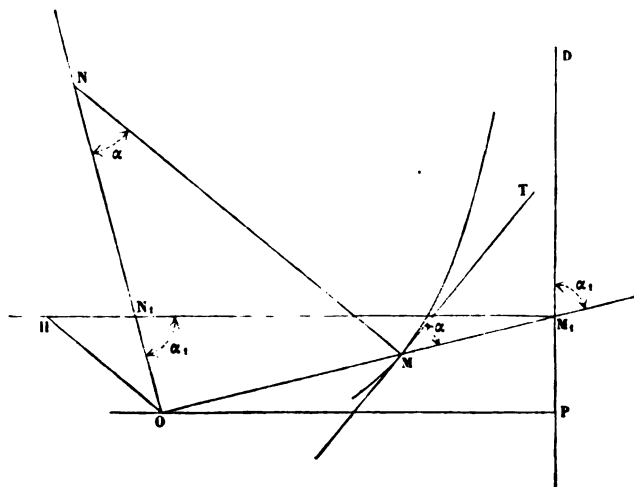
$$(4 \text{ bis}) \quad y = \frac{(C + au)[ap'(u) - 2(C + au)p(u)]}{2ap(u)} \quad (1).$$

(1) Une légère faute d'impression, qui d'ailleurs saute aux yeux, s'est glissée dans la seconde des formules de mon Mémoire sur les isométriques (*Bulletin*, t. XIII, p. 79). Cette formule doit être rétablie ainsi

$$y = \frac{ap'(u) - 2(C + au)p(u)}{2\sqrt{p(u)}}.$$

Ici d'ailleurs les invariants de la fonction p ne sont pas les mêmes que ci-dessus, mais $g_2 = -4$, $g_3 = 0$.

Voici maintenant comment peut se déterminer le centre de courbure des courbes qui nous occupent.



Prenons sur la courbe un point M dont le vecteur OM coupe la droite D en M_1 . MN et M_1N_1 étant les normales polaires en M et en M_1 , limitées à la perpendiculaire élevée en O à OM , on a, en appelant ds la différentielle de l'arc de courbe en M , égale à la différentielle du segment de la droite D en M_1 , et ω l'angle de OM avec OP ,

$$ds = MN d\omega = M_1 N_1 d\omega.$$

Donc,

$$MN = M_1 N_1.$$

La normale en M se trouve ainsi déterminée.

Soient maintenant α l'angle de la tangente en M avec OM , α_1 l'angle de D avec le même vecteur, $OM = \rho$, $OM_1 = \rho_1$. L'égalité précédente donne

$$\rho \sin \alpha_1 = \rho_1 \sin \alpha.$$

Par suite,

$$\sin \alpha_1 d\rho + \rho \cos \alpha_1 d\alpha_1 = \sin \alpha d\rho_1 + \rho_1 \cos \alpha d\alpha.$$

Mais

$$\begin{aligned} d\rho &= \rho \cot \alpha \, d\omega, & d\rho_1 &= \rho_1 \cot \alpha_1 \, d\omega, \\ d\alpha &= \left(\frac{n}{r} - 1\right) d\omega^{(1)}, & d\alpha_1 &= -d\omega, \end{aligned}$$

n étant la normale polaire MN, r le rayon de courbure en M. La relation précédente devient donc

$$\rho \cot \alpha \sin \alpha_1 - \rho \cos \alpha_1 = \rho_1 \cot \alpha_1 \sin \alpha + \rho_1 \cos \alpha \left(\frac{n}{r} - 1\right)$$

ou, après des réductions faciles,

$$\rho_1 \cos \alpha \frac{n}{r} = \sin(\alpha_1 - \alpha) \left(\frac{\rho}{\sin \alpha} + \frac{\rho_1}{\sin \alpha_1} \right).$$

Or

$$\frac{\rho}{\sin \alpha} = \frac{\rho_1}{\sin \alpha_1} = n.$$

Il vient donc finalement

$$2r = \frac{\rho_1 \cos \alpha}{\sin(\alpha_1 - \alpha)}.$$

Par le point O, menons la parallèle OH à MN. Nous avons $\widehat{HOM}_1 = \frac{\pi}{2} + \alpha$, $\widehat{OHM}_1 = \alpha - \alpha_1$. Donc, le triangle OHM₁ donne

$$\frac{M_1 H}{OM_1} = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha_1 - \alpha)}$$

ou

$$M_1 H = \frac{\rho_1 \cos \alpha}{\sin(\alpha_1 - \alpha)} = 2r.$$

Par suite, M₁H est égal au diamètre du cercle osculateur au point M₁.

(¹) Formule (6) de ma Note *Sur les transformations centrales des courbes planes* (*Mathesis*, 1884).

Sur l'identité des nœuds d'une courbe du quatrième ordre et des nœuds de ses contravariants quartique et sextique; par
M. HENRY JEFFERY.

1. Puisque l'équation tangentielle d'une quartique est, en fonction de ses contravariants S et T , $S^3 - 27T^2 = 0$, on doit penser que ces courbes auxiliaires auront des nœuds si la quartique proposée en a elle-même.

Outre cela, les courbes $S = 0$ et $T = 0$ sont respectivement les enveloppes d'une droite qui coupe la quartique primitive en quatre points, formant une proportion équiharmonique et harmonique. Dans le voisinage d'un nœud, les points d'intersection se rapprochent de plus en plus, jusqu'à ce que trois d'entre eux coïncident, ou deviennent infiniment voisins, sur une tangente au nœud.

2. L'Auteur a vérifié par le calcul l'existence et l'identité de ces nœuds dans les cas séparés des quartiques uninodales, binodales et trinodales. Mais il faut distinguer: bien que les tangentes aux nœuds des courbes U (la quartique donnée), S et T soient identiques, la courbure des branches peut être différente.

Ordinairement, pour U et S , il n'y a pas d'inflexion; mais il y a deux inflexions en chaque nœud de T . En particulier, les contravariants S et T des quartiques bicirculaires sont doués de foyers doubles et triples respectivement. D'autres modifications se présenteront dans la suite.

3. Au moyen du principe de la dualité, on voit que les bitangentes d'une courbe de la quatrième classe appartiennent aussi à leurs contravariants.

4. I. *Les quartiques uninodales.* — La forme la plus générale de ces courbes (U) est, en coordonnées ponctuelles, si C , ($\alpha = 0$, $\beta = 0$), est le nœud simple,

$$U \equiv 6\gamma^2(gx^2 + 2nx\beta + f\beta^2) + 4\gamma(\alpha_3x^3 + 3lx^2\beta + 3mx\beta^2 + b_3\beta^3) \\ + a_1\alpha^4 + 4a_2x^3\beta + 6hx^2\beta^2 + 4b_1x\beta^3 + b_2\beta^4 = 0.$$

Les deux tangentes en C , ($gx^2 + 2nx\beta + f\beta^2 = 0$), rencontrent

le côté AB en deux points, dont les coordonnées tangentielles sont

$$fp^2a^2 - 2npqab + gq^2b^2 = 0.$$

Nous désignons par $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ les coordonnées p, q, r .

On trouve dans les *Courbes supérieures*, de Salmon (p. 251), le contravariant S, dont l'équation peut être ainsi disposée

$$\begin{aligned} S = & 3(fx^2 + gy^2 + hz^2 - 2lyz - 2mx - 2nxy)^2 \\ & + 12z[nb_3x^3 + (3fl - 3mn - gb_3)x^2y \\ & + (3gm - 3nl - fa_3)xy^2 + na_3y^3] \\ & + z^2(x, y)^2 + z^3(x, y)^1 + z^4(x, y)^0 \end{aligned}$$

ou

$$(1) \quad S = 3v_2^2 + 12zv_3 + z^2Q.$$

De la même manière,

$$(2) \quad T = v_2^3 - 6zv_3 + z^2R.$$

L'équation tangentielle de U,

$$S^3 - 27T^2 = 0,$$

développée, devient

$$(3) \quad v_2^2(12u_3^2 + 2Rv_3 + 27v_2^2) + z\varphi = 0.$$

Dans les équations (1), (2), (3), si $z = 0$, il reste

$$fx^2 - 2nxy + gy^2 = 0;$$

par conséquent, pour U, S, T, C est un nœud, et les tangentes en C sont identiques ; mais des inflexions se trouvent en T seulement.

Transformons cette proposition par le principe de la dualité : x, y, z sont des coordonnées trilineaires, AB devient une tangente double des courbes (1), (2), (3); mais, pour la courbe (2), c'est une tangente en deux points stationnaires d'inflexion, savoir ceux où elle rencontre la conique v_2 .

§. Si, dans la quartique uninodale U, les termes qui renferment z disparaissent, les tangentes au nœud C sont stationnaires, et C est un point d'inflexion de chaque branche.

Ainsi

$$S = 3v_2^2 + z^2Q; \quad T = v_2^3 + z^2R,$$

et l'équation tangentielle de U est

$$v_2^2(2R + v_2Q) + z^2R' = 0.$$

Pour T et U, les nœuds sont identiques; mais les deux tangentes, qui sont menées par C à la conique v_2 , sont des bitangentes doubles de S : il n'y a point de nœud pour S au point C.

6. II. *Les quartiques bicirculaires et binodales.* — On suppose que la quartique bicirculaire U est engendrée par la méthode de Laguerre, et que le cercle jacobien (J) et la conique différente (F) sont rapportés au triangle autopolaire ABC,

$$(J) \quad a^2x^2 \cot A + b^2\beta^2 \cot B + c^2\gamma^2 \cot C = 0,$$

$$(F) \quad \frac{1}{l} a^2x^2 + \frac{1}{m} b^2\beta^2 + \frac{1}{n} c^2\gamma^2 = 0.$$

Si l'on considère la quartique comme l'enveloppe d'un cercle variable, qui coupe J orthogonalement et dont le centre se trouve sur F, son équation est

$$\begin{aligned} & (l + m + n)(a^2x^2c_1 + b^2\beta^2c_2 + c^2\gamma^2c_3)^2 - 4(a\alpha + b\beta + c\gamma) \\ & \times (a^2x^2c_1 + b^2\beta^2c_2 + c^2\gamma^2c_3)(la\alpha c_1 + mb\beta c_2 + nc\gamma c_3) \\ & + 4(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2(la^2x^2c_1^2 + mb^2\beta^2c_2^2 + nc^2\gamma^2c_3^2) = 0, \end{aligned}$$

c_1, c_2, c_3 désignant $\cot A, \cot B, \cot C$.

De plus, soit

$$\begin{aligned} 2\Sigma &= p^2(c_2 + c_3) + q^2(c_3 + c_1) + r^2(c_1 + c_2) - 2qrc_1 - 2rpc_2 - 2pqc_3 \\ &= \omega_1\omega_2 \cos \sec A \cos \sec B \cos \sec C, \end{aligned}$$

$\omega_1 = 0, \omega_2 = 0$ étant les équations des points circulaires à l'infini.

La conique

$$0 = lp^2 + mq^2 + nr^2 - (lc_1 + mc_2 + nc_3)2\Sigma = 0$$

est homofocale à la conique directrice F.

Posons

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{2\Sigma} &= mn(q^2c_3 + r^2c_2 - 2c_2c_3\Sigma) + nl(r^2c_1 + p^2c_3 - 2c_3c_1\Sigma) \\ &\quad + lm(p^2c_2 + q^2c_1 - 2c_1c_2\Sigma), \\ \frac{\lambda}{4\Sigma^2} &= (2l + m + n)(p^2mnc_2^2c_3^2 + q^2nlc_3^2c_1^2 + r^2lmc_1^2c_2^2 \\ &\quad - lmn(p^2c_2c_3 + q^2c_3c_1 + r^2c_1c_2)^2). \end{aligned}$$

On a

$$\frac{1}{3} S = \theta^2 + 3\varphi.$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} S = & (lp^2 + mq^2 + nr^2)^2 \\ & - [lp^2(2lc_1 - mc_2 - nc_3) \\ & + mq^2(2mc_2 - nc_3 - lc_1) + nr^2(2nc_3 - lc_1 - mc_2)] 2\Sigma \\ & + (l^2c_1^2 + m^2c_2^2 + n^2c_3^2 - muc_2c_3 - nlc_3c_1 - lmc_1c_2) 4\Sigma^2. \end{aligned}$$

$$T = \theta^3 + \frac{9}{2}\theta\varphi + \frac{27}{2}\chi.$$

La forme équivalente de $U(S^3 - 27T^2)$ devient

$$\theta^2(\frac{1}{4}\varphi^2 - \theta\chi) + \varphi^3 - \frac{9}{2}\theta\varphi\chi - \frac{27}{4}\chi^2 = 0,$$

dont chaque terme contient le facteur $4\Sigma^2$.

Par conséquent, il y a deux foyers doubles de S et U, et deux foyers triples de T, qui sont identiques avec les foyers simples de F. Il y a d'ailleurs quatre foyers simples de U, qui sont les foyers de la quartique de la quatrième classe

$$\varphi^2 - 4\theta\chi = 0.$$

7. On peut étendre la même recherche aux quartiques binodales. Si l'on modifie la méthode de Laguerre, une binodale peut être engendrée au moyen d'une conique directrice F, et l'on peut se servir des calculs du n° 6, si les symboles c_1, c_2, c_3 sont indéfinis, et si l'on introduit $c_2c_3 + c_3c_1 + c_1c_2$ à la place de l'unité, afin de rendre S et T homogènes. Par exemple, on écrira

$$\theta = (c_2c_3 + c_3c_1 + c_1c_2)(lp^2 + mq^2 + nr^2) - (lc_1 + mc_2 + nc_3)2\Sigma.$$

Dans ce cas général, $2\Sigma = 0$ désigne les deux points ω_1, ω_2 , réels ou imaginaires, où la conique (J) rencontre la ligne de l'infini.

Pour S et U les tangentes en leurs nœuds communs sont celles qu'on peut mener par les points ω_1, ω_2 à la conique directrice F.

Pour T les nœuds sont identiques, mais il y a des inflexions de chaque branche. Au moyen de la transformation homographique, on peut étendre ces résultats aux quartiques binodales, si l'on écrit $\lambda\alpha, \mu\beta, \nu\gamma$ au lieu de α, β, γ , et par conséquent $\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\mu}, \frac{z}{\nu}$ au lieu de x, y, z .

8. Les quartiques bicirculaires, dont les foyers sont collinéaires. -- Une telle quartique (U) est, en coordonnées carté-

siennes,

$$l(x^2 + y^2)^2 + (1 + fx)(x^2 + y^2) = k(1 + ex).$$

On peut démontrer qu'il y a deux foyers doubles qui sont identiques avec les intersections des coniques

$$2l(x^2 - y^2) + fx = 0, \quad 4lxy + fy = 0.$$

Ces points sont l'origine (0,0), et le point $(-\frac{f}{2l}, 0)$.

On peut établir que

$$\begin{aligned} 3S &= Q^2 - \frac{3}{4}RV - 3klR^2, \\ 27T &= -Q^3 + \frac{3}{8}QRV + 9kWR^2, \end{aligned}$$

ξ, η sont les coordonnées tangentielles de Booth, et l'on a

$$R = \xi^2 + \eta^2 = \omega_1 \omega_2,$$

points circulaires de l'infini,

$$Q = 2l + f\xi + R,$$

conique dont les foyers sont l'origine et le point $(-\frac{f}{2l}, 0)$

$$\begin{aligned} V &= (\xi + f)^2 + \eta^2 + 4kle\xi - kef\eta^2, \\ W &= l^2 + \frac{1}{2}l(\xi^2 + \eta^2 + f\xi) - \frac{3}{16}\eta^2(f^2 - kf - e^2kl). \end{aligned}$$

Les foyers doubles de S et U coïncident avec les foyers triples de T.

On peut écrire l'équation tangentielle de U,

$$(2l + f\xi)^2 [f^2 + 4(f + 2kle)\xi + (4 + 2kef + 16kl)\xi^2 + 4k(2f - e)\xi^3 + k^2e^2\xi^4] + \dots,$$

les autres termes contenant $\omega_1 \omega_2$ en facteur.

Le dernier facteur détermine les quatre foyers simples.

9. III. *Les quartiques trinodales.* — L'équation la plus générale de U avec trois nœuds aux points A, B, C est

$$u\beta^2\gamma^2 + v\gamma^2\alpha^2 + w\alpha^2\beta^2 + 2u'\alpha^2\beta\gamma + 2v'\alpha\beta^2\gamma + 2w'\alpha\beta\gamma^2 = 0.$$

Cette quartique est l'inverse de la conique

$$(1) \quad u\alpha^2 + v\beta^2 + w\gamma^2 + 2u'\beta\gamma + 2v'\gamma\alpha + 2w'\alpha\beta = 0.$$

Comme auparavant, x, y, z désignent pa, qb, rc .

On peut trouver (*Courbes supérieures* de Salmon, p. 251)

que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S &= \sigma_2^2 - 12xyz\sigma_1, \\ T &= -\sigma_2^2 + 18\sigma_1\sigma_2xyz + 54Kx^2y^2z^2,\end{aligned}$$

en posant

$$\sigma_1 = ux^2 + vy^2 + wz^2 - 2u'yz - 2v'zx - 2w'xy;$$

$\sigma_2 = 0$ est la conique B qui est touchée par les six tangentes nodales,

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= (v'w' - uu')x + (w'u' - v'v')y + (u'v' - ww')z, \\ K &= uvw + 2u'v'w' - uu'^2 - vv'^2 - ww'^2.\end{aligned}$$

$K = 0$ est la discriminante de la conique (1).

Par conséquent S est une courbe quadrimodale de la quatrième classe, dont trois nœuds sont ceux de U; T est une courbe trinodale de la sixième classe, dont les nœuds sont les mêmes avec les inflexions.

L'équation équivalente de $U(S^3 - 27T^2)$ devient

$$27K^2x^2y^2z^2 - \sigma_1xyz(18K\sigma_2 + 16\sigma_1^2) - (K\sigma_2 + \sigma_1^2)\sigma_2^2 = 0.$$

Cette forme établit deux théorèmes (*Courbes supérieures*, p. 247):

A. Les six tangentes menées à la courbe par ses trois nœuds touchent une conique.

B. Les tangentes aux nœuds touchent une autre conique.

La première (A) est $K\sigma_2 + \sigma_1^2 = 0$, ou

$$(1) \quad VWx^2 + WUy^2 + UVz^2 + 2UU'yz + 2VV'zx + 2WW'xy = 0,$$

U, ..., U', ... étant les mineurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} u & w' & v' \\ w' & v & u' \\ v' & u' & w \end{vmatrix}.$$

Les six tangentes à cette conique sont les inverses des tangentes menées par A, B, C à la conique primitive (1).

La seconde conique (B) est $\sigma_2 = 0$; les six tangentes sont les lignes inverses des tangentes menées par A, B, C à la conique

$$vw'x^2 + wu'y^2 + uv'z^2 - 2uu'yz - 2vv'zx - 2ww'xy = 0,$$

lesquelles passent par les points où la conique primitive (1) rencontre les côtés du triangle ABC.

Il y a un contact double entre les coniques (A) et (B).

10. Si l'on fait $u = v = w = 0$, la quartique se décompose en quatre droites

$$\alpha\beta\gamma(u'\alpha + v'\beta + w'\gamma) = 0.$$

Le contravariant S est la courbe de la quatrième classe

$$\frac{1}{12}S = (u'yz + v'zx + w'xy)^2 - 3xyz(v'w'x + w'u'y + u'v'z) = 0.$$

Elle a quatre nœuds et une acubitangente, dont le contact est imaginaire, savoir

$$\frac{x}{u'} = \frac{y}{v'} = \frac{z}{w'}.$$

Le contravariant quartique de cette courbe est de l'ordre quatrième

$$(u'^2\alpha^2 + v'^2\beta^2 + w'^2\gamma^2 - v'w'\beta\gamma - w'u'\gamma\alpha - u'v'\alpha\beta)^2 - 7u'v'w'\alpha\beta\gamma(u'\alpha + v'\beta + w'\gamma) = 0.$$

La ligne $(u'\alpha + v'\beta + w'\gamma)$ est une acubitangente de cette courbe. Ainsi le principe de dualité du n° 3 est encore vrai.

Applications du calcul des quaternions à l'étude des surfaces du second ordre; par M. PAPELIER.

(Séance du 25 janvier 1889.)

Hamilton, l'illustre inventeur du calcul des quaternions, dans le but de montrer la fécondité de ce calcul, en a fait de nombreuses applications géométriques et physiques. Il a étudié et retrouvé d'une façon fort élégante les principales propriétés des surfaces du second ordre, des courbes gauches et des surfaces quelconques. Malheureusement, bien que très intéressante, cette étude n'est pas faite d'une façon bien méthodique, ni conforme à nos habitudes françaises; peut-être faut-il voir là la cause du peu de faveur dont jouit en France le calcul des quaternions.

Ainsi, dans l'étude des quadriques, Hamilton se borne au cas des surfaces à centre unique. Les auteurs qui l'ont suivi, MM. Tait ⁽¹⁾

⁽¹⁾ *An elementary Treatise of quaternions.* Oxford, 1873. Ouvrage traduit récemment par M. Plarr. (Gauthier-Villars.)

et Laisant ⁽¹⁾, dont le but, d'ailleurs, était de faire un Ouvrage élémentaire, n'ont également considéré que les surfaces de première classe. Il était donc naturel de se demander si le calcul des quaternions se prêtait aisément à l'étude des quadriques en général; s'il permettait, comme la Géométrie analytique à trois dimensions, de classer les surfaces du second ordre. Telle est la question que je crois avoir résolue dans le Mémoire qui va suivre.

Je m'appuierai pour cela sur la résolution de l'équation vectorielle linéaire. Hamilton a démontré que cette équation avait en général une solution, quand la constante appelée m était différente de 0. C'est de la discussion de cette équation que résultera la classification des surfaces du second ordre.

Je ferai usage des notations françaises de Hoüel, si claires et si simples, et qui rendent si facile la lecture de tous les calculs.

I.

Résolution et discussion de l'équation vectorielle linéaire.

La fonction vectorielle linéaire, que nous représenterons par Φx , est du premier degré en x et représente un vecteur. Elle jouit des propriétés suivantes

$$\begin{aligned}\Phi(x + y) &= \Phi x + \Phi y, \\ \Phi ax &= a \Phi x,\end{aligned}$$

a étant une quantité algébrique ordinaire.

L'équation

$$\Phi x = D,$$

où D est un vecteur quelconque, est ce qu'on appelle l'équation *vectorielle linéaire*.

Pour résoudre cette équation, nous commencerons par mettre Φx sous la forme trinôme donnée par Hamilton. Choisissons pour cela trois vecteurs quelconques non coplanaires A, B, C ; on a alors pour tout vecteur x

$$x = \frac{1}{S_{ABC}} (V_{BC} \cdot S_{AX} + V_{CA} \cdot S_{BX} + V_{AB} \cdot S_{CX});$$

(¹) *Introduction à la méthode des quaternions.* (Gauthier-Villars: 1881.)

par suite,

$$\Phi X = A_1 \mathfrak{S} AX + B_1 \mathfrak{S} BX + C_1 \mathfrak{S} CX,$$

en posant

$$A_1 = \Phi \frac{\mathfrak{V}_{BC}}{\mathfrak{S}_{ABC}},$$

$$B_1 = \Phi \frac{\mathfrak{V}_{CA}}{\mathfrak{S}_{ABC}},$$

$$C_1 = \Phi \frac{\mathfrak{V}_{AB}}{\mathfrak{S}_{ABC}}.$$

Telle est la forme trinôme sous laquelle nous étudierons la fonction Φ . Nous remarquerons que A, B, C sont entièrement arbitraires, mais jamais coplanaires, tandis que A_1, B_1, C_1 dépendent de A, B, C et de la fonction Φ .

L'équation vectorielle peut alors s'écrire

$$A_1 \mathfrak{S} AX + B_1 \mathfrak{S} BX + C_1 \mathfrak{S} CX = D.$$

Pour résoudre cette équation, nous distinguerons différents cas :

Premier cas. — Les vecteurs A_1, B_1, C_1 ne sont pas dans un même plan.

Je décompose le vecteur D suivant les trois directions de A_1, B_1, C_1

$$D = \frac{1}{\mathfrak{S}_{A_1 B_1 C_1}} (A_1 \mathfrak{S} B_1 C_1 D + B_1 \mathfrak{S} C_1 A_1 D + C_1 \mathfrak{S} A_1 B_1 D).$$

L'équation peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} A_1 \mathfrak{S} AX + B_1 \mathfrak{S} BX + C_1 \mathfrak{S} CX \\ = \frac{1}{\mathfrak{S}_{A_1 B_1 C_1}} (A_1 \mathfrak{S} B_1 C_1 D + B_1 \mathfrak{S} C_1 A_1 D + C_1 \mathfrak{S} A_1 B_1 D); \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\mathfrak{S} AX = \frac{\mathfrak{S} B_1 C_1 D}{\mathfrak{S}_{A_1 B_1 C_1}},$$

$$\mathfrak{S} BX = \frac{\mathfrak{S} C_1 A_1 D}{\mathfrak{S}_{A_1 B_1 C_1}},$$

$$\mathfrak{S} CX = \frac{\mathfrak{S} A_1 B_1 D}{\mathfrak{S}_{A_1 B_1 C_1}}.$$

On peut considérer ces équations comme les équations de trois plans. On en déduit, d'après une formule connue (les trois plans

n'étant pas parallèles),

$$x = \frac{S_{B_1 C_1 D} \cdot \mathcal{V}_{BC} + S_{C_1 A_1 D} \cdot \mathcal{V}_{CA} + S_{A_1 B_1 D} \cdot \mathcal{V}_{AB}}{S_{ABC} \cdot S_{A_1 B_1 C_1}}.$$

L'équation, dans ce cas, admet donc toujours une solution et une seule.

On voit aussi que, si $D = 0$, $x = 0$; en conséquence, la fonction Φx ne peut être nulle que pour $x = 0$, et il existe une valeur, et une seule, de x qui rend le vecteur Φx égal à un vecteur quelconque.

Appelons, en général, fonction inverse de Φx et représentons par $\Phi^{-1}x$ une fonction telle qu'en opérant sur elle par l'opérateur Φ , on retrouve le vecteur x . Puisque l'équation précédente

$$\Phi x = D$$

admet une solution et une seule, on peut écrire cette solution

$$x = \Phi^{-1}D,$$

ce qui donne la fonction inverse de la fonction Φ .

Ainsi, si l'on a

$$\Phi x = A_1 S_{AX} + B_1 S_{BX} + C_1 S_{CX},$$

on a

$$\Phi^{-1}x = \frac{1}{S_{ABC} \cdot S_{A_1 B_1 C_1}} (\mathcal{V}_{BC} \cdot S_{B_1 C_1 X} + \mathcal{V}_{CA} \cdot S_{C_1 A_1 X} + \mathcal{V}_{AB} \cdot S_{A_1 B_1 X}).$$

Cette nouvelle fonction est encore vectorielle linéaire.

Deuxième cas. — Les vecteurs A_1 , B_1 , C_1 sont dans un même plan.

Dans ces conditions, si A_1 et B_1 ne sont pas parallèles, il existe deux nombres algébriques, a et b , tels que

$$C_1 = aA_1 + bB_1;$$

on a alors

$$\begin{aligned} \Phi x &= A_1 S_{AX} + B_1 S_{BX} + (aA_1 + bB_1) S_{CX} \\ &= A_1 S_{(A + aC)X} + B_1 S_{(B + bC)X} \end{aligned}$$

et l'on a à résoudre l'équation

$$A_1 S_{(A + aC)X} + B_1 S_{(B + bC)X} = D.$$

Remarquons alors que, quel que soit x , le premier membre

est un vecteur du plan A_1, B_1 . Il en résulte les conséquences suivantes :

1° Si D n'est pas dans le plan des trois vecteurs A_1, B_1, C_1 , l'équation n'admet pas de solution.

2° Si D est dans le plan des deux vecteurs A_1, B_1 , il existe deux nombres, c et d , tels que

$$D = cA_1 + dB_1;$$

on aura alors

$$A_1 S(A + aC)x + B_1 S(B + bC)x = cA_1 + dB_1;$$

d'où l'on déduit

$$S(A - aC)x = c,$$

$$S(B - bC)x = d,$$

équations qui représentent deux plans non parallèles, qui se coupent suivant une droite, et tous les points de cette droite sont les extrémités des vecteurs qui satisfont à l'équation. Il y'a donc une infinité de solutions, les vecteurs correspondants étant tous dans un même plan.

Dans la première hypothèse de ce deuxième cas, la fonction $\Phi^{-1}x$ n'existe pas; dans la seconde, elle n'est pas déterminée.

Si $D = 0$, on a à résoudre les équations

$$S(A - aC)x = 0,$$

$$S(B - bC)x = 0;$$

on en tire

$$x = \lambda V(A - aC)(B + bC),$$

infinité de vecteurs qui ont même direction.

On voit aussi que, quel que soit x , Φx représente un vecteur situé dans le plan des deux vecteurs A_1 et B_1 .

Remarquons enfin que, dans l'expression de Φx , A, B, C étant arbitraires, il en est de même des vecteurs $A + aC$ et $B + bC$.

Troisième cas. — Les vecteurs A_1, B_1, C_1 sont parallèles.

On a alors

$$B_1 = bA_1,$$

$$C_1 = cA_1;$$

d'où

$$\Phi x = A_1 S(A - bB + cC)x;$$

d'où l'équation

$$A_1 S(A + bB + cC)x = D.$$

1° Si D n'est pas parallèle à A_1 , il n'y a pas de solution ;

2° Si D est parallèle à A_1 , on a

$$D = dA_1$$

et l'on a à résoudre

$$S(A + bB + cC)x = d,$$

équation d'un plan dont tous les points sont les extrémités de vecteurs qui satisfont à l'équation.

Si $d = 0$, ce plan passe par l'origine commune des vecteurs.

Quel que soit x , Φx a toujours la même direction.

Exemple. — Considérons l'équation d'une droite

$$V_B(x - A) = 0,$$

qu'on peut écrire

$$V_{BX} = V_{BA}$$

ou

$$\Phi x = V_{BA},$$

en posant

$$\Phi x = V_{BX}.$$

Il est aisé de reconnaître que nous rentrons dans le deuxième cas de la discussion qui précède, attendu que Φx est perpendiculaire à B , quel que soit x , et, par suite, représente un vecteur situé dans un plan perpendiculaire à B . Dès lors l'équation

$$\Phi x = D$$

n'aura pas de solution si D n'est pas perpendiculaire à B . Si D est perpendiculaire à B , elle en aura une infinité ; c'est le cas de l'équation précédente, où

$$D = V_{BA}.$$

On peut d'ailleurs mettre Φx sous la forme précédente. Choisissons, en effet, deux vecteurs, A' et B' , tels que

$$B = V_{A'B'};$$

alors

$$\Phi x = V_{V_{A'B'}, x} = A' S_{B'} x - B' S_{A'} x.$$

II.

Directions principales.

On appelle *directions principales d'une fonction vectorielle linéaire* les directions de vecteurs tels que, si l'on effectue sur ces vecteurs l'opération Φ , le nouveau vecteur obtenu soit parallèle au vecteur primitif.

Ainsi, le vecteur x a une direction principale si l'on a

$$\Phi x = g x,$$

g étant une quantité algébrique.

Hamilton a déterminé les directions principales en se servant de son équation cubique symbolique et en se bornant au cas où $m \neq 0$.

Je préfère le procédé suivant, qui rend la discussion plus facile.

Soit

$$\Phi x = A_1 S_{AX} + B_1 S_{BX} + C_1 S_{CX};$$

il faut déterminer x et g , en sorte que

$$A_1 S_{AX} + B_1 S_{BX} + C_1 S_{CX} = g x$$

ou, en décomposant x suivant les directions A_1, B_1, C_1 ,

$$A_1 S_{AX} + B_1 S_{BX} + C_1 S_{CX} = g \left(A_1 \frac{S_{B_1 C_1} X}{S_{A_1 B_1 C_1}} + B_1 \frac{S_{C_1 A_1} X}{S_{A_1 B_1 C_1}} + C_1 \frac{S_{A_1 B_1} X}{S_{A_1 B_1 C_1}} \right).$$

Pour que l'égalité ait lieu, il faut que

$$S_{AX} = g \frac{S_{B_1 C_1} X}{S_{A_1 B_1 C_1}},$$

$$S_{BX} = g \frac{S_{C_1 A_1} X}{S_{A_1 B_1 C_1}},$$

$$S_{CX} = g \frac{S_{A_1 B_1} X}{S_{A_1 B_1 C_1}}$$

ou

$$(1) \quad \begin{cases} S \left(A - g \frac{S_{B_1 C_1}}{S_{A_1 B_1 C_1}} \right) X = 0, \\ S \left(B - g \frac{S_{C_1 A_1}}{S_{A_1 B_1 C_1}} \right) X = 0, \\ S \left(C - g \frac{S_{A_1 B_1}}{S_{A_1 B_1 C_1}} \right) X = 0. \end{cases}$$

Or, si les trois vecteurs

$$A - g \frac{\mathbf{v}_{B_1 C_1}}{\mathbf{s}_{A_1 B_1 C_1}}, \quad B - g \frac{\mathbf{v}_{C_1 A_1}}{\mathbf{s}_{A_1 B_1 C_1}}, \quad C - g \frac{\mathbf{v}_{A_1 B_1}}{\mathbf{s}_{A_1 B_1 C_1}}$$

ne sont pas coplanaires, on ne peut satisfaire aux équations précédentes que par $x = 0$, ce qui ne donne aucune direction principale.

Il faut donc que les vecteurs précédents soient coplanaires, c'est-à-dire que l'on ait

$$\mathbf{s} \left(A - g \frac{\mathbf{v}_{B_1 C_1}}{\mathbf{s}_{A_1 B_1 C_1}} \right) \left(B - g \frac{\mathbf{v}_{C_1 A_1}}{\mathbf{s}_{A_1 B_1 C_1}} \right) \left(C - g \frac{\mathbf{v}_{A_1 B_1}}{\mathbf{s}_{A_1 B_1 C_1}} \right) = 0,$$

équation du troisième degré en g .

Nous pouvons l'obtenir sous une autre forme plus simple. Décomposons les vecteurs A , B , C selon les directions $\mathbf{v}_{B_1 C_1}$, $\mathbf{v}_{C_1 A_1}$, $\mathbf{v}_{A_1 B_1}$, nous aurons

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\mathbf{s}_{A_1 B_1 C_1}} (\mathbf{v}_{B_1 C_1} \cdot \mathbf{s}_{A_1 A} + \mathbf{v}_{C_1 A_1} \cdot \mathbf{s}_{B_1 A} + \mathbf{v}_{A_1 B_1} \cdot \mathbf{s}_{C_1 A}), \\ B &= \frac{1}{\mathbf{s}_{A_1 B_1 C_1}} (\mathbf{v}_{B_1 C_1} \cdot \mathbf{s}_{A_1 B} + \mathbf{v}_{C_1 A_1} \cdot \mathbf{s}_{B_1 B} + \mathbf{v}_{A_1 B_1} \cdot \mathbf{s}_{C_1 B}), \\ C &= \frac{1}{\mathbf{s}_{A_1 B_1 C_1}} (\mathbf{v}_{B_1 C_1} \cdot \mathbf{s}_{A_1 C} + \mathbf{v}_{C_1 A_1} \cdot \mathbf{s}_{B_1 C} + \mathbf{v}_{A_1 B_1} \cdot \mathbf{s}_{C_1 C}), \end{aligned}$$

et tout revient à écrire que les vecteurs

$$(2) \quad \begin{cases} (\mathbf{s}_{A_1 A} - g) \cdot \mathbf{v}_{B_1 C_1} + \mathbf{s}_{B_1 A} \cdot \mathbf{v}_{C_1 A_1} + \mathbf{s}_{C_1 A} \cdot \mathbf{v}_{A_1 B_1}, \\ \mathbf{s}_{A_1 B} \cdot \mathbf{v}_{B_1 C_1} + (\mathbf{s}_{B_1 B} - g) \cdot \mathbf{v}_{C_1 A_1} + \mathbf{s}_{C_1 B} \cdot \mathbf{v}_{A_1 B_1}, \\ \mathbf{s}_{A_1 C} \cdot \mathbf{v}_{B_1 C_1} + \mathbf{s}_{B_1 C} \cdot \mathbf{v}_{C_1 A_1} + (\mathbf{s}_{C_1 C} - g) \cdot \mathbf{v}_{A_1 B_1} \end{cases}$$

sont coplanaires. Il faut et il suffit que l'on ait

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \mathbf{s}_{A_1 A} - g & \mathbf{s}_{B_1 A} & \mathbf{s}_{C_1 A} \\ \mathbf{s}_{A_1 B} & \mathbf{s}_{B_1 B} - g & \mathbf{s}_{C_1 B} \\ \mathbf{s}_{A_1 C} & \mathbf{s}_{B_1 C} & \mathbf{s}_{C_1 C} - g \end{vmatrix} = 0.$$

Soit g' une racine réelle de cette équation; si cette racine n'annule pas tous les mineurs du déterminant, les trois vecteurs précédents sont dans un même plan sans avoir la même direction; alors les plans (1) passent par une même droite, qui est une direction principale.

Si la racine g' annule tous les mineurs du déterminant, les vecteurs (2) ont la même direction, les plans (1) sont confondus;

nous avons une infinité de directions principales dans un même plan.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé les vecteurs A_1 , B_1 , C_1 non coplanaires. Nous examinerons plus loin le cas où ces vecteurs sont dans un même plan.

III.

Fonction conjuguée.

Hamilton a appelé fonction conjuguée de la fonction vectorielle linéaire Φx une fonction vectorielle $\Phi'x$, telle que

$$S_L \Phi M = S_M \Phi' L,$$

quels que soient L et M .

La fonction Φ' est bien déterminée par cette égalité, car

$$\begin{aligned} S_L \Phi M &= S_{A_1 L} S_{AM} + S_{B_1 L} S_{BM} + S_{C_1 L} S_{CM} \\ &= S_M (A S_{A_1 L} + B S_{B_1 L} + C S_{C_1 L}), \end{aligned}$$

d'où

$$\Phi'x = A S_{A_1 x} + B S_{B_1 x} + C S_{C_1 x}.$$

Si $\Phi'x = \Phi x$, on dit que la fonction Φ est conjuguée d'elle-même. Cherchons la condition pour que la fonction Φ soit conjuguée d'elle-même.

$$\begin{aligned} \Phi x - \Phi'x &= A_1 S_{Ax} - A S_{A_1 x} + B_1 S_{Bx} - B S_{B_1 x} + C_1 S_{Cx} - C S_{C_1 x} \\ &= V_x V_{AA_1} + V_x V_{BB_1} + V_x V_{CC_1} \\ &= V_x [V(AA_1 + BB_1 + CC_1)]. \end{aligned}$$

Pour que cette expression soit nulle, quel que soit x , il faut que

$$V(AA_1 + BB_1 + CC_1) = 0.$$

Ceci a lieu quels que soient les vecteurs A , B , C , A_1 , B_1 , C_1 , quelques-uns d'entre eux pouvant d'ailleurs être nuls.

Nous supposons, dorénavant, la fonction Φ conjuguée d'elle-même, ce cas seul étant intéressant dans l'étude des quadriques, et nous allons reprendre, avec cette hypothèse, la discussion des directions principales.

Nous allons établir que l'équation (3) a toujours ses racines réelles. Hamilton s'est appuyé sur une étude approfondie de la fonction Φ et d'autres fonctions dérivées. MM. Tait et Laisant

ont suivi une méthode par l'absurde, analogue à la méthode de Lagrange, pour démontrer la réalité des racines de l'équation en S . Elle a l'inconvénient d'introduire ce qu'on a appelé des bivecteurs de la forme $A + B\sqrt{-1}$. Je propose la démonstration suivante, qui a l'avantage de ramener l'équation en g à l'équation en S du troisième degré, et nous verrons plus tard que l'analogie est plus complète en étudiant les axes des quadriques.

Nous avons vu que, dans l'expression trinôme de la fonction Φ , on pouvait choisir arbitrairement les trois vecteurs A , B , C . Nous les prendrons unitaires et rectangulaires, en sorte que nous aurons

$$\begin{aligned} A^2 = B^2 = C^2 &= -1, \\ BC &= A, \quad CA = B, \quad AB = C, \\ SABC &= -1, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} A_1 &= -(A SAA_1 + B SBA_1 + C SCA_1), \\ B_1 &= -(A SAB_1 + B SBB_1 + C SCB_1), \\ C_1 &= -(A SAC_1 + B SBC_1 + C SCC_1). \end{aligned}$$

Écrivons que la fonction est conjuguée d'elle-même.

$$\begin{aligned} U(AA_1 + BB_1 + CC_1) &= 0, \\ A(B SBA_1 + C SCA_1) + B(A SAB_1 + C SCB_1) + C(A SAC_1 + B SBC_1) &= 0, \\ A(SBC_1 - SCB_1) + B(SCA_1 - SAC_1) + C(SAB_1 - SBA_1) &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} SBC_1 &= SCB_1, \\ SCA_1 &= SAC_1, \\ SAB_1 &= SBA_1, \end{aligned}$$

ce qui montre que l'équation (3) est une véritable équation en S . Elle a donc ses racines réelles.

Si g' est une racine simple, à cette racine correspond une direction principale, car cette racine n'annule pas tous les mineurs du déterminant;

Si g' est une racine double, à cette racine correspond un plan de directions principales;

Si g' est une racine triple, les vecteurs (2) sont nuls; par suite, toute direction est direction principale: on a

$$\Phi X = g'X.$$

Remarquons de plus que l'équation (3) ne peut avoir de racines nulles, car le terme constant de l'équation est

$$\mathfrak{S} ABC. \mathfrak{S} A_1 B_1 C_1,$$

qui est différent de zéro.

Démontrons enfin qu'à deux racines différentes de l'équation en g correspondent deux directions principales rectangulaires.

Soient g_1 et g_2 les deux racines différentes, x_1 et x_2 les directions principales.

On a

$$\Phi x_1 = g_1 x_1,$$

$$\Phi x_2 = g_2 x_2,$$

d'où

$$\mathfrak{S} x_2 \Phi x_1 = g_1 \mathfrak{S} x_2 x_1,$$

$$\mathfrak{S} x_1 \Phi x_2 = g_2 \mathfrak{S} x_1 x_2;$$

retranchons, en remarquant que les premiers membres sont égaux, puisque la fonction Φ est conjuguée d'elle-même, il vient

$$0 = (g_1 - g_2) \mathfrak{S} x_1 x_2$$

et, comme $g_1 \neq g_2$,

$$\mathfrak{S} x_1 x_2 = 0.$$

En résumé, si les trois racines de l'équation (3) sont distinctes, on a trois directions principales rectangulaires deux à deux; si l'équation a une racine double et une racine simple, on a un plan de directions principales et une autre direction principale perpendiculaire à ce plan; si l'équation a une racine triple, toutes les directions de l'espace sont directions principales.

Désignons par x_1, x_2, x_3 trois vecteurs unitaires dirigés suivant trois directions principales rectangulaires deux à deux, en sorte que

$$x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = -1,$$

$$x_1 = x_2 x_3, \quad x_2 = x_3 x_1, \quad x_3 = x_1 x_2.$$

Choisissons les vecteurs x_1, x_2, x_3 à la place des vecteurs a, b, c , on aura

$$\Phi x = L_1 \mathfrak{S} x_1 x + L_2 \mathfrak{S} x_2 x + L_3 \mathfrak{S} x_3 x.$$

Écrivons que

$$\Phi x_1 = g_1 x_1,$$

$$\Phi x_2 = g_2 x_2,$$

$$\Phi x_3 = g_3 x_3.$$

il vient

$$L_1 = -g_1 x_1,$$

$$L_2 = -g_2 x_2,$$

$$L_3 = -g_3 x_3,$$

d'où

$$\Phi x = -(g_1 x_1 S x_1 x + g_2 x_2 S x_2 x + g_3 x_3 S x_3 x).$$

La fonction Φx est alors exprimée à l'aide des racines de l'équation (3) et des directions principales. Cette expression subsiste quand même deux racines sont égales, par exemple $g_1 = g_2$. x_1 et x_2 sont alors choisis arbitrairement dans un plan, mais ils sont toujours unitaires et rectangulaires.

Nous avons supposé jusqu'ici que, dans l'expression de la fonction Φx

$$\Phi x = A_1 S A x + B_1 S B x + C_1 S C x,$$

les trois vecteurs A_1 , B_1 , C_1 étaient non coplanaires.

Je vais supposer maintenant que ces vecteurs sont dans un même plan, c'est-à-dire que Φx peut se mettre sous la forme

$$\Phi x = A_1 S(A + ac) + B_1 S(B + bc).$$

La fonction étant conjuguée d'elle-même, on a

$$V[A_1(A + ac) + B_1(B + bc)] = 0,$$

ce qui montre que les vecteurs $A + ac$, $B + bc$ sont dans le plan de A_1 et B_1 . Dans ce qui suivra, nous désignerons ce plan par Π . En sorte que si A et B sont deux vecteurs quelconques choisis dans le plan Π , Φx pourra se mettre sous la forme

$$\Phi x = A_1 S A x + B_1 S B x,$$

et l'on aura

$$V(AA_1 + BB_1) = 0.$$

Cherchons les directions principales.

On doit avoir

$$\Phi x = g x,$$

$$A_1 S A x + B_1 S B x = g x,$$

x doit se trouver dans le plan Π ; on aura donc

$$x = x A_1 + y B_1,$$

en remplaçant

$$A_1 \mathfrak{S} A(x A_1 + y B_1) + B_1 \mathfrak{S} B(x A_1 + y B_1) = g(x A_1 + y B_1)$$

ou

$$A_1(x \mathfrak{S} A A_1 + y \mathfrak{S} A B_1) + B_1(x \mathfrak{S} B A_1 + y \mathfrak{S} B B_1) = g x A_1 + g y B_1,$$

d'où l'on tire

$$x \mathfrak{S} A A_1 + y \mathfrak{S} A B_1 = g x,$$

$$x \mathfrak{S} B A_1 + y \mathfrak{S} B B_1 = g y$$

ou

$$x(\mathfrak{S} A A_1 - g) + y \mathfrak{S} A B_1 = 0,$$

$$x \mathfrak{S} B A_1 + y(\mathfrak{S} B B_1 - g) = 0.$$

Pour que ces équations soient compatibles, il faut que l'on ait

$$(\mathfrak{S} A A_1 - g)(\mathfrak{S} B B_1 - g) - \mathfrak{S} A B_1 \cdot \mathfrak{S} B A_1 = 0.$$

Je dis que cette équation a toujours ses racines réelles.

• En effet,

$$A_1 = a A + b B,$$

$$B_1 = c A + d B,$$

d'où

$$0 = \mathfrak{V}(A A_1 + B B_1) = b \mathfrak{V} A B + c \mathfrak{V} B A = (b - c) \mathfrak{V} A B;$$

d'où

$$b = c.$$

Si nous choisissons A et B rectangulaires et unitaires,

$$\mathfrak{S} A_1 B = -b,$$

$$\mathfrak{S} A B_1 = -c,$$

donc

$$\mathfrak{S} A_1 B = \mathfrak{S} A B_1,$$

l'équation précédente peut s'écrire

$$(\mathfrak{S} A A_1 - g)(\mathfrak{S} B B_1 - g) - (\mathfrak{S} A B_1)^2 = 0,$$

et sous cette forme on reconnaît sans peine qu'elle a ses racines réelles, distinctes ou égales.

A une racine simple correspond une direction principale; à une racine double, un plan de directions principales. A deux racines distinctes correspondent deux directions principales rectangulaires, qui sont dans le plan Π .

Soient g_1, g_2 les deux racines, x_1, x_2 les directions principales correspondantes, unitaires et rectangulaires.

On aura, comme tout à l'heure,

$$\Phi x = -(g_1 x_1 \mathfrak{S} x_1 x + g_2 x_2 \mathfrak{S} x_2 x).$$

Enfin, si, dans l'expression générale de Φx , les trois vecteurs λ_1, μ_1, ν_1 sont parallèles, on peut écrire

$$\Phi x = \lambda_1 \mathfrak{S} \lambda x,$$

et si, Φx est conjuguée d'elle-même,

$$V_{\lambda_1 \lambda} = 0;$$

par suite,

$$\lambda_1 = \alpha \lambda,$$

$$\Phi x = \alpha \lambda \mathfrak{S} \lambda x :$$

ce qui montre qu'il n'y a qu'une direction principale, c'est la direction λ .

IV.

Surfaces du second ordre.

Toute équation scalar en x , c'est-à-dire toute équation dont les membres se composent de parties algébriques de quaternions fonctions de x , est l'équation d'une surface.

Pour avoir le degré de cette surface, on la coupe par une droite quelconque passant par l'origine

$$x = x \lambda;$$

on obtient une équation algébrique en x , dont le degré est égal au degré de la surface.

Ainsi l'équation générale des surfaces du premier degré est

$$\Sigma \mathfrak{S} A x + a = 0,$$

A étant un quaternion, ou

$$\mathfrak{S} \Sigma A . x + a = 0.$$

Soient

$$\mathfrak{V} \Sigma A = \lambda,$$

$$\mathfrak{S} \lambda x + a = 0,$$

on retombe sur l'équation générale du plan.

Formons maintenant l'équation générale du deuxième degré

$$\Sigma S A x B x C + \Sigma S D x + a = 0.$$

Considérons l'ensemble des termes du deuxième degré, prenons-en un terme

$$S A x B x C = S C A x B x = S A' x B x,$$

en posant $CA = A'$,

$$S A' x B x = S(A' \cdot S x B x) + S(A' \cdot \vartheta x B x) = b x^2 + S(\lambda \cdot \vartheta x B x),$$

en posant

$$\begin{aligned} b &= S A' \cdot S B, & \lambda &= \vartheta A', & B &= \vartheta B', \\ S A' x B x &= b x^2 + S \lambda [2 x S B x - B x^2] = c x^2 + 2 S \lambda x \cdot S B x, \\ c &= b - S \lambda B. \end{aligned}$$

L'ensemble des termes du deuxième degré peut se mettre sous la forme

$$l x^2 + 2 \Sigma S \lambda x S B x$$

ou

$$S x [l x + \Sigma (\lambda S B x + B S \lambda x)]$$

ou

$$S x \Phi x.$$

en posant

$$\Phi x = l x + \Sigma (\lambda S B x + B S \lambda x),$$

Φx étant une fonction vectorielle linéaire, conjuguée d'elle-même. L'ensemble des termes du premier degré peut se ramener à la forme $2 S \lambda x$, en sorte que l'équation générale des surfaces du second ordre peut s'écrire

$$(1) \quad S x \Phi x + 2 S \lambda x + a = 0.$$

V.

Théorie des centres.

Pour que l'origine soit centre, il faut que l'équation ne change pas en changeant x en $-x$, c'est-à-dire que $a = 0$. Supposons $\lambda \neq 0$, et cherchons si l'on peut déterminer un point C de vecteur c , tel qu'en transportant l'origine en ce point, l'équation ne renferme plus de termes du premier degré en x . Pour transporter

l'origine au point C, il suffit de remplacer x par $x + c$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(x + c)(\Phi x + \Phi c) + 2\mathfrak{S}A(x + c) + a &= 0, \\ \mathfrak{S}x\Phi x + 2\mathfrak{S}x(\Phi c + A) + \mathfrak{S}c\Phi c + 2\mathfrak{S}Ac + a &= 0. \end{aligned}$$

Pour que le point C soit centre, il faut que l'on ait

$$(2) \quad \Phi c + A = 0.$$

On est ramené à résoudre une équation vectorielle linéaire.

Premier cas. — Φx peut prendre toutes les directions de l'espace.

L'équation (2) a une solution et une seule,

$$c = -\Phi^{-1}A;$$

la surface a un centre unique; elle est dite *de première classe*.

Deuxième cas. — Φx ne peut prendre que les directions d'un plan Π .

1° Si A n'est pas dans le plan Π , la surface n'a pas de centre; elle est dite *de deuxième classe*; nous verrons plus loin que c'est un parabolôïde.

2° Si A est dans le plan Π , l'équation (2) a une infinité de solutions, les extrémités des vecteurs-solutions sont en ligne droite; la surface a donc une infinité de centres en ligne droite, elle est dite *de troisième classe*; nous verrons que c'est un cylindre elliptique ou hyperbolique.

Troisième cas. — Φx ne peut prendre qu'une seule direction Δ .

1° Si A n'est pas parallèle à Δ , la surface n'a pas de centre; elle est dite *de quatrième classe*; c'est un cylindre parabolique.

2° Si A est parallèle à Δ , la surface a une infinité de centres dans un plan; elle est dite *de cinquième classe*, et il est aisé de voir qu'elle se compose de deux plans parallèles. En effet, Φx se met sous la forme $gA\mathfrak{S}Ax$; par suite, l'équation de la surface devient

$$g[\mathfrak{S}Ax]^2 + 2\mathfrak{S}Ax + a = 0$$

ou

$$g(\mathfrak{S}Ax - \alpha')(\mathfrak{S}Ax - \alpha'') = 0,$$

ces deux plans étant d'ailleurs réels, imaginaires ou confondus.

Nous obtenons de cette façon cinq classes de surfaces. Nous diviserons plus tard ces classes en genres et variétés, par l'étude des directions d'axes.

Remarquons que si c_0 est une solution de l'équation (2), le point correspondant est centre de la surface; si ce point est l'origine, l'équation de la surface s'écrit

$$\mathfrak{S}x\Phi x + \mathfrak{S}c_0\Phi c_0 + 2\mathfrak{S}Ac_0 + \alpha = 0,$$

et comme

$$\Phi c_0 + \lambda = 0,$$

il vient

$$\mathfrak{S}x\Phi x + \mathfrak{S}Ac_0 + \alpha = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\mathfrak{S}x\Phi x = 1,$$

en divisant les vecteurs de Φx par un nombre convenable.

VI.

Théorie des plans diamétraux.

Le plan diamétral conjugué d'une direction est le lieu géométrique des milieux des cordes parallèles à la direction donnée.

Soient n un vecteur parallèle à la direction donnée, et x_0 un point du lieu. Par ce point, je mène une parallèle à la direction n

$$x = x_0 + xD.$$

Je cherche les points de rencontre avec la surface, et j'écris que ces points sont symétriques par rapport au point x_0 . Il suffit d'écrire que l'équation du deuxième degré en x a ses racines égales et de signe contraire.

On a

$$\mathfrak{S}(x_0 + xD)\Phi(x_0 + xD) + 2\mathfrak{S}A(x_0 + xD) + \alpha = 0,$$

$$x^2\mathfrak{S}D\Phi D + 2x(\mathfrak{S}x_0\Phi D + \mathfrak{S}AD) + \mathfrak{S}x_0\Phi x_0 + 2\mathfrak{S}Ax_0 + \alpha = 0.$$

On doit donc avoir

$$\mathfrak{S}x_0\Phi D + \mathfrak{S}AD = 0.$$

L'équation du plan diamétral est donc

$$\mathfrak{S}x\Phi D + \mathfrak{S}AD = 0 :$$

c'est un plan perpendiculaire au vecteur Φ_D .

Nous remarquons en outre que ce plan n'existe que si Φ_D n'est pas nul.

Étudions maintenant la position des plans diamétraux.

1° *Surfaces de première classe.* — Φ_D n'est jamais nul, le plan diamétral existe toujours, il passe par le centre, car l'équation peut s'écrire

$$\mathfrak{S}_D \Phi X + \mathfrak{S}_{AD} = 0,$$

$$\mathfrak{S}_D(\Phi X + A) = 0,$$

qui est évidemment satisfaite par le vecteur du centre.

Réciproquement, tout plan passant par le centre est un plan diamétral. Soit c_0 le vecteur du centre.

Soit

$$\mathfrak{S}_L(X - c_0) = 0$$

un plan passant par le centre.

On peut déterminer un vecteur n tel que

$$\Phi_D = L:$$

en outre,

$$c_0 = -\Phi^{-1}A.$$

$$-\mathfrak{S}_{LC_0} = \mathfrak{S}_L \Phi^{-1}A = \mathfrak{S} \Phi_D \cdot \Phi^{-1}A = \mathfrak{S}_{AD}.$$

L'équation peut s'écrire

$$\mathfrak{S}_X \Phi_D + \mathfrak{S}_{AD} = 0:$$

c'est bien l'équation d'un plan diamétral.

2° *Surfaces de deuxième classe.* — Le plan diamétral n'existe pas toujours, car Φ_D est nul pour une direction qui est perpendiculaire au plan Π . Les plans diamétraux sont perpendiculaires à Φ_D , qui est parallèle au plan Π ; donc tous les plans diamétraux sont parallèles à une même droite, perpendiculaire au plan Π ; c'est ce que nous appellerons la *direction de l'axe*.

Réciproquement, tout plan parallèle à l'axe est un plan diamétral.

Soit

$$\mathfrak{S}_{LX} + l = 0$$

un plan parallèle à l'axe. Nous pourrions déterminer un vecteur n

tel que

$$\Phi D = L,$$

$$S_{AD} = l.$$

Cela revient à l'intersection d'une droite et d'un plan non parallèle.

3° *Surfaces de troisième classe.* — Les plans diamétraux passent par la ligne des centres, car leur équation peut s'écrire

$$S_D(\Phi x + A) = 0.$$

La réciproque est vraie, tout plan passant par la ligne des centres est un plan diamétral; car, soit le plan

$$S_{LX} + l = 0,$$

les équations

$$\Phi D = L,$$

$$S_{AD} = l$$

représenteront la première une droite, la seconde un plan, et le plan contiendra la droite (on suppose que D est le vecteur courant). Le plan donné sera le plan diamétral d'une infinité de directions, toutes situées dans le plan

$$S_{AX} = l.$$

4° *Surfaces de quatrième classe.* — Les plans diamétraux sont parallèles, car ils sont perpendiculaires à ΦD , qui a une direction fixe; et la réciproque est vraie, tout plan perpendiculaire à la direction de Φx est un plan diamétral; car, soit

$$S_{LX} + l = 0$$

un tel plan, les équations

$$\Phi D = L,$$

$$S_{AD} = l$$

représentent deux plans qui se coupent et donnent une infinité de directions dont le plan donné est le plan diamétral conjugué.

5° *Surfaces de cinquième classe.* — On a dans ce cas

$$\Phi x = g_A S_{AX}.$$

L'équation du plan diamétral conjugué de la direction $\mathbf{n}$ pourra s'écrire

$$g \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{D} + \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{D} = 0$$

ou

$$g \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{X} + 1 = 0 :$$

c'est le plan des centres.

VII.

Théorie des diamètres.

On appelle *diamètre conjugué* d'une direction de plan le lieu des centres des sections planes parallèles à ce plan.

Soit $\mathbf{b}$ un vecteur perpendiculaire à la direction de plan donnée, et soit $\mathbf{x}_0$ un point du lieu; il faut écrire que si par ce point je mène une droite perpendiculaire à $\mathbf{b}$, elle rencontre la surface en deux points symétriques par rapport au point de vecteur $\mathbf{x}_0$.

Soit $\mathbf{n}$ une direction quelconque perpendiculaire à $\mathbf{b}$, telle que

$$(1) \quad \mathbf{S} \mathbf{b} \mathbf{D} = 0,$$

on devra avoir

$$\mathbf{S} \mathbf{x}_0 \Phi \mathbf{D} + \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{D} = 0$$

ou

$$(2) \quad \mathbf{S} \mathbf{D} (\Phi \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}) = 0.$$

La relation (2) doit avoir lieu pour toutes les valeurs de $\mathbf{n}$ satisfaisant à (1); cela exige que $\mathbf{b}$ et $\Phi \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}$ aient même direction

$$\mathbf{b} (\Phi \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}) = 0;$$

donc l'équation du diamètre peut s'écrire

$$\mathbf{b} (\Phi \mathbf{x} + \mathbf{A}) = 0;$$

On pourrait discuter complètement cette équation, comme nous avons fait tout à l'heure. Nous nous bornerons ici à l'étude des surfaces de première classe.

L'équation peut s'écrire

$$\Phi \mathbf{x} + \mathbf{A} = x \mathbf{b},$$

$$\Phi \mathbf{x} = -\mathbf{A} + x \mathbf{b}.$$

$$\mathbf{x} = -\Phi^{-1} \mathbf{A} + x \Phi^{-1} \mathbf{b}.$$

Cette équation représente une droite passant par le point $-\Phi^{-1}A$ qui est le centre, et parallèle à la direction $\Phi^{-1}B$ qui est la direction des cordes conjuguées du plan diamétral perpendiculaire à B .

VIII.

Plans principaux et axes.

On appelle *plan principal* un plan diamétral perpendiculaire à la direction des cordes conjuguées; ces cordes sont dites *cordes principales*.

Soit n un vecteur parallèle à une corde principale, le plan diamétral conjugué est

$$\mathfrak{S}x\Phi D + \mathfrak{S}AD = 0;$$

pour qu'il soit perpendiculaire à D , il faut que

$$\Phi D = gD,$$

ce qui montre que les cordes principales sont parallèles aux directions principales de la fonction Φx . De l'étude faite précédemment résultent les conséquences suivantes :

1° *Surfaces de première classe.* — Nous avons trois directions principales correspondant aux trois racines g_1, g_2, g_3 de l'équation en g . Soient x_1, x_2, x_3 les directions supposées unitaires, on a

$$\Phi x = -(g_1 x_1 \mathfrak{S} x_1 x + g_2 x_2 \mathfrak{S} x_2 x + g_3 x_3 \mathfrak{S} x_3 x)$$

ou

$$\mathfrak{S}x\Phi x = -g_1(\mathfrak{S}x_1 x)^2 - g_2(\mathfrak{S}x_2 x)^2 - g_3(\mathfrak{S}x_3 x)^2.$$

Si l'on prend comme origine le centre de la surface, l'équation sera de la forme

$$g_1(\mathfrak{S}x_1 x)^2 + g_2(\mathfrak{S}x_2 x)^2 + g_3(\mathfrak{S}x_3 x)^2 + h = 0;$$

nous aurons les différents genres, selon les signes de g_1, g_2, g_3 . Les plans principaux seront les trois plans

$$\mathfrak{S}x_1 x = 0,$$

$$\mathfrak{S}x_2 x = 0,$$

$$\mathfrak{S}x_3 x = 0.$$

Si x_1, x_2, x_3 sont les distances du point x à ces trois plans,

l'équation de la surface peut s'écrire

$$g_1 x_1^2 + g_2 x_2^2 + g_3 x_3^2 + h = 0,$$

qui est l'équation réduite en coordonnées cartésiennes.

2° *Surfaces de deuxième et de troisième classe.* — Nous avons deux directions principales dans le plan Π . Soient x_1, x_2 ces directions supposées unitaires,

$$\begin{aligned}\Phi x &= -g_1 x_1 \mathfrak{S} x_1 x - g_2 x_2 \mathfrak{S} x_2 x, \\ \mathfrak{S} x \Phi x &= -g_1 (\mathfrak{S} x_1 x)^2 - g_2 (\mathfrak{S} x_2 x)^2.\end{aligned}$$

Nous voyons tout de suite que si l'on prend comme origine un point de la ligne des centres d'une surface de troisième classe, l'équation de cette surface s'écrit

$$g_1 (\mathfrak{S} x_1 x)^2 + g_2 (\mathfrak{S} x_2 x)^2 + h = 0,$$

où l'on reconnaît les cylindres elliptique et hyperbolique.

Supposons la surface de deuxième classe,

$$\mathfrak{S} x \Phi x + 2 \mathfrak{S} \Lambda x + \alpha = 0,$$

et transportons l'origine en un point de vecteur $\mathbf{b}$ appartenant à la surface

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(\mathbf{x} + \mathbf{b})\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{b}) + 2 \mathfrak{S} \Lambda(\mathbf{x} + \mathbf{b}) + \alpha &= 0, \\ \mathfrak{S} x \Phi x + 2 \mathfrak{S} x(\Phi \mathbf{b} + \Lambda) &= 0.\end{aligned}$$

Déterminons $\mathbf{b}$ en sorte que $\Phi \mathbf{b} + \Lambda$ soit perpendiculaire à x_1 et x_2 , c'est-à-dire que

$$\Phi \mathbf{b} + \Lambda = x \mathfrak{V} x_1 x_2$$

ou

$$\Phi \mathbf{b} = x \mathfrak{V} x_1 x_2 - \Lambda,$$

on peut déterminer x en sorte que le second membre soit parallèle au plan Π ; les vecteurs $\mathbf{b}$, satisfaisant à cette équation, seront sur une droite perpendiculaire à Π , ne rencontrant la surface qu'en un point : c'est l'axe du paraboloid.

Si l'on pose

$$x_1 x_2 = x_3,$$

l'équation pourra s'écrire

$$g_1 (\mathfrak{S} x_1 x)^2 + g_2 (\mathfrak{S} x_2 x)^2 + h \mathfrak{S} x_3 x = 0.$$

3° *Surfaces de quatrième et de cinquième classe.* — Il n'y a qu'une seule direction principale, c'est celle de Φx . On a

$$\begin{aligned}\Phi x &= g x_1 \mathfrak{S} x_1 x, \\ \mathfrak{S} x \Phi x &= g (\mathfrak{S} x_1 x)^2.\end{aligned}$$

Les surfaces de cinquième classe, en prenant l'origine en un centre, auront pour équation

$$g (\mathfrak{S} x_1 x)^2 + h = 0 :$$

ce sont bien des plans parallèles.

Si la surface est de quatrième classe, nous transportons l'origine en un point de la surface, de vecteur $\mathfrak{B}$,

$$\mathfrak{S} x \Phi x + 2 \mathfrak{S} x (\Phi \mathfrak{B} + \Lambda) = 0.$$

Comme Λ n'est pas parallèle à $\Phi \mathfrak{B}$, je pourrai déterminer $\mathfrak{B}$ en sorte que $\Phi \mathfrak{B} + \Lambda$ soit perpendiculaire à Φx ; l'équation deviendra alors

$$g (\mathfrak{S} x_1 x)^2 + h \mathfrak{S} x_2 x = 0,$$

x_2 étant un vecteur unitaire perpendiculaire à x_1 . C'est l'équation d'un cylindre parabolique.

Je bornerai là cette étude des quadriques par la méthode des quaternions. On pourrait aisément retrouver les propriétés des pôles et plans polaires, des plans tangents, etc. Il n'y a évidemment rien de nouveau quant aux résultats, mais les méthodes sont certainement fort intéressantes, et souvent plus élégantes que celles données par la Géométrie cartésienne.

Dans un prochain Mémoire, nous montrerons qu'on peut également appliquer le calcul des quaternions à l'étude des propriétés des courbes et des surfaces.

Extrait d'une Lettre de M. CATALAN.

Le *Bulletin de la Société mathématique* contient (t. XVI, p. 129) ceci :

« *Tout multiple de 8 est la somme de huit carrés impairs.*

» Il serait intéressant, me semble-t-il, d'en trouver (du *théorème*) une démonstration élémentaire. »

Vers le 10 janvier, M. Berdellé, *Délégué cantonal à Rioz* (Haute-Saône), m'a communiqué la démonstration demandée, démonstration fort remarquable ⁽¹⁾. Immédiatement, je lui ai adressé la lettre suivante :

« MONSIEUR,

» Je vous félicite de votre ingénieuse démonstration, et je vous remercie de me l'avoir communiquée. Elle prouve, une fois de plus, la vérité de cet adage : *les idées simples arrivent en dernier.*

» Sans rien changer au fond de cette démonstration, on peut, me semble-t-il, l'abrégier encore, de la manière suivante :

» Soit $8n$ un multiple de 8, autre que zéro. D'après Fermat

$$(1) \quad n - 1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

les carrés pouvant être nuls, en tout ou en partie.

» D'un autre côté, on a l'identité

$$(2) \quad 8x^2 + 2 = (2x + 1)^2 + (2x - 1)^2;$$

d'où résulte

$$8(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 8 = (2a + 1)^2 + (2a - 1)^2 + (2b + 1)^2 + \dots$$

ou, en vertu de l'égalité (1),

$$8n = (2a + 1)^2 + (2a - 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2b - 1)^2 + (2c + 1)^2 \\ + (2c - 1)^2 + (2d + 1)^2 + (2d - 1)^2.$$

C. Q. F. D.

⁽¹⁾ Page 102 de ce Volume.

» THÉORÈME. — *Si un nombre N est la somme de p carrés, $8N + 2p$ est la somme de $2p$ carrés impairs.*

» Même démonstration.

» Exemple :

$$N = 4^2 + 7^2 + 8^2 + 10^2 + 11^2 = 350.$$

Donc

$$\begin{aligned} 2810 &= 9^2 + 7^2 + 15^2 + 13^2 + 17^2 + 15^2 + 21^2 + 19^2 + 23^2 + 21^2 \\ &= 81 + 49 + 225 + 169 + 289 + 225 + 441 + 361 + 529 + 441. \end{aligned}$$

» Corollaire. — *N étant un nombre premier, de la forme $4\mu + 1$, $8N + 4$ est la somme de quatre carrés impairs.*

» En effet, par un autre théorème de Fermat, N est la somme de deux carrés.

» Soit

$$N = 29 = 5^2 + 2^2.$$

Alors

$$8N + 4 = 236 = 11^2 + 9^2 + 5^2 + 3^2.$$

» REMARQUE ⁽¹⁾. — En général, les carrés impairs considérés sont consécutifs deux à deux ⁽²⁾.

» Je suis, Monsieur, votre bien dévoué Collègue,

» E. CATALAN. »

Liège, 12 janvier 1889.

⁽¹⁾ Faite par M. Berdellé.

⁽²⁾ Il peut y avoir exception si $a = 0$ ou $b = 0$, etc.



EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 7 NOVEMBRE 1888.

PRÉSIDENCE DE M. LAISANT.

Communications :

M. Bioche : *Sur les systèmes des courbes qui divisent homographiquement les génératrices rectilignes d'une surface gauche.*

M. Fouret : *Sur la construction d'une droite qui rencontre quatre droites données dans l'espace.*

M. Lemoine : *Sur la construction d'une moyenne proportionnelle entre deux longueurs données.*

M. Poincaré : *Sur la théorie de la chaleur.*

M. Humbert : *Sur l'aire de l'ellipsoïde.*

M. F. Lucas : *Sur le rapport anharmonique de quatre points d'un plan.*

SÉANCE DU 21 NOVEMBRE 1888.

PRÉSIDENCE DE M. LAISANT.

Communications :

M. F. Lucas : *Sur la résolution électrique des équations.*

M. de Presles : *Sur le développement des fonctions méromorphes.*

M. Raffy : *Sur la rectification des cubiques unicursales.*

M. Laisant : *Sur un système factoriel de numération, et son application au classement des permutations.*

SÉANCE DU 5 DÉCEMBRE 1888.

PRÉSIDENCE DE M. ANDRÉ.

Communications :

M. Fouret : *Sur les projections des sommets d'un tétraèdre équilatéral sur une droite.*

M. Kœnigs : *Sur les volumes engendrés par un contour.*

M. Laisant : *Sur un paradoxe géométrique.*

M. Laisant communique un projet de loi ayant pour objet l'adoption d'une heure légale.

SÉANCE DU 19 DÉCEMBRE 1888.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ.

Élection : M. Édouard Chailan, présenté par MM. Goursat et Appell, est élu à l'unanimité.

SÉANCE DU 9 JANVIER 1889.

PRÉSIDENCE DE M. LAISANT.

La Société procède au renouvellement de son Bureau.

Communications :

M. Kœnigs : *Sur la perspective des lignes asymptotiques d'une surface.*

SÉANCE DU 23 JANVIER 1889.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ.

Communications :

M. Laisant communique un Mémoire de M. Papelier : *Sur*

l'application du calcul des quaternions à l'étude des surfaces du second ordre.

M. Carvallo : *Sur l'opérateur ∇ .*

M. Fouret : *Sur l'équation de Riccati.*

M. Chailan : *Sur le mouvement d'un point pesant sur une sphère.*

M. Laisant : *Sur le rapport anharmonique de quatre points d'un plan.*

SÉANCE DU 6 FÉVRIER 1889.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ.

Élection : M. Georgian, présenté par MM. André et Raffy, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Poincaré : *Sur le problème des trois corps.*

M. Carvallo : *Sur les intégrales multiples et les quaternions.*

M. F. Lucas : *Sur les points associés de M. Laguerre.*

M. Kœnigs : *Sur les intégrales algébriques de la Dynamique.*

SÉANCE DU 20 FÉVRIER 1889.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ.

Élections : M. Fouché, présenté par MM. D. André et L. Lévy; M. Jonquière, présenté par MM. D. André et Poincaré, sont élus à l'unanimité.

Communications :

M. Laisant : *Sur la manière de représenter une fonction entière ou une forme binaire et ses dérivées par un déterminant.*

SÉANCE DU 6 MARS 1889.

PRÉSIDENTE DE M. D. ANDRÉ.

Élection : M. Mendizabal Tamborell, présenté par MM. Hermite et Picard, est élu à l'unanimité.

M. Kœnigs présente des travaux de M. Bioche : *Sur les courbes de Bertrand*, et de M. Antomari : *Sur les géodésiques du cône*.

M. Kœnigs : *Sur l'intégration de certaines équations du second ordre*.

SÉANCE DU 20 MARS 1889.

PRÉSIDENTE DE M. D. ANDRÉ.

Communications :

M. Fouché : *Sur la définition de l'égalité des temps en Mécanique, et sur la loi de l'inertie et le mouvement absolu*.

M. Lucas : *Sur l'élimination d'un paramètre variable dans les questions de Géométrie analytique*.

SÉANCE DU 3 AVRIL 1889.

PRÉSIDENTE DE M. D. ANDRÉ.

Communications :

M. Picard communique une Note de M. Gomes Teixeira : *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*.

M. Kœnigs communique une Note de M. Goursat : *Sur une propriété des surfaces minima*.

M. Jonquière : *Sur la série*
$$\sum_{n=\lambda}^{n=\infty} \frac{X_n}{n^s}.$$

SÉANCE DU 17 AVRIL 1889.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ.

Communications :

M. Bioche : *Sur les conséquences de l'expression du ds^2 des surfaces réglées.*

SÉANCE DU 1^{er} MAI 1889.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ.

Communications :

M. André communique une lettre de M. Léopold Hugo : *Sur les nombres doublement parfaits.*

SÉANCE DU 13 MAI 1889.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ.

Communications :

M. André communique une Note de M. Laquière : *Sur un problème de M. Laisant.*

M. Vicaire : *Sur les $\int$ singulières en Mécanique.*

SÉANCE DU 5 JUIN 1889.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ.

Communications :

M. André : *Une démonstration de M. Catalan relative à la théorie des nombres.*

SÉANCE DU 19 JUIN 1889.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ.

Communications :

M. de Presles : *Sur les conditions de réalité des racines de l'équation en S.*

M. F. Lucas : *Sur un problème de Géométrie.*

M. Fouret : *Sur quelques propriétés involutives des courbes algébriques.*

M. Kœnigs : *Sur un problème relatif à deux courbes gauches dans l'espace.*

SÉANCE DU 17 JUILLET 1889.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ.

Élection : M. Béghin, présenté par MM. D. André et Humbert, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Jeffery : *Sur l'identité des mœurs des contravariants quartique et sextique des courbes du quatrième ordre.*

M. Catalan : *Sur un problème de probabilités, relatif à la durée d'un jeu, et sur une identité qui résulte des solutions données par MM. Rouché et Delamey.*

M. Bioche : *Sur les ombilics des surfaces.*

M. d'Ocagne : *Sur les transformations isogonales.*

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XVII.

	Pages
État de la Société mathématique de France au commencement de l'année 1889.....	5
Statique des polynômes; par M. FELIX LUCAS.....	17
Égalité à deux degrés; par M. MICHEL FROLOV.....	69
Étude géométrique sur la courbure des pseudo-surfaces; par M. l'abbé ISSALY.....	84
Démonstration élémentaire d'un théorème énoncé par M. E. Catalan; par M. BERDELLÉ.....	102
Sur une propriété des surfaces minima; par M. E. COURSAT.....	102
Sur un déterminant remarquable; par M. C.-A. LAISANT.....	104
Sur les nombres de Bernoulli; par M. MAURICE D'OCAGNE.....	107
Sur les courbes de M. Bertrand; par M. CH. BIOCHE.....	109
Mouvement d'un point pesant sur une sphère. — Détermination, à l'aide des conditions initiales, des cas où le mobile quitte la sphère; par M. CHAILAN.....	112
Sur une propriété caractéristique des lignes géodésiques d'un cône; par M. X. ANTONARI.....	118
Note sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre; par F. GOMES TEIXEIRA.....	125
Sur certaines expressions quadruplement périodiques; par M. ÉMILE PICARD.....	131
Note sur la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n}$; par M. ALFRED JONQUIÈRE.....	142
Sur les lois de force centrale fonction de la distance pour laquelle toutes les trajectoires sont algébriques; par M. G. KÖNIGS.....	153
Sur une proposition empirique énoncée au <i>Bulletin</i> ; par M. JOSEPH PERROTT.....	155
Sur les fonctions réduites suivant un module premier; par M. A.-E. PELLET.....	156
Sur un problème de Géométrie cinématique; par M. LAQUIÈRE.....	167
Note sur les variations du rapport anharmonique de quatre points, dont trois sont fixes; par M. C.-A. LAISANT.....	169
Sur les isométriques d'une droite par rapport à un système de droites concourantes; par M. M. D'OCAGNE.....	171
Sur l'identité des nœuds d'une courbe du quatrième ordre et des nœuds de ses contravariants quartique et sextique; par M. HENRY JEFFERY.....	176
Applications du calcul des quaternions à l'étude des surfaces du second ordre; par M. PAPELIER.....	182
Extrait d'une lettre de M. CATALAN.....	205
Extrait des Procès-Verbaux des Séances.....	207

18216 Paris Imprimerie GAUTHIER VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.



PARIS. --- IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

Reconnue d'utilité publique par décret en date du 11 février 1888

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME DIX-HUITIÈME.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1890

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

15777. Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,
PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME DIX-HUITIÈME. — ANNÉE 1889-90.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.
—
1890

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE,

DEPUIS SA FONDATION.

MM.

1873	CHASLES.
1874	LAFON DE LADÉBAT.
1875	BIENAYMÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.
1877	MANNHEIM.
1878	DARBOUX.
1879	O. BONNET.
1880	JORDAN.
1881	LACUERRE.
1882	HALPHEN.
1883	ROUCHÉ.
1884	PICARD.
1885	APPELL.
1886	POINCARÉ.
1887	FOURET.
1888	LAISANT.
1889	ANDRÉ.
1890	HATON DE LA GOUILLIÈRE.

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1890 (*).

Membres honoraires du Bureau	{	MM. BERTRAND. CREMONA. HERMITE. TCHÉBICHEFF.
Président		MM. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
Vice-Présidents	{	COLLIGNON. DE COMBEROUSSE. PICQUET. VICAIRE.
Secrétaires	{	HUMBERT. KOENIGS.
Vice-Secrétaires	{	CARVALLO. RAFFY.
Archiviste		D'OCAGNE
Trésorier		CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil (†)	{	ANDRÉ, 1893. APPELL, 1891. CLAYEUX, 1892. DARBOUX, 1891. FOURET, 1893. GOURSAT, 1892. JORDAN, 1892. LAISANT, 1892. MANNHEIM, 1891. PICARD, 1891. POINCARÉ, 1893. ROUCHÉ, 1893.

(*) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(†) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission.

1872. **ACHARD**, directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 bis, à Paris.
1887. **ALBEGGIANI** (M.-L.), professeur à l'Université, 4, Salita Banditore, à Palerme (Italie).
1881. **AMIGUES**, professeur au lycée, boulevard du Musée, 66, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès Sciences, rue Gay-Lussac, 17, à Paris.
1879. **APPELL**, professeur à la Faculté des sciences, rue Le Verrier, 6, à Paris.
1884. **ARNAUD**, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Nice (Alpes-Maritimes).
1872. **ARON** (Henri), banquier, rue du Quatre-Septembre, 18, à Paris.
1881. **ASTOR**, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard de Bonne, à Grenoble (Isère).
1882. **AUTONNE**, ingénieur des Ponts et Chaussées, place d'Helvétie, 7, à Lyon (Rhône).
1888. **BAPST** (Germain), faubourg Saint-Honoré, 215, à Paris.
1886. **BARBERENA**, ingénieur topographe, à San-Salvador.
1889. **BEGHIN** (Maurice), boulevard Saint-Germain, 63.
1874. **BENOIST** (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, 3, à Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loire), S. P. (1).
1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1873. **BETRAND** (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, membre de l'Académie française, rue de Tournon, 4, à Paris.
1887. **BEYENS** (Ignacio), capitaine du Génie, 5, Santa Inès, à Cadix (Espagne).
1872. **BIENAYNÉ** (Arthur), directeur des constructions navales, au Ministère de la Marine, à Paris.
1872. **BIENAYNÉ**, membre de l'Institut (décédé), S. P.
1888. **BIOCHE**, professeur au Lycée Michelet, 34, rue de Madame, à Paris, S. P.
1875. **BISCHOFFSHEIM**, banquier, rue Taitbout, 3, à Paris, S. P.
1890. **BJERKNES**, 5, rue des Carmes, à Paris.
1881. **BONCOMPAGNI** (le prince Balthasar), palais Piombino, place Colonna, à Rome (Italie).
1879. **BORCHARDT**, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé), S. P.
1873. **BOULANGER**, professeur de Mathématiques, rue Constantine, 101, à Mustapha inférieur (Algérie).
1886. **BRAULT** (A.), 362, boulevard de Toulouse, à Bordeaux (Gironde).
1874. **BRIOSCHI**, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École Polytechnique, à Milan (Italie).
1872. **BRISSE** (Ch.), répétiteur à l'École Polytechnique, 18, rue Vauquelin, à Paris.
1873. **BROCARD**, chef de bataillon du Génie, à Valence (Drôme).
1886. **BRUNEL**, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1888. **CANET** (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie à la Société des Forges de la Méditerranée, avenue de Malakoff, 91, à Paris. S. P.
1885. **CARON**, professeur de Géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 82, à Paris.
1887. **CARVALLO**, professeur au lycée Saint-Louis, 19, villa Saïd, Passy-Paris.
1884. **CASEY** (John), professeur à l'Université catholique de Dublin, Stephens Green, 86, à Dublin (Grande-Bretagne).
1887. **CASPARY**, professeur au Collège Humboldt, à Berlin (Allemagne).
1873. **CATALAN**, professeur émérite à l'Université, 21, rue des Éburons, à Liège (Belgique).

(1) Les initiales S. P. désignent les Sociétaires perpétuels.

Date
de
l'admission.

- 1887. CERRUTI, professeur à l'Université, à Rome (Italie).
- 1888. CHAILAN (Edouard), rue Berthollet, 14, à Paris.
- 1872. CHASLES, membre de l'Institut (décédé), S. P.
- 1881. CHEMIN, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, avenue de l'Alma, 12, à Paris.
- 1884. CHRYSAL, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
- 1873. CIVALE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.
- 1875. CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris, S. P.
- 1872. CLAYEUX, intendant divisionnaire en retraite, avenue de Clichy, 52, à Paris.
- 1872. COLLIGNON, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
- 1875. COMBEROUSSE (DE), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale, rue Saint-Lazare, 94, à Paris.
- 1872. COURCELLES, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, 36, rue Gay-Lussac, à Paris.
- 1884. CRAIG (Thomas), professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
- 1877. CRÉMONA, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome (Italie).
- 1880. CRÉTIN, professeur au lycée Saint-Louis, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
- 1872. DARBOUX, professeur à la Faculté des Sciences, membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
- 1885. DAUTHEVILLE, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
- 1881. DEFFORGES, chef de bataillon d'infanterie, attaché à l'Etat-major du Ministre de la Guerre, boulevard Latour-Maubourg, 41, à Paris.
- 1882. DELANNOY, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
- 1885. DENARTRES, professeur à la Faculté des Sciences, à Lille (Nord).
- 1883. DERUYTS, docteur ès sciences, chargé de Cours à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
- 1872. DEWULF, Général de brigade commandant le Génie de la 15^e région, 2, boulevard Rabuteau, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
- 1882. DREYFUS (Camille), député, rue de l'Université, 195, à Paris.
- 1886. DUNCAN, assistant à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
- 1872. DURRANDE, doyen de la Faculté des Sciences, à Poitiers (Vienne).
- 1885. DYCK (Walther), professeur au Polytechnicum, à Munich (Bavière).
- 1881. ESCARY, professeur au Lycée à Constantine (Algérie).
- 1873. FABRE, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Trudaine, 26, à Paris.
- 1888. FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
- 1885. FERRAZ, professeur au Lycée, à Toulouse (Haute-Garonne).
- 1885. FIELDS (John), professeur à Hamilton (Canada).
- 1882. FLEUREAU, ingénieur des Ponts et Chaussées, au Puy (Haute-Loire).
- 1881. FLOQUET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 17, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
- 1872. FLYE SAINTE-MARIE, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 12, à Paris.
- 1889. FOUCHÉ, professeur de mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris.
- 1872. FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris, S. P.
- 1872. GABRIEL, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, agrégé de la Faculté de Médecine, rue Jouffroy, 39, à Paris.

Date
de
l'admission.

1872. **GAUTHIER-VILLARS**, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
 1872. **GENTY**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Oran (Algérie).
 1889. **GEORGIAN**, rue Vauquelin, 3, à Paris.
 1872. **GERONO**, ancien professeur de mathématiques, rue Hallé, 32 et 34, à Paris.
 1872. **GOFFART**, 57, rue Nollet, Paris.
 1881. **GOURSAT**, maître de Conférences à l'École Normale supérieure, 83, rue Denfert-Rochereau, à Paris.
 1872. **GRAINDORGE**, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
 1881. **GRUEY**, directeur de l'Observatoire, à Besançon (Doubs).
 1880. **GUCCIA** (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Sicile).
 1881. **GUNTHER** (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
 1885. **GUYOU**, capitaine de frégate, 13, rue de l'Université, à Paris.
 1873. **HACG**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 1, à Paris.
 1882. **HANICH**, directeur de l'École des mines, à Lima (Pérou).
 1872. **HALPHEN**, membre de l'Institut (décédé). S. P.
 1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des Mines, directeur de l'École des Mines, 60, boulevard Saint-Michel, à Paris, S. P.
 1872. **HENRY**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Privas (Ardèche).
 1882. **HENRY** (Charles), bibliothécaire à la Sorbonne, 2, rue Jean-de-Beauvais, à Paris.
 1872. **HERMARY**, lieutenant-colonel d'Artillerie à la Commission d'expériences, à Calais.
 1873. **HERMITE**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris, S. P.
 1875. **HIRST**, Athenæum Club, Londres (Angleterre), S. P.
 1879. **HOLST** (Elling), stipendiat de l'Université, Pilestrade, 49, à Christiania (Norvège).
 1872. **HOUBIGANT**, chef de bataillon du Génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
 1872. **HUGO** (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
 1880. **HUMBERT**, ingénieur des Mines, répétiteur à l'École Polytechnique, 16, boulevard Malesherbes, à Paris.
 1887. **IBRAHIM EFFENDI**, professeur de Mathématiques à l'École impériale civile de Médecine, à Constantinople (Turquie).
 1881. **IMBER**, professeur à l'École Colbert, 27, rue Château-Landon, à Paris.
 1887. **ISSALY** (l'abbé), boulevard de Caudéran, 365, à Bordeaux (Gironde).
 1873. **JANIN**, chef d'escadron au 17^e régiment d'Artillerie, à la Fère (Aisne).
 1872. **JAVARY**, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris.
 1889. **JONQUIÈRE** (Alfred), Docteur en Philosophie, 10, rue Fédérale, à Berne (Suisse).
 1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varenne, 48, à Paris, S. P.
 1872. **JOUFFRET**, lieutenant-colonel d'Artillerie, à Bourges (Cher).
 1875. **JUNG**, professeur à l'Institut technique supérieur, 7, via Principe Umberto, à Milan (Italie).
 1880. **KÖNIGS**, maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard de Port-Royal, 72, à Paris.
 1890. **KOPP**, 18 bis, rue Denfert-Rochereau, à Paris.
 1882. **KOVALEWSKY** (M^{me} DE), professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).

Date
de
l'admission.

1882. **KRONECKER** (Dr Léopold). professeur à l'Université, Bellevuestrasse, 13, à Berlin (Allemagne).
1881. **LACOR**, professeur de Mathématiques, 10, rue Stanislas, à Paris.
1872. **LAFFON DE LADEBAT**, vice-amiral (décédé), S. P.
1890. **LAGERBORG** (M^{lre}), 18 bis, rue Denfert-Rochereau, à Paris.
1873. **LAISANT**, député, docteur ès sciences, avenue Victor Hugo, 162, à Paris.
1875. **LAQUIÈRE**, administrateur de la commune mixte de Palestro (département d'Alger).
1873. **LAUTH**, manufacturier, à Thann (Alsace).
1881. **LAVEISSIÈRE**, rue de la Verrerie, 58, à Paris.
1880. **LÉAUTÉ**, directeur des études à l'école Monge, 141, boulevard Malesherbes, à Paris.
1872. **LEMOINE** (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Littré, 5, à Paris.
1879. **LE PAIGE**, professeur à l'Université, rue des Anges, 21, à Liège (Belgique).
1882. **LE PONT**, 247, rue Saint-Jacques, à Paris.
1872. **LESPIAULT**, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1882. **LÉVY** (Léon), ingénieur en chef des Mines, rue de Logelbach, 9, à Paris.
1882. **LÉVY** (Lucien), directeur des Études de l'École préparatoire de Sainte-Barbe, rue Valette, à Paris.
1872. **LÉVY** (Maurice), membre de l'Institut, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur au Collège de France, boulevard Saint-Germain, 258, à Paris.
1875. **LEZ** (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1873. **LIGUINE**, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
1877. **LINDEMANN**, professeur à l'Université, Fragheimer-Pulverplatz, 5, à Königsberg (Allemagne).
1886. **LILOUVILLE**, ingénieur des poudres, répétiteur à l'École Polytechnique, rue des Écoles, 6 bis, à Paris.
1880. **LORIN**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Honoré, 186, à Paris.
1872. **LUCAS** (Édouard), professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, 1, rue Boutarel, à Paris.
1888. **LUCAS** (Félix), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, avenue du Trocadéro, 19, à Paris.
1886. **LYON**, étudiant en Mathématiques, au bureau de M. le Baron de Gunsbourg, à Saint-Petersbourg.
1882. **MACÉ DE LÉPINAY**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, boulevard Saint-Michel, 14, à Paris.
1872. **MALEYX**, professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 44, à Paris.
1875. **MALLOIZEL**, professeur de Mathématiques, rue de l'Estrapade, 17, à Paris.
1872. **MANNHEIM**, colonel d'Artillerie, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
1872. **MARSILLY** (le général de), rue Chante-Pinot, à Auxerre (Yonne).
1884. **MARTIN** (Artemas), U. S. Coast and geodesic Survey Office, Washington D. C. (Etats-Unis d'Amérique).
1889. **MARTIN**, ancien élève de l'École polytechnique, professeur de Mathématiques, 60, rue Lhomond, à Paris.
1873. **MATHIEU** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, quai Claude-le-Lorrain, 20, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1886. **MAXIMOVITCH** (Vladimir), professeur à l'Université, 8, rue Timoficoska, à Kiew (Russie).

Date
de
l'admission

1889. **REYDZABAL YIMBORREL DE**, membre de la Société de Géographie de Mexico. 1^{er} de Cora, n° 112, Orizaba (Mexique).
1881. **REZMERZAL**, licencié ès sciences, boulevard Saint-Michel, 121, à Paris. S. P.
1873. **RITTIG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1872. **ROCHARD**, inspecteur général des Mines, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1888. **ROHOPADHYAY** (Asutosh), professeur de Mathématiques, 77, Russa Road, North Bhowanipore, à Calcutta (Inde).
1885. **ROUBERG**, professeur à l'Université, rue Selessin, 6, à Liège (Belgique).
1882. **ROCHER** (D'), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1873. **RODIO** (Enrico D'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1888. **ROPIER** (Georges), professeur de Mathématiques spéciales au Lycée d'Orléans, quai Barrentin, 22, à Orléans (Loiret).
1881. **ROSE**, agrégé des Sciences mathématiques, maître de conférences à la Faculté des Sciences, 53, rue du Faubourg-Stanislas, Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1872. **ROSTKOWSKI** (le général), rue du Cirque, 5, à Paris.
1872. **ROSTKOWSKI**, ingénieur en chef des Mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris.
1882. **ROSTKOWSKI**, ancien élève de l'École Polytechnique, à Valegnat, par Bellevaux (Allier).
1881. **ROSTKOWSKI** (l'abbé), professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 19, à Paris.
1881. **ROSTKOWSKI**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Blatin, 51, à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1883. **ROSTKOWSKI**, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Constantine (Algérie).
1871. **ROSTKOWSKI**, chef d'escadron d'Artillerie, commandant le 4^e bataillon de forteresse, à Verdun (Meuse).
1881. **ROSTKOWSKI** (Joseph), Université John Hopkins, à Baltimore (Etats-Unis d'Amérique). S. P.
1873. **ROSTKOWSKI**, ingénieur en chef des Mines, rue Erpell, 5, au Mans (Sarthe), S. P.
1887. **ROSTKOWSKI** (DEL), professeur à l'Université, 75, via Gennaro Serra, à Naples (Italie).
1873. **ROSTKOWSKI**, secrétaire de la Faculté des Sciences, à la Sorbonne, à Paris.
1879. **ROSTKOWSKI** (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
1872. **ROSTKOWSKI**, chef de bataillon du Génie, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Bara, 9, à Paris.
1882. **ROSTKOWSKI**, membre de l'Institut, ingénieur des Mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris. S. P.
1882. **ROSTKOWSKI** (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohême).
1872. **ROSTKOWSKI** (prince C. DE), 6, cité Odier, rue Washington, à Paris. S. P.
1877. **ROSTKOWSKI**, professeur au lycée, à Poitiers (Vienne).
1877. **ROSTKOWSKI** (DE), sous-intendant militaire en retraite, rue Monge, 82, à Paris.
1881. **ROSTKOWSKI**, répétiteur au lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 11, à Paris.
1872. **ROSTKOWSKI** (le général), rue Saint-Mery, 98, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
1872. **ROSTKOWSKI**, rue de Tournon, 12, à Paris.
1883. **ROSTKOWSKI**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, boulevard Saint-Michel, 99, à Paris.
1873. **ROSTKOWSKI** (DE), administrateur de la Compagnie d'assurances *le Soleil*, rue Fortuny, 5, à Paris.
1871. **ROSTKOWSKI** (baron DE), banquier, rue de la Bourse, 1, à Paris.

Date
de
l'admission.

1875. **REY** (Casimir), professeur à l'École du Génie, boulevard de la Reine, 25, à Versailles (Seine-et-Oise).
1872. **RIBACOUR**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Philippeville (Algérie).
1881. **RIBOT**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon (Côte-d'Or).
1888. **ROBIN** (Gustave), docteur ès sciences mathématiques, rue Chanoinesse, 2, à Paris.
1872. **RODET**, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, 63, à Paris.
1872. **ROUART**, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.
1872. **ROUCHÉ** (Eugène), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
1885. **ROUQUET**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, place de l'École-d'Artillerie, 2, à Toulouse (Haute-Garonne).
1872. **ROUSSELIN**, professeur au lycée Fontanes, rue du Rocher, 35, à Paris.
1888. **RUSSO** (Giovanni), professeur à Catanzaro, Discesa Case Arse, 2 (Italie).
1881. **SAINT-PAUL** (DUCC DE), sous-directeur d'Artillerie à l'Arsenal de Toulouse (Haute-Garonne).
1889. **SARAZ**, professeur de Mathématiques, 60, rue Monsieur-le-Prince, Paris.
1872. **SARRAU**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des Poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mandé (Seine).
1872. **SARTIAUX**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, chef adjoint de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. **SCHLEGEL** (Dr Victor), à Hagen (Allemagne).
1881. **SCHOUTE**, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1876. **SCHUBERT**, professeur, Steindamm, 107, à Hambourg (Allemagne).
1877. **SÉGUY**, avenue des Gobelins, 28, à Paris.
1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 102, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
1883. **SIMART**, lieutenant de vaisseau, répétiteur à l'École Polytechnique, examinateur d'admission à l'École navale, rue Miroménil, 70, à Paris.
1884. **SIMONNET**, chef d'escadron d'artillerie, à Versailles (Seine-et-Oise).
1881. **STANKOFF** (Alexis), professeur à l'École de Commerce, Deribasowskaja, 6, à Odessa (Russie).
1879. **STEPHANOS** (Dr Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
1886. **STIELTJES**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Fleurance-Montplaisir, 4, à Toulouse (Haute-Garonne).
1873. **STUDNICKA**, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
1872. **SYLOW**, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège), S. P.
1872. **TANNERY** (Paul), directeur des Manufactures de l'État, rue de Penthèvre, 38, Paris. S. P.
1875. **TANNERY** (Jules), sous-directeur de l'École Normale supérieure, 45, rue d'Ulm, à Paris.
1882. **TARRY** (Gaston), receveur des Contributions diverses, rue Clauzel, à Alger (Algérie), S. P.
1882. **TEUBICHIEFF**, membre de l'Académie des Sciences, à Saint-Petersbourg (Russie), S. P.
1872. **TERRIER**, professeur de Mathématiques, rue de Condé, 15, à Paris.
1886. **THEWISS**, docteur ès sciences de l'Université de Liège, rue Casimir-Delavigne, 3, à Paris.
1872. **TISSERAND**, membre de l'Institut, avenue de l'Observatoire, 5, à Paris.

Date
de
l'admission.

1873. **TISSOT**, ancien examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1872. **TRESCA**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
1872. **VACQUANT**, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
1884. **VANDAME**, ancien officier d'Artillerie, rue de la Vignette, 65, à Lille (Nord).
1880. **VANECEK** (J.-S.), professeur au lycée, à Jičín (Bohême).
1885. **VANECEK** (M.-M.), professeur à Kralové Hradec (Autriche).
1876. **VICAIRE**, ingénieur en chef des Mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
1882. **VIELLARD**, manufacturier, décédé, S. P.
1888. **VITO VOLTERRA**, professeur titulaire de Mécanique rationnelle à l'Université de Pise (Italie).
1880. **WALCKENAEK**, ingénieur des Mines, 9, rue Bayard, à Paris.
1879. **WEILL**, professeur de Mathématiques au collège Chaptal et à l'école Monge, 19, rue Thiers, au Vésinet (Seine-et-Oise).
1873. **WEYR** (Dr Édouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
1872. **WEYR** (Dr Émile), professeur à l'Université, Hauptstrasse, 109, à Vienne, III (Autriche).
1882. **WILSON**, 2, avenue d'Iéna, à Paris.
1878. **WORMS DE ROMILLY**, ingénieur en chef des Mines, rue Balzac, 7, à Paris.
1882. **ZABOUBSKY**, capitaine de l'Artillerie russe, professeur à l'École d'Artillerie, à Saint-Petersbourg (Russie).
1881. **ZEUTHEN**, professeur à l'Université, Citadelsvej, 9, à Copenhague (Danemark).

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

BENOIST, docteur en droit.
BIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé).
BIOCHE, professeur de mathématiques.
BISCHOFFSHEIM, banquier.
BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé).
BROCARD, chef de bataillon du Génie.
CANET, ingénieur civil.
CHASLES, membre de l'Institut (décédé).
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier.
FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique.
GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-éditeur.
HALPHEN, membre de l'Institut (décédé).
HATON DE LA COUPILLIÈRE, membre de l'Institut.
HERWITE, membre de l'Institut.
HIRST, directeur des études de l'École navale de Greenwich.
JORDAN, membre de l'Institut.
LAFFON DE LADÉBAT, vice-amiral (décédé).
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique.
MERCEREAU, licencié ès sciences mathématiques.
PEROTT (Joseph).
PERRIN, ingénieur en chef des Mines.
POINCARÉ, membre de l'Institut.
POLIGNAC (prince C. de).
RAFFY, maître de conférences à la Faculté des Sciences.
SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald.
TANNERY (Paul), ingénieur des manufactures de l'État.
TARRY, receveur des Contributions diverses.
TCHÉBICHEFF, membre de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg.
VIELLARD, manufacturier (décédé).

Modifications survenues depuis la publication de la dernière liste.

ANNEXE VII

WU BUCH
KOMMUN
LUT
LUTHERAN W
WU
SAB

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik</i> (rédac- teur Dr Hoppe, Prinzenstrasse, 6g. S. W.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathe- matik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Ma- thematik</i> (rédacteurs MM. Kronecker et Weierstrass).	Allemagne.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics</i> , publié par l'Université John Hopkins (rédacteur M. Thomas Craig).	États-Unis d'Amérique.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bo- logne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Bruxelles.....	Société Belge d'Électriciens.	Belgique.
Cambridge.....	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab</i> chez M. Gammenneyer, libraire, Carl Johans Gade, 33, à Christiania.	Norvège.
Coïmbre.....	<i>Jornal de Sciencias matematicas e astrono- micas</i> (rédacteur M. Gomes Teixeira).	Portugal.
Copenhague.....	<i>Tidsskrift for Mathematik</i> (rédacteur M. Zeu- then).	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences.	Autriche.
Delft.....	École Polytechnique de Delft.	Hollande.
Dresde.....	<i>Zeitschrift für Mathematik und Physik</i> (ré- dacteur Dr Oscar Schlömilch).	Allemagne.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis</i> (rédacteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).	Belgique.
Goettingen.....	Société Royale des Sciences de Goettingue.	Allemagne.
Goettingen.....	<i>Mathematische Annalen</i> (rédacteur M. Felix Klein).	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Russie.
Kharkoff.....	Société mathématique de Kharkoff.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.

Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne
Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Mexico.....	Sociedad científica « Antonio Alzate ».	Mexique.
Mexico.....	Observatoire météorologique magnétique central.	Mexique.
Milan.....	<i>Annali di Matematica</i> (rédacteur M. Brioschi).	Italie.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis d'Amérique.
Odessa.....	Société mathématique d'Odessa.	Russie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences, à Paris.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques</i> (rédacteurs MM. Darboux et J. Tannery).	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique</i> .	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques élémentaires</i> de de Longchamps, à Paris.	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques spéciales</i> de de Longchamps, à Paris.	France.
Palerme.....	<i>Circolo matematico (Rendiconti del)</i> .	Italie.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Prague.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pěstování matematiky a fysiky</i> (rédacteur M. Eduard Weyr).	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Prague.	Autriche.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincei</i> .	Italie.
Saint-Petersbourg.	<i>Formulaire de Physique générale</i> (29, Perspective anglaise).	Russie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm.....	<i>Acta Mathematica</i> (rédact. M. Mittag-Leffler).	Suède.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse</i> .	France.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Venise.....	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Zurich.....	Société des Sciences naturelles de Zurich.	Suisse.

DÉCRET

QUI RECONNAIT COMME ÉTABLISSEMENT D'UTILITÉ PUBLIQUE
LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

LE PRÉSIDENT DE LA RÉPUBLIQUE FRANÇAISE,

Sur le rapport du Ministre de l'Instruction publique, des Cultes et des Beaux-Arts;

Vu la demande formée par la Société mathématique de France, à l'effet d'être reconnue comme établissement d'utilité publique;

Vu les statuts de cette Société, l'état de sa situation financière et les autres pièces produites à l'appui de sa demande;

Vu les avis favorables du Vice-Recteur de l'Académie de Paris et du Préfet de la Seine;

La Section de l'Intérieur, de l'Instruction publique, des Cultes et des Beaux-Arts du Conseil d'État entendue;

DÉCRÈTE :

ART. 1. — La Société mathématique de France est reconnue comme établissement d'utilité publique.

ART. 2. — Les statuts sont approuvés tels qu'ils sont ci-annexés. Aucune modification ne pourra y être apportée sans l'autorisation du Gouvernement.

ART. 3. — Le Ministre de l'Instruction publique, des Cultes et des Beaux-Arts est chargé de l'exécution du présent décret.

Fait à Paris, le 11 février 1888.

Signé : CARNOT.

*Le Ministre de l'Instruction publique,
des Cultes et des Beaux-Arts,*

Signé : LEOPOLD FAYE.



STATUTS

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

ARTICLE PREMIER.— L'Association dite *Société mathématique de France*, fondée en 1872, a pour objet l'avancement et la propagation des études de Mathématiques pures et appliquées.

Elle y concourt par ses travaux et ses publications.

Elle a son siège à Paris.

ART. 2. — La Société se compose de sociétaires perpétuels, de membres résidents et de membres non résidents, en nombre illimité.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leur domicile ou leurs occupations professionnelles.

Les Étrangers peuvent faire partie de la Société.

ART. 3. — Les conditions à remplir, pour être membre de la Société, sont les suivantes : 1° avoir été présenté par deux de ses membres et agréé par le Conseil d'administration ou par le Bureau agissant en vertu d'un mandat du Conseil; 2° avoir obtenu, à l'une des séances qui ont suivi la présentation, les suffrages de la majorité des membres présents; 3° avoir versé un droit d'admission de *dix francs*; 4° payer une cotisation annuelle dont le montant est de *vingt francs* pour les membres résidents, et de *quinze francs* pour les membres non résidents.

La cotisation annuelle peut toujours être rachetée par une somme de *trois cents francs*, versée dans les conditions fixées par le règlement administratif de la Société.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

ART. 4. — Le Bureau de la Société comprend :

- 1 président;
- 4 vice-présidents;
- 2 secrétaires;
- 2 vice-secrétaires;
- 1 trésorier;
- 1 archiviste.

Le Conseil d'administration se compose des membres du Bureau et de douze autres membres de la Société.

Le Bureau et le Conseil se recrutent exclusivement parmi les membres résidents de nationalité française.

Toutefois, un certain nombre de membres, résidents ou non résidents, français ou étrangers, peuvent, à titre honoraire, figurer parmi les membres du Bureau.

Les fonctions du Bureau et du Conseil sont gratuites.

ART. 5. — Le Bureau est élu pour un an.

Les membres du Bureau sont indéfiniment rééligibles dans les mêmes fonctions. Toutefois, la présidence ne peut être confiée au même sociétaire pendant plus de deux années consécutives.

Les autres membres du Conseil sont renouvelés chaque année par tiers. Les membres sortants sont rééligibles.

Les élections ont lieu en assemblée générale, conformément à l'article 16.

ART. 6. — Tous les membres de la Société sont appelés à participer à l'élection du Bureau et du Conseil soit directement, soit par correspondance. L'élection a lieu à la majorité absolue des votants.

En cas de vacances venant à se produire dans le cours d'un exercice, le Conseil pourvoit au remplacement de ses membres et des membres du Bureau, sauf ratification par la plus prochaine assemblée générale.

ART. 7. — Le Conseil se réunit au moins quatre fois par an et toutes les fois que les intérêts de la Société l'exigent.

Les convocations ont lieu sur l'initiative du président, ou sur la demande de *cinq* membres du Conseil.

La présence de *huit* membres est nécessaire pour la validité des délibérations.

Il est tenu procès-verbal des séances.

Le procès-verbal de chaque séance est signé par le président et le secrétaire qui ont composé le bureau.

ART. 8. — Les délibérations relatives à l'acceptation des dons et legs, aux acquisitions et échanges d'immeubles, sont soumises à l'approbation du Gouvernement.

ART. 9. — Les délibérations relatives aux aliénations, constitutions d'hypothèques, baux à long terme et emprunts ne sont valables qu'après l'approbation par l'assemblée générale.

ART. 10. — L'un des secrétaires représente la Société en justice et dans tous les actes de la vie civile.

ART. 11. — Les ressources de la Société proviennent :

1° Des droits d'admission, cotisations et souscriptions volontaires de ses membres ;

2° Des dons et legs dont l'acceptation aura été autorisée par le Gouvernement ;

3° Des subventions qui pourraient lui être accordées ;

4° Du produit de la vente de son *Bulletin* et des Ouvrages édités par ses soins ;

5° Du produit des ressources créées, à titre exceptionnel, avec l'autorisation du Gouvernement ;

6° Enfin du revenu de ses biens et valeurs de toute nature.

ART. 12. — Les fonds disponibles sont placés en immeubles, en rentes sur l'État, en obligations de chemins de fer dont l'État garantit un minimum d'intérêt, en obligations du Crédit foncier de France et en obligations de la Ville de Paris.

ART. 13. — Le fonds de réserve comprend :

1° Le montant des droits d'admission ;

2° Les sommes versées pour le rachat des cotisations ;

3° La moitié des libéralités autorisées sans emploi.

Ce fonds est inaliénable ; ses revenus peuvent être appliqués aux dépenses courantes.

ART. 14. — La Société se réserve d'employer tous les moyens d'action pouvant contribuer au développement des Mathématiques, notamment : la publication d'un *Bulletin* renfermant, avec le compte rendu de ses séances, des Mémoires émanant de ses membres ou de personnes étrangères ; l'impression des œuvres inédites ou la réimpression des Ouvrages épuisés des anciens mathématiciens français ou étrangers ; l'attribution de prix et récompenses à des travaux ayant trait aux Mathématiques, dans les conditions qui pourront être fixées par le règlement administratif.

ART. 15. — Aucune publication ne peut être faite au nom de la Société, sans l'examen préalable et l'approbation du Bureau.

ART. 16. — L'assemblée générale des membres de la Société se réunit, sur convocation spéciale, au moins une fois par an et toutes les fois que les intérêts de la Société l'exigent.

Son Bureau est celui des séances ordinaires.

Son ordre du jour est réglé par le Conseil d'administration.

Elle entend le rapport qui doit lui être présenté annuellement sur la gestion du trésorier, sur la situation financière et morale de la Société.

Elle approuve les comptes de l'exercice clos, et pourvoit au renouvellement du Bureau et du Conseil d'administration.

Tout membre de la Société peut se faire représenter par un autre membre, qui ne pourra cumuler plus de trois voix, y compris la sienne.

ART. 17. — La qualité de membre de la Société se perd :

1° Par la démission ;

2° Par la cessation de payement des cotisations annuelles;

3° Par la radiation prononcée, pour motifs graves, par l'assemblée générale, à la majorité des deux tiers des membres présents, sur le rapport du Conseil d'administration, et le membre intéressé dûment appelé à fournir ses explications.

ART. 18. — Les statuts ne peuvent être modifiés que sur l'initiative du Conseil d'administration, ou sur une proposition signée de vingt-cinq membres de la Société, et adressée au président, au moins un mois avant la séance.

L'assemblée extraordinaire, convoquée à cet effet, ne peut modifier les statuts qu'à la majorité des deux tiers des membres présents ou représentés.

L'assemblée doit se composer du quart au moins des membres de la Société.

Si ce nombre n'est pas atteint, une nouvelle assemblée extraordinaire sera convoquée dans un délai qui ne pourra être inférieur à un mois. Dans cette séance, les délibérations seront valables, quel que soit le nombre des membres présents ou représentés.

La délibération de l'assemblée est soumise à l'approbation du Gouvernement.

ART. 19. — L'assemblée générale, appelée à se prononcer sur la dissolution de la Société et convoquée spécialement à cet effet, doit comprendre un nombre de membres, présents ou représentés, au moins égal à la moitié plus un du nombre des sociétaires. Ses résolutions sont prises à la majorité des deux tiers des membres présents ou représentés, et soumises à l'approbation du Gouvernement.

ART. 20. — En cas de dissolution, l'actif de la Société est attribué, par délibération de l'assemblée générale, à un ou plusieurs établissements analogues et reconnus d'utilité publique.

Cette délibération est soumise à l'approbation du Gouvernement.

ART. 21. — Un règlement intérieur, adopté en assemblée générale, arrête les conditions de détail propres à assurer l'exécution des présents statuts. Il peut toujours être modifié dans la même forme.

RÈGLEMENT

VOTÉ A LA SÉANCE DE L'ASSEMBLÉE GÉNÉRALE, LE 20 JUIN 1888.

CHAPITRE PREMIER.

DISPOSITIONS GÉNÉRALES.

ARTICLE PREMIER. — Les conditions à remplir, pour être membre de la Société mathématique de France, sont fixées par le premier paragraphe de l'article 3 des statuts.

Dans le cas où, pour des motifs sérieux, le Bureau croit devoir surseoir à la présentation d'un candidat, le différend est soumis au Conseil d'administration, qui statue définitivement dans sa séance la plus prochaine.

ART. 2. — Les membres nouvellement élus, après avoir acquitté le droit d'admission de dix francs et le montant de la première cotisation annuelle, reçoivent un diplôme signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et portant le sceau de la Société.

ART. 3. — La cotisation annuelle est payée au commencement de chaque exercice, dont l'origine est fixée au 1^{er} novembre de chaque année.

Les nouveaux membres doivent payer la totalité de la cotisation de l'exercice en cours, quelle que soit l'époque de leur admission.

ART. 4. — Tout membre a le droit, à une époque quelconque, de racheter ses cotisations à venir et de devenir *sociétaire perpétuel*, moyennant la somme de *trois cents francs* (art. 3 des statuts). Cette somme peut être payée en une seule fois, ou par versements de *cent francs* chacun, se suivant à des intervalles qui ne doivent pas dépasser une année.

En cas de retard, la cotisation annuelle continue à être exigible, indépendamment et jusqu'à complet acquittement de la somme de *trois cents francs*.

ART. 5. — Tout membre qui, n'étant pas sociétaire perpétuel, négligera de payer régulièrement sa cotisation annuelle, sera, après avertissement du trésorier, à lui adressé par lettre recommandée, et resté sans effet, considéré comme démissionnaire.

CHAPITRE II.

TENUE DES SÉANCES DE LA SOCIÉTÉ.

ART. 6. — La Société tient des séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances, en août, septembre et octobre.

ART. 7. — La première séance de janvier est consacrée spécialement aux élections pour le renouvellement du Bureau et du Conseil.

ART. 8. — Il est adressé, chaque année, dans le courant d'octobre, à tous les membres de la Société, une carte imprimée portant l'indication des jours de séance.

ART. 9. — Pour assister aux séances, les personnes étrangères à la Société doivent être présentées par l'un de ses membres.

ART. 10. — La présence du président ou d'un vice-président, assisté d'un des secrétaires ou vice-secrétaires, suffit pour constituer le Bureau à chaque séance.

ART. 11. — En cas d'absence du président ou des vice-présidents, le trésorier ou, à son défaut, l'archiviste, occupe le fauteuil.

A défaut des membres du Bureau qui viennent d'être désignés, les fonctions de président sont remplies par le plus âgé des sociétaires présents à la séance.

En cas d'absence des secrétaires et vice-secrétaires, le président du jour invite un des membres présents à en remplir les fonctions.

ART. 12. — Chaque séance commence par la lecture du procès-verbal de la séance précédente.

Les Communications sont faites dans l'ordre de leur inscription.

ART. 13. — Les questions relatives à l'administration de la Société, à moins d'une demande du Conseil, ne peuvent être traitées en séance ordinaire. Elles doivent faire l'objet d'une note remise au président, qui en réfère au Conseil dans sa plus prochaine réunion.

CHAPITRE III.

BULLETIN ET PUBLICATIONS DIVERSES.

ART. 14. — La Société publie par livraisons un recueil annuel qui a pour titre : *Bulletin de la Société mathématique de France*, et qui contient, avec un extrait des procès-verbaux des séances, des Notes et Mémoires sur les Mathématiques pures ou appliquées, ayant pour auteurs des membres de la Société, et présentant quelque originalité au point de vue de la méthode ou des résultats.

Les travaux des personnes étrangères à la Société peuvent, exceptionnellement, trouver place dans le *Bulletin*, à la condition d'offrir un intérêt suffisant.

ART. 15. — L'un des secrétaires est spécialement chargé par le Conseil de tout ce qui concerne la publication du *Bulletin*. Il est assisté, dans le choix des Notes et Mémoires qui peuvent y être insérés, par une *Commission d'impression* composée du président, des vice-présidents, du deuxième secrétaire et des vice-secrétaires.

ART. 16. — La Société se propose, dans les limites de ses droits et de ses ressources, de publier, soit dans le corps du *Bulletin*, soit à part, des Mémoires inédits et de réimprimer des œuvres importantes d'anciens mathématiciens français ou étrangers (art. 14 des statuts).

ART. 17. — Les livraisons du *Bulletin* sont adressées à tous les membres de la Société, au fur et à mesure de leur publication. Toutefois, dans le cas où un sociétaire se met en retard dans le paiement de sa cotisation, l'envoi du *Bulletin* est suspendu pour lui, jusqu'à ce qu'il ait acquitté l'arriéré.

ART. 18. — Le Conseil fixe, par mesure générale, les prix réduits moyennant lesquels les membres de la Société peuvent se procurer les volumes du *Bulletin* parus antérieurement à leur admission, et les Ouvrages autres que le *Bulletin* publiés par les soins de la Société.

CHAPITRE IV.

BIBLIOTHÈQUE ET CONFÉRENCES.

ART. 19. — La Société entretient une bibliothèque, qui est alimentée par les dons particuliers, les achats autorisés par son Conseil d'administration, et l'échange de ses publications avec les journaux et recueils consacrés aux Mathématiques pures et appliquées, paraissant en France et à l'Étranger.

ART. 20. — La bibliothèque est ouverte aux membres de la Société, aux jours et heures fixés par le Conseil et indiqués sur la carte des séances envoyée chaque année aux sociétaires, dans le courant d'octobre.

Elle pourra être ouverte exceptionnellement aux personnes étrangères à la Société, qui obtiendront l'autorisation du Conseil.

ART. 21. — Le Conseil peut autoriser, d'une manière générale et pour tous les membres de la Société, le prêt à domicile des ouvrages de la bibliothèque.

ART. 22. — Chaque sociétaire ne peut emprunter à la bibliothèque plus de deux volumes à la fois. Il en donne un reçu à l'archiviste sur un re-

giste à souches, et ne peut les garder plus de deux mois, sous peine de se voir priver à l'avenir du bénéfice du présent article.

ART. 23. — Des conférences mathématiques pourront être faites au siège de la Société, dans des conditions fixées par le Bureau pour chacune d'elles.

CHAPITRE V.

COMPOSITION ET MODE D'ÉLECTION DU BUREAU ET DU CONSEIL.

ART. 24. — La Société est administrée par un Conseil composé comme l'indique l'article 4 des statuts.

Le Bureau du Conseil est le même que celui de la Société (art. 4 des statuts).

Le nombre des membres honoraires prévus par l'article 4 des statuts n'est pas limité; ces membres honoraires ne peuvent être nommés que sur la présentation du Conseil ou sur une proposition spéciale faite par écrit, signée de vingt membres de la Société, et déposée au plus tard dans la dernière séance de décembre.

ART. 25. — Le renouvellement du Bureau et du Conseil a lieu chaque année, dans la première séance de janvier, et conformément aux prescriptions des articles 5, 6 et 16 des statuts.

Dans ce but, un avis de convocation, accompagné de bulletins de vote en blanc et, s'il y a lieu, des propositions du Conseil, est envoyé, dans le courant de décembre, à tous les membres de la Société.

ART. 26. — Les membres, qui ne peuvent assister à la séance dans laquelle ont lieu les élections, sont invités à envoyer au président, en temps opportun, leurs votes sous enveloppes fermées, en y joignant un avis d'envoi portant leur signature.

Les enveloppes contenant les bulletins de vote ne sont ouvertes qu'au moment du scrutin.

CHAPITRE VI.

ATTRIBUTIONS DES MEMBRES DU BUREAU.

ART. 27. — Le président veille à l'observation des statuts et du règlement de la Société; il assure l'exécution des délibérations du Conseil.

ART. 28. — Les secrétaires ou, à leur défaut, les vice-secrétaires rédigent les procès-verbaux des séances de la Société et des séances du Conseil.

ART. 29. — Sous la direction du président, les secrétaires sont chargés de la correspondance pour tout ce qui concerne les travaux et les affaires de la Société; ils convoquent la Société, le Conseil et les Commissions, quand il y a lieu, et préparent les ordres du jour.

ART. 30. — L'archiviste est chargé de la garde des archives de la Société. Il a sous sa direction la bibliothèque; il dresse le catalogue des livres, brochures et manuscrits qui en font partie.

ART. 31. — Le trésorier est chargé du recouvrement des sommes dues à la Société. Il acquitte les dépenses ordonnancées par l'un des secrétaires, spécialement délégué par le Conseil. Il tient un registre des recettes et des dépenses.

ART. 32. — Il ne peut être fait aucun emploi extraordinaire des fonds de la Société, sans une délibération spéciale du Conseil.

CHAPITRE VII.

ATTRIBUTIONS DU CONSEIL ET TENUE DE SES SÉANCES. — COMMISSIONS.

ART. 33. — Le Conseil se réunit dans les conditions fixées par l'article 7 des statuts.

ART. 34. — A chaque séance du Conseil, les noms des membres présents sont consignés au procès-verbal.

ART. 35. — Sur la proposition de cinq membres, le vote peut avoir lieu au scrutin secret.

ART. 36. — Sur la demande de cinq membres, il peut être fait appel à la Société des décisions qui n'auraient pas été prises aux deux tiers des voix des membres présents.

ART. 37. — Les procès-verbaux des séances du Conseil doivent être transcrits sur un registre coté et parafé par l'un des secrétaires; ils doivent être signés par le président et le secrétaire qui ont composé le Bureau; les renvois doivent être parafés et les mots rayés approuvés.

ART. 38. — Le Conseil se réunit chaque année, dans le courant de décembre, pour délibérer sur l'état des affaires de la Société, prendre les mesures préparatoires relatives aux élections et prévues au Chapitre V, nommer la Commission de comptabilité chargée de vérifier la gestion du trésorier, et la Commission des archives, chargée de vérifier celle de l'archiviste.

ART. 39. — Chacune de ces deux Commissions ne peut être composée de moins de trois membres. Elles font leur rapport à la Société dans la première séance de janvier.

ART. 40. — Le Conseil peut provoquer, parmi les membres de la Société, la formation de Commissions ayant un but spécial, technique ou scientifique.

CHAPITRE VIII.

REVISION DES STATUTS OU DU RÈGLEMENT.

ART. 41. — Les conditions dans lesquelles peut avoir lieu la revision des statuts sont fixées par l'article 18 desdits statuts.

Dans le cas où, à la suite d'une première convocation, l'assemblée extraordinaire, réunie dans ce but, ne pourrait délibérer valablement, une nouvelle assemblée extraordinaire serait réunie dans un délai inférieur à cinq mois.

ART. 42. — Le règlement ne peut être modifié que sur l'initiative du Conseil d'administration, ou sur une proposition signée de vingt-cinq membres de la Société et adressée au président.

ART. 43. — L'assemblée extraordinaire convoquée à cet effet, et réunie dans les trente jours qui suivent la remise de la proposition, ne peut délibérer valablement que si le quart au moins des membres de la Société sont présents ou représentés.

Si cette proportion n'est pas atteinte, une nouvelle assemblée extraordinaire est réunie dans un délai compris entre un et cinq mois.

Dans cette séance, les délibérations sont valables, quel que soit le nombre des membres présents ou représentés.

ART. 44. — Pour les assemblées extraordinaires, tous les membres de la Société sont spécialement convoqués à domicile.

ART. 45. — Avant la réunion d'une assemblée extraordinaire pour la revision des statuts ou du règlement, le Conseil, convoqué à cet effet, nomme une Commission composée de sept de ses membres, chargée d'examiner la demande de revision et de présenter, sur cette demande, un rapport à l'assemblée générale.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Essai de théorie complète du système de deux formes ternaires quadratiques; par M. R. PERRIN.

La théorie du système simultané de deux formes ternaires quadratiques, au point de vue des propriétés des formations invariantes qui s'y rattachent, équivaut à celle des propriétés projectives du système de deux coniques; elle n'est pas d'une moindre utilité lorsqu'on s'occupe des propriétés de toute nature d'une seule conique, puisqu'il suffit alors de particulariser convenablement une des deux formes fondamentales. L'importance de cette théorie est donc incontestable, au point de vue des applications géométriques, et cependant elle ne peut être considérée comme achevée. Si M. Gordan a établi ⁽¹⁾ le système complet des formations invariantes distinctes, au nombre de vingt, avec leur expression symbolique; si l'on sait ramener à ces formations celles qui se présentent dans un certain nombre de questions géométriques; si, enfin, on connaît la signification géométrique de l'évanouissement des invariants, ainsi que des covariants principaux et de quelques-unes des expressions composées avec ces

⁽¹⁾ Voir CLEBSCH, *Leçons de Géométrie*, Tome I.

diverses formations, on ignore, d'autre part, quelles relations (syzygies) peuvent exister entre les vingt formations distinctes, et à plus forte raison quelles conclusions peuvent être tirées de telles syzygies; on ne possède pas de formule simple pour passer de l'équation ponctuelle à l'équation tangentielle des courbes covariantes du système, ou inversement, etc. L'objet du présent travail est de contribuer à combler ces lacunes, en adoptant une marche systématique dont j'ai indiqué le principe dans une série de Notes ⁽¹⁾; c'est-à-dire en partant du système de quatre formes binaires (deux linéaires et deux quadratiques) dont les invariants, ainsi que je l'ai montré, fournissent *exclusivement* et *complètement*, par un traitement convenablement dirigé, les sources de toutes les formations invariantes distinctes que possède le système de deux formes ternaires quadratiques. En suivant cette marche, les syzygies qui relient les invariants dans le domaine binaire fournissent *ipso facto* entre les formations ternaires obtenues un égal nombre de syzygies, que l'on peut alors prendre comme point de départ pour en établir de nouvelles.

Entre autres résultats qui ressortiront de cette étude, je signalerai notamment :

1° L'existence d'une symétrie croisée particulièrement simple entre les éléments ponctuels et tangentiels relatifs aux deux coniques fondamentales;

2° La possibilité de représenter *toutes* les formations en employant comme seules variables (lesquelles figurent des coordonnées tantôt ponctuelles, tantôt tangentielles, et quelquefois l'un ou l'autre à volonté dans une même formule) trois covariants mixtes linéo-linéaires (dont l'un est le covariant identique), avec des coefficients où n'entrent que les invariants et les contrevariants, si ces variables spéciales fonctionnent comme coordonnées ponctuelles; que les invariants et les covariants purs, si elles fonctionnent comme coordonnées tangentielles; enfin que les invariants seuls, si elles peuvent fonctionner des deux manières : de telle sorte que ces covariants mixtes jouent dans la théorie dont il s'agit le même rôle que les covariants linéaires dans celle des

(1) *Comptes rendus*, 10, 24 et 31 janvier 1887.

formes binaires d'ordre impair, et y apportent un genre analogue de simplifications;

3° L'existence d'une curieuse formule mixte, doublement symétrique, qui fournit l'équation de tous les groupes possibles de droites ou de points liés symétriquement aux deux coniques par une condition projective donnée, d'ailleurs quelconque; savoir, d'une manière immédiate lorsque ces droites ou ces points sont au nombre de *quatre* seulement, et par l'intermédiaire d'un calcul d'élimination facile, lorsque le nombre en est supérieur à quatre.

Le premier Chapitre de ce travail sera purement algébrique et consacré à établir le système complet des formations ternaires invariants, avec les syzygies qui les relient, le tout en partant des théories du domaine binaire, comme il a été dit ci-dessus. Dans le second Chapitre, je déduirai des résultats ainsi obtenus un certain nombre de relations nouvelles, dont j'étudierai, chemin faisant, la signification et les applications les plus immédiates au point de vue géométrique.

I.

1. Soient deux formes ternaires quadratiques simultanées

$$\begin{aligned} s &= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy, \\ s' &= a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2f'yz + 2g'zx + 2h'xy. \end{aligned}$$

Proposons-nous tout d'abord d'obtenir le système complet des invariants et covariants purs de ces deux formes.

Il suffira pour cela, ainsi que je l'ai démontré dans le travail cité plus haut : 1° d'effectuer la substitution

$$x = X - hY - gZ, \quad y = aY,$$

ce qui donne pour s et s' les expressions

$$\begin{aligned} s &= a(X^2 + V), \\ s' &= a'(X^2 + 2UX + V'), \end{aligned}$$

U, V, V' étant trois formes binaires aux variables Y, Z (savoir une linéaire U , et deux quadratiques, V et V'); 2° de construire les invariants du système des trois formes binaires simultanées U, V, V' ; 3° de combiner ces invariants entre eux et avec a, a' , traités comme invariants auxiliaires, de manière à diviser par a le

plus possible : les expressions ainsi obtenues qui ne seront plus réductibles par le même procédé à d'autres plus simples, seront, soit des invariants du système ternaire (s, s') , soit des péninvariants purs (coefficients de la plus haute puissance de x dans des covariants purs) de ce système, et fourniront la *totalité* des invariants et péninvariants purs distincts qui lui appartiennent.

Or on a immédiatement

$$\begin{aligned} U &= (ah' - ha')Y + (ag' - ga')Z, \\ V &= (ab - h^2)Y^2 + 2(af - gh)YZ + (ac - g^2)Z^2, \\ V' &= (a^2b' - 2ahh' + h^2a')Y^2 + 2(a^2f' - ahg' - agh' + gha')YZ \\ &\quad + (a^2c' - 2agg' + g^2a')Z^2, \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$(1) \quad \begin{cases} U = au' - a'u, \\ V = av - u^2, \\ V' = a^2v' - 2auu' + a'u^2, \end{cases}$$

en désignant par u, u', v, v' les quatre formes binaires suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} u = hY + gZ, \\ u' = h'Y + g'Z, \\ v = bY^2 + 2fYZ + cZ^2, \\ v' = b'Y^2 + 2f'YZ + c'Z^2. \end{cases}$$

Il s'agit de former les invariants du système binaire triple (U, V, V') ; rien n'empêche de prendre U, V, V' sous la forme (1), et d'exprimer les invariants cherchés en fonction explicite de a, a' , et des invariants du système quadruple (u, u', v, v') . Comme les coefficients des formes u, u', v, v' sont indépendants les uns des autres ainsi que de a, a' , ces deux dernières lettres se trouveront mises en évidence, et les calculs ultérieurs en seront notablement simplifiés.

Mais le problème qui consiste à former les invariants du système binaire quadruple (u, u', v, v') , et à exprimer en fonction de ces invariants ceux du système triple (U, V, V') , a été traité et complètement résolu dans un travail antérieur [*Sur le système de quatre formes binaires simultanées, etc.* (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XV, p. 45)]. J'ai établi dans ce Mémoire : 1° que le système quadruple (u, u', v, v') possède

13 invariants, dont les expressions, données par les formules (68) du Mémoire, deviennent, quand on prend pour formes fondamentales celles que définissent les équations (2) ci-dessus :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = bg^2 - 2fgh + ch^2, \quad A' = b'g'^2 - 2f'gh' + c'h'^2, \\ C = bg'^2 - 2fg'h' + ch'^2, \quad C' = b'g'^2 - 2f'g'h' + c'h'^2, \\ B = bgg' - f(gh' + hg') + chh', \\ B' = b'gg' - f'(gh' + hg') + c'hh', \\ D = bc - f^2, \quad I = bc' - 2ff' + cb', \quad D' = b'c' - f'^2, \\ \Gamma = h^2(fc' - cf') + gh(cb' - bc') + g^2(bf' - fb'), \\ \Gamma' = h'^2(fc' - cf') + g'h'(cb' - bc') + g'^2(bf' - fb'), \\ \Lambda = hg' - gh', \\ \Lambda' = 2hh'(fc' - cf') + (gh' + hg')(cb' - bc') + 2gg'(bf' - fb'). \end{array} \right.$$

2° Que le système triple (U, V, V') possède six invariants, dont les expressions en fonction des précédents, données par les formules (72) du Mémoire, deviennent, quand on définit U, V, V', par les équations (1) ci-dessus :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = a(a^2C - 2aa'B + a'^2A - a\Lambda^2), \\ \mathfrak{A}' = a^2(a^2C' - 2aa'B' + a'^2A' - a'\Lambda'^2), \\ \mathfrak{Q} = a(aD - \Lambda), \\ \mathfrak{A} = a[a^2I - a(A' + 2B) + a'A], \\ \mathfrak{Q}' = a^2(a^2D' - 2aB' + a'A' - \Lambda'^2), \\ \mathfrak{G} = a^3[a^2\Gamma' - aa'\Lambda' + a'^2\Gamma + a(B' - C)\Lambda + a'(B - A')\Lambda + \Lambda^3]. \end{array} \right.$$

Ces formules (4) fournissent donc immédiatement une série de six invariants ou péninvariants du système ternaire (s, s'), savoir

$$(5) \quad \frac{1}{a} \mathfrak{A}, \quad \frac{1}{a^2} \mathfrak{A}', \quad \frac{1}{a} \mathfrak{Q}, \quad \frac{1}{a} \mathfrak{A}, \quad \frac{1}{a^2} \mathfrak{Q}', \quad \frac{1}{a^3} \mathfrak{G}.$$

On sait d'ailleurs que, pour un système de formes ternaires respectivement d'ordres $n, n', n'', \dots$, l'ordre du covariant pur ayant pour source un péninvariant donné de poids π et de degrés $\theta, \theta', \theta'', \dots$ par rapport aux coefficients des diverses formes, a pour valeur $n\theta + n'\theta' + n''\theta'' + \dots - \frac{3}{2}\pi$. Pour le système (s, s'), l'ordre du covariant pur ayant pour source un péninvariant donné de degré total θ et de poids π est donc $2\theta - \frac{3}{2}\pi$ (les coefficients a, a' , devant d'ailleurs être regardés, pour le calcul de π , comme de poids 0 ; g, h, g', h' , comme de poids 1 ; b, b', c, c', f, f' , comme

de poids 2). En tenant compte de cette règle et des formules (3) et (4), on trouve dès lors que, des six péninvariants de la série (5), les deux premiers sont les sources des deux covariants biquadratiques, le troisième est un invariant, le quatrième et le cinquième sont les sources de deux covariants quadratiques, le sixième la source d'un covariant cubique. En ce qui concerne l'invariant, il n'y a évidemment aucune réduction ultérieure à chercher ; désignons-le par (D), nous aurons

$$(6) \quad (D) = \frac{\mathfrak{D}}{a} = aD - A = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2.$$

Pour réduire les autres péninvariants aux formes les plus simples possibles, écrivons la série des résidus des péninvariants (5) pour $a = 0$

$$a'^2 A; \quad a'(a'A' - \Lambda^2); \quad -A; \quad a'A; \quad a'A' - \Lambda^2; \quad a'^2 \Gamma + a'(B - A')\Lambda + \Lambda^2;$$

A l'inspection de ces résidus, on aperçoit qu'il suffit d'ajouter au premier et au quatrième péninvariant le troisième multiplié par a'^2 et a' , et au second le cinquième multiplié par $-a'$, pour pouvoir diviser par a ; la série (5) peut donc être remplacée par la série plus simple

$$(7) \quad \frac{\mathfrak{A} + a'^2 \mathfrak{D}}{a^2}, \quad \frac{\mathfrak{A}' - a' \mathfrak{D}'}{a^4}, \quad \frac{\mathfrak{D}}{a}, \quad \frac{\mathfrak{B} + a' \mathfrak{D}}{a^2}, \quad \frac{\mathfrak{D}'}{a^2}, \quad \frac{\mathfrak{J}}{a^2}.$$

La seconde de ces expressions (7) fournit un invariant symétrique de (D), et que j'appellerai (D'),

$$(8) \quad (D') = \frac{a' \mathfrak{D}' - \mathfrak{A}'}{a^4} = a'D' - C' = a'b'c' + 2f'g'h' - a'f'^2 - b'g'^2 - c'h'^2.$$

La quatrième fournit aussi un invariant, que je désignerai par (I), savoir

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} (I) &= \frac{\mathfrak{B} + a' \mathfrak{D}}{a^2} = aI + a'D - A' - 2B \\ &= a'(bc - f^2) + b'(ac - g^2) + c'(ab - h^2) \\ &\quad + 2f'(gh - af) + 2g'(fh - bg) + 2h'(fg - ch). \end{aligned} \right.$$

La première et la cinquième fourniraient des sources de covariants quadratiques ; mais, comme leurs résidus pour $a = 0$ sont

respectivement $a'^2 D - 2a'B - \Lambda^2$, $a'A' - \Lambda^2$, il est évidemment possible de les combiner entre elles et avec la quatrième (dont le résidu est $a'D - A' - 2B$), de manière à pouvoir diviser encore une fois par a : on obtient ainsi, à la place d'un de ces deux covariants quadratiques, un invariant, savoir le symétrique de l'invariant (I) trouvé ci-dessus

$$(10) \quad (I') = \frac{(D' + a'\Lambda - \Lambda^2)}{a^3} = a'I + aD' - C - 2B' = a(b'c' - f'^2) + \dots$$

Il reste une source de covariant quadratique ; on peut lui donner, en combinant convenablement la première et la quatrième des expressions (7), une forme symétrique par rapport aux coefficients de s et s' , et l'écrire

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} w_0 &= \frac{a'\Lambda - \Lambda^2}{a^2} = aa'I - aC - a'A' + \Lambda^2 \\ &= (ac - g^2)(a'b' - h'^2) + (ab - h^2)(a'c' - g'^2) \\ &\quad - 2(gh - af)(g'h' - a'f'). \end{aligned} \right.$$

w_0 sera la source d'un covariant quadratique w .

Je désignerai enfin par t le covariant cubique irréductible qui a pour source $\frac{1}{a^3} G$; on aura donc

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{a^3} G = a^2 \Gamma' - aa' \Lambda' + a'^2 \Gamma + a(B' - C) \Lambda + a'(B - A') \Lambda + \Lambda^3 \\ &= (hg' - gh')^2 + (hg' - gh')(ag' - ga')(gb' - bg' + fh' - hf') \\ &\quad + (bf' - fb')(ag' - ga')^2 \\ &\quad + (hg' - gh')(ah' - ha')(hc' - ch' + fg' - gf') \\ &\quad + (fc' - cf')(ah' - ha')^2 + (cb' - bc')(ah' - ha')(ag' - ga'). \end{aligned} \right.$$

Les résidus, pour $a = 0$, des six invariants ou péninvariants définis par les formules (6), (8), (9), (10), (11) et (12) sont respectivement

$$-A, \quad a'D' - C', \quad a'D - A' - 2B, \quad a'I - C - 2B', \quad \Lambda^2 - a'A', \\ \Lambda^3 + a'(B - A')\Lambda + a'^2 \Gamma.$$

Admettons pour un instant que le système (s, s') possède des invariants ou des péninvariants purs distincts des six déjà trouvés. On devra dès lors pouvoir former des fonctions des six ré-

sidus écrits ci-dessus, qui s'évanouissent identiquement lorsqu'on y remplace les invariants binaires par leurs valeurs (3); et, si l'on suppose ces fonctions ordonnées par rapport à α' , le coefficient de chacune des puissances de α' devra s'évanouir séparément, soit identiquement par rapport aux invariants binaires qui y entrent, soit en vertu des syzygies qui relient ces invariants (syzygies qui sont au nombre de vingt, comme je l'ai montré dans le Mémoire cité plus haut). Considérons en particulier le terme indépendant de α' : il devra exister, toujours dans l'hypothèse admise, des fonctions de quelques-uns au moins des invariants binaires

$$A, C', A' + 2B, C + 2B', \Lambda^2, \Lambda^3,$$

qui se réduisent à des identités ou s'évanouissent en vertu de syzygies. La seule identité possible est évidemment

$$(\Lambda^3)^2 - (\Lambda^2)^3 = 0;$$

et en effet nous verrons tout à l'heure que $t_0^2 - \omega_0^3$ peut s'exprimer en fonction des autres péninvariants, mais sans avoir besoin d'introduire des formations nouvelles. Quant à former des syzygies entre les six quantités écrites ci-dessus, on vérifie sans peine, en se reportant aux syzygies données dans le Mémoire précité (et que j'aurai d'ailleurs occasion de reproduire plus loin *in extenso*)⁽¹⁾, que la chose n'est pas possible. Le système ternaire (s, s') ne possède donc pas d'autres invariants ou covariants purs distincts que ceux que nous avons obtenus, savoir :

1° Les quatre invariants (D), (I), (I'), (D'), dont les degrés par rapport aux coefficients de s et s' sont respectivement (3,0), (2,1), (1,2), (0,3); je les écrirai désormais D, I, I', D', les invariants binaires précédemment désignés par ces lettres ne devant plus reparaître dans la suite de ce travail;

2° Le covariant quadratique ω , de degré (2,2);

3° Le covariant cubique t , de degré (3,3).

J'ai dit que $t_0^2 - \omega_0^3$ peut s'exprimer en fonction des péninvariants du système. En effet, les six invariants binaires $\Lambda, \Lambda', \Omega,$

(¹) Formules (32).

$\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{G}$, sont liés (voir le Mémoire déjà cité) par une syzygie et une seule, savoir

$$\mathfrak{G}^2 = \mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{J} - \mathfrak{A}^2\mathfrak{Q}' - \mathfrak{A}'^2\mathfrak{Q}.$$

Or, des formules (6), (9), (11), (10), (8), (12), on tire successivement

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q} &= aD, \\ \mathfrak{J}' &= a^2I - a'\mathfrak{Q} = a(aI - a'D), \\ \mathfrak{A} &= a'\mathfrak{J} - a^2w_0 = a(aa'I - a'^2D - aw_0), \\ \mathfrak{Q}' &= a^3I' + \mathfrak{A} - a'\mathfrak{J} = a^2(aI' - w_0), \\ \mathfrak{A}' &= a'\mathfrak{Q}' - a^4D' = a^2(aa'I' - a'w_0 - a^3D'), \\ \mathfrak{G}' &= a^3t_0.\end{aligned}$$

Portant ces valeurs dans la syzygie binaire, on trouve, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned}t_0^2 &= w_0^2 - (aI' + a'I)w_0^2 + [a^2ID' + aa'(II' - 3DD') + a^2I'D]w_0 \\ &\quad - a^3DD'^2 + a^2a'D'(2I'D - I^2) + aa'^2D(2ID' - I'^2) - a'^2D^2D'.\end{aligned}$$

De cette relation entre les péninvariants et invariants ternaires, on conclut immédiatement qu'il existe entre les invariants et covariants purs du système (s, s') la syzygie suivante :

$$(13) \quad \begin{cases} t^2 = w^2 - (I's + Is')w^2 + [ID's^2 + (II' - 3DD')ss' + I'Ds'^2]w \\ \quad - DD'^2s^2 + D'(2I'D - I^2)s^2s' + D(2ID' - I'^2)ss'^2 - D^2D's'^2. \end{cases}$$

Cette syzygie, d'ailleurs bien connue, est la seule qui relie ces formations, puisque les invariants binaires dont elles dérivent n'étaient liés eux-mêmes que par une seule syzygie : elle est bien de la forme prévue plus haut d'après la considération des résidus.

Les résultats auxquels nous venons de parvenir n'ont évidemment rien de neuf; mais il était utile, ne fût-ce que pour légitimer plus complètement la méthode employée dans tout le cours de ce travail, de montrer comment cette méthode permet d'y arriver en utilisant exclusivement les données fournies par les théories du domaine binaire, sans faire intervenir aucune considération de variables ternaires contragrédiées.

2. Occupons-nous maintenant de la recherche des contrevariants et des covariants mixtes appartenant au système (s, s') .

Nous avons, pour cela, d'après les principes rappelés au début de ce travail, à adjoindre aux trois formes binaires U, V, V' , définies par les formules (1), une quatrième forme, savoir

$$(14) \quad U = (a\tau - h\xi)Y - (a\zeta - g\xi)Z,$$

où ξ, τ, ζ sont trois variables contragrédientes à x, y, z ; à former les invariants communs à la forme U' , traitée comme si ses coefficients étaient des constantes, et au système (U, V, V') ; enfin, à combiner ces invariants entre eux et avec a, a', ξ , traités comme invariants auxiliaires, de manière à diviser par a le plus possible : toutes les expressions ainsi obtenues, qui ne seront plus réductibles par le même procédé à d'autres plus simples, seront soit des contrevariants, soit des sources de covariants mixtes du système (s, s') , et fourniront la *totalité* des contrevariants et péninvariants mixtes distincts que possède ce système.

Ainsi qu'il a été dit plus haut, le système binaire (U, U', V, V') possède treize invariants, dont six, où n'entrent pas les coefficients de U' , ont déjà été écrits [formules (4)], et ont servi à trouver les invariants et péninvariants purs du système ternaire (s, s') . Les sept autres sont les analogues, pour le système ternaire (U, U', V, V') , de ceux que j'ai appelés B, B', C, C', F, A, A' [formules (3)], pour le système (u, u', v, v') : je les désignerai respectivement par les lettres $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', \delta$; et je les calculerai successivement au moyen des formules (68) du Mémoire déjà cité, en faisant simplement dans ces formules

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= ah - ha, & \alpha_1 &= a\tau - h\xi, \\ \alpha_2 &= a\tau - g\xi, & \alpha_3 &= a\zeta - g\xi, \\ \beta_1 &= ab - h^2, & \beta_2 &= a^2b - 3ahh - h^2a, \\ \beta_3 &= af - gh, & \beta_4 &= a^2f - a^2gh - h^2g - gha, \\ \beta_5 &= ac - g^2, & \beta_6 &= a^2c - 3agz - g^2a. \end{aligned}$$

Il est avantageux, dans ces calculs, de prendre a comme lettre ordonnatrice, afin d'apercevoir immédiatement les réductions possibles, et de calculer au préalable les quatre quantités auxiliaires

$$\begin{aligned} \eta &= \alpha_0\alpha_1 - \alpha_1\alpha_0, & \lambda &= \beta_1\beta_2 - \beta_2\beta_1, \\ \zeta &= \beta_1\beta_3 - \beta_3\beta_1, & \zeta' &= \beta_2\beta_4 - \beta_4\beta_2. \end{aligned}$$

dont l'introduction permet d'écrire ainsi les expressions des sept invariants à calculer

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} &= a_1 a'_1 b_0 + a_0 a'_0 b_2 - \theta b_1, \\ \mathfrak{B}' &= a_1 a'_1 b'_0 + a_0 a'_0 b'_2 - \theta b'_1, \\ \mathfrak{C} &= a_1^2 b_0 - 2 a'_0 a'_1 b_1 + a_0^2 b_2, \\ \mathfrak{C}' &= a_1^2 b'_0 - 2 a'_0 a'_1 b'_1 + a_0^2 b'_2, \\ \mathfrak{J}'' &= a_0^2 \lambda' + a'_0 a'_1 \lambda + a_1^2 \lambda'', \\ \mathfrak{L} &= a_0 a'_1 - a_1 a'_0, \\ \mathfrak{L}' &= 2 a_0 a'_0 \lambda' + \theta \lambda + 2 a_1 a'_1 \lambda''.\end{aligned}$$

Je poserai, en outre, pour abréger l'écriture

$$(15) \quad \begin{cases} A = bc - f^2, & F = gh - af, \\ B = ac - g^2, & G = fh - bg, \\ C = ab - h^2, & H = fg - ch; \end{cases}$$

et de même A', B', C', F', G', H' , avec les lettres accentuées; ce qui permet d'écrire ainsi les invariants et péninvariants déjà trouvés

$$(16) \quad \begin{cases} D = Aa + Gg + Hh = Bb + Ff + Hh = Cc + Gg + Ff, \\ I = Aa' + Bb' + Cc' + 2Ff' + 2Gg' + 2Hh', \\ w_0 = BC' + CB' - 2FF', \\ t_0 = (B'h + H'a + F'g)(Cg' + F'h + Ga') \\ \quad - (Bh' + Ha' + Fg')(C'g + F'h + G'a), \end{cases}$$

et d'écrire les identités

$$(17) \quad \begin{cases} Ag + Gc + Hf = 0, & Ah + Gf + Hb = 0, \\ Bf + Fc + Hg = 0, & Bh + Fg + Ha = 0, \\ Cf + Fb + Gg = 0, & Cg + Fh + Ga = 0, \end{cases}$$

ainsi que celles qui s'en déduisent en accentuant toutes les lettres.

Il convient enfin de rappeler qu'étant donné un péninvariant mixte du système (s, s') , de degré total θ par rapport aux coefficients de s et de s' , de classe θ' (degré par rapport aux variables ξ, η, ζ), et de poids π par rapport à x (en considérant ξ comme

de poids 0, η et ζ comme de poids 1), l'ordre du covariant mixte correspondant sera $2\theta + \theta' - \frac{3}{2}\pi$.

Cela posé, calculons d'abord l'invariant le plus simple, $\mathcal{L}$. On trouve

$$\mathcal{L} = a[a(h'\zeta - g'\eta) + (hg' - gh')\xi + a'(g\eta - h\zeta)],$$

$\frac{1}{a}\mathcal{L}$ est donc la source d'un covariant mixte de classe 1, que la règle rappelée ci-dessus nous apprend être du second ordre en x, y, z . Je le désignerai par δ ; sa source δ_0 s'écrira plus symétriquement

$$(18) \quad \delta_0 = \frac{\mathcal{L}}{a} = (hg' - gh')\xi + (ga' - ag')\eta + (ah' - ha')\zeta.$$

Le calcul de l'invariant $\mathfrak{W}$ donne

$$\mathfrak{W} = a \left\{ a^2[ch' - fg']\eta + (bg' - fh')\zeta \right. \\ \left. + a[(Hh' + Gg')\xi + Ha'\eta + Ga'\zeta + (hg' - gh')(g\eta - h\zeta)] \right. \\ \left. + a'\xi(bg^2 + ch^2 - 2fgh) \right\}.$$

Si l'on ajoute au péninvariant mixte $\frac{1}{a}\mathfrak{W}$ le péninvariant mixte composé $a'\xi D$, il est clair qu'on pourra diviser par a , et remplacer $\frac{1}{a}\mathfrak{W}$ par un péninvariant plus simple, que je désignerai par α_0 , et dont l'expression est

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{a^2}(\mathfrak{W} + aa'\xi D) \\ &= (Aa' + Gg' + Hh')\xi + (Ha' + Fg' + Bh')\eta \\ &\quad + (Ga' + Cg' + Fh')\zeta. \end{aligned} \right.$$

Ce péninvariant étant de degré (2, 1), de classe 1 et de poids 4, le covariant mixte correspondant α est linéaire en x, y, z , comme en ξ, η, ζ .

Le calcul de l'invariant $\mathcal{Q}$ donne

$$\mathcal{Q} = a \left\{ a^2(bg'^2 - 2f\eta\zeta + c\eta^2) + a[2G\xi\zeta + 2H\xi\eta - (g\eta - h\zeta)^2] \right. \\ \left. + (bg^2 + ch^2 - 2fgh)\xi^2 \right\}.$$

En ajoutant au péninvariant mixte $\frac{1}{a}\mathcal{Q}$ le péninvariant mixte composé $D\xi^2$, on pourra évidemment diviser encore par a , ce qui donnera un péninvariant mixte plus simple, de degré (2, 0), de

classe 2, de poids 4, et correspondant, par suite, à un covariant d'ordre 0 en x, y, z ; ce sera donc un contrevariant, que je désignerai par σ , savoir

$$(20) \quad \sigma = \frac{\varpi + \alpha D\xi^2}{\alpha^2} = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2F\eta\zeta + 2G\xi\zeta + 2H\xi\eta.$$

Le calcul de l'invariant $\mathfrak{W}'$ donne

$$\mathfrak{W}' = \alpha^2 \left\{ -\alpha^2 (H'\eta + G'\zeta) + \alpha [(G'g + H'h)\xi - (F'g + B'h)\eta - (F'h + C'g)\zeta] + \xi(C'g^2 + B'h^2 + 2F'gh) \right\}.$$

Si l'on ajoute au péninvariant mixte $\frac{1}{\alpha^2} \mathfrak{W}'$ le péninvariant mixte composé $\xi\omega_0$, on pourra évidemment diviser encore par α , ce qui donnera un péninvariant mixte de degré (1, 2), classe 1, de poids 4, et, par conséquent, un covariant mixte linéaire en x, y, z comme en ξ, η, ζ . Pour que l'expression de ce péninvariant corresponde exactement à α_0 [formule (19)] par simple permutation des accents, il suffit, comme on le vérifie sans peine, de le prendre en signe contraire et d'ajouter le péninvariant composé $I'\xi$. On peut donc poser

$$(21) \quad \alpha'_0 = I'\xi - \frac{\mathfrak{W}' + \alpha^2 \omega_0 \xi}{\alpha^3} \\ = (A'a + G'g + H'h)\xi + (H'a + F'g + B'h)\eta + (G'a + C'g + F'h)\zeta;$$

α' sera un covariant mixte linéo-linéaire, symétrique de α .

Le calcul de l'invariant ϖ' donne

$$\varpi' = \alpha^2 \left\{ \alpha^2 (c'\eta^2 - 2f'\eta\zeta + b'\zeta^2) + 2\alpha [(gf' - hc')\xi\eta + (hf' - gb')\xi\zeta - (g\eta - h\zeta)(g'\eta - h'\zeta)] + (g^2b' - 2ghf' + h^2c')\xi^2 + 2(g'h' - hg')(h\zeta - g\eta)\xi + \alpha'(g\eta - h\zeta)^2 \right\}.$$

Pour simplifier le péninvariant mixte fourni par $\frac{1}{\alpha^3} \varpi'$, on peut tout d'abord y ajouter $\alpha'\sigma$, ce qui rend tous les termes divisibles soit par α , soit par ξ ; puis ajouter le péninvariant composé $-2\alpha_0\xi$, ce qui ne laisse subsister que des termes divisibles par α ou par ξ^2 . Le coefficient de ξ^2 devenant ainsi

$$b'g^2 + c'h^2 - 2f'gh - A\alpha' - 2Gg' - 2Hh',$$

on voit, en se reportant à la formule (9), qu'il suffit d'ajouter encore $I\xi^2$ pour ne plus laisser subsister que des termes divisibles

par α . Effectuant la division, on arrive à un péninvariant de degré (1, 1), de classe 2, de poids 4, correspondant, par suite, à un covariant mixte d'ordre 0; c'est donc un contrevariant de classe 2, que je désignerai par φ . On trouve, pour son expression qui est symétrique par rapport aux coefficients de s et de s' ,

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{\varpi' + \alpha^2(\alpha' \tau - 2\alpha_0 \xi + 1\xi^2)}{\alpha^2} \\ &= [(bc' + cb' - 2ff')\xi^2 + (ca' + ac' - 2gg')\eta^2 \\ &\quad + (ba' + ab' - 2hh')\zeta^2 + 2(gh' + hg' - af' - fa')\eta\xi \\ &\quad + 2(fg' + gf' - ch' - hc')\xi\eta + 2(fh' + hf' - bg' - gb')\xi\zeta]. \end{aligned} \right.$$

Le calcul de l'invariant $\mathfrak{G}'$ donne

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}' = \alpha^2 \{ & \alpha^2 [(fc' - cf')\eta^2 + (cb' - bc')\eta\zeta + (bf' - fb')\zeta^2] \\ & + \alpha^2 [(cgh' + chg' + g^2 f' - ghc' - 2fgg')\eta^2 \\ & \quad + (h^2 c' - g^2 b' + 2bgg' - 2chh')\eta\zeta \\ & \quad + (ghb' + 2fhh' - bgh' - bhg' - h^2 f')\zeta^2 \\ & \quad + (2chf' - 2fhc' + bgc' - cgb')\xi\eta \\ & \quad + (2fgb' - 2bgf' + bhc' - chb')\xi\zeta] \\ & + \alpha [(fh^2 c' - ch^2 f' + cghb' - bghc' + bg^2 f' - fg^2 b')\xi^2 \\ & \quad + (fg^2 a' - cgha' + g^2 hg' - g^3 h')\eta^2 \\ & \quad + (bgha' - fh^2 a' + h^3 g' - gh^2 h')\zeta^2 \\ & \quad + (gh^2 c' + g^3 b' - 2bg^2 g' - 2ch^2 g' - 2g^2 hf' + 4fghg')\xi\eta \\ & \quad + (2bg^2 h' + 2gh^2 f' + 2ch^2 h' - g^2 hb' - h^3 c' - 4fghh')\xi\zeta \\ & \quad + (ch^2 a' - bg^2 a' + 2g^2 hh' - 2gh^2 g')\eta\zeta] \\ & + (hg' - gh')(bg^2 + ch^2 - 2fgh)\xi^2 + \alpha'\xi(bg^2 + ch^2 - 2fgh)(g\eta - h\xi) \}. \end{aligned}$$

A l'inspection des termes de $\frac{1}{\alpha^2} \mathfrak{G}'$, qui ne sont pas divisibles par α , on voit immédiatement qu'il suffit d'ajouter le péninvariant $D\delta_0 \xi$, pour les faire disparaître en totalité. Divisant alors par α , on obtient un péninvariant de degré (3, 1), de classe 2, de poids 6, correspondant, par conséquent, à un covariant mixte linéaire en x, y, z . Comme il n'est pas possible de construire, avec les formations déjà trouvées, un péninvariant composé de même degré et de même classe, il est inutile de chercher une réduction plus complète. Je désignerai donc par β le covariant mixte linéaire dont il s'agit; sa source β_0 aura pour expression, tous calculs

faits,

$$(23) \left\{ \begin{aligned} \beta_0 &= \frac{J' + a^2 D \delta_0 \xi}{a^3} \\ &= \{ [A(hg' - gh') + G(hc' - gf') + H(hf' - gb')] \xi^2 \\ &\quad + [B(gh' - af') + F(gg' - ac') + H(ga' - ag')] \eta^2 \\ &\quad + [C(af' - hg') + F(ab' - hh') + G(ah' - ha')] \zeta^2 \\ &\quad + [B(ab' + ba' - 2hh') - C(ac' + ca' - 2gg')] \eta \xi \\ &\quad + [B(hf' - gb') + A(ga' - ag') + G(gg' - ac') \\ &\quad \quad + H(hg' - af') + F(hc' - gf')] \xi \eta \\ &\quad + [C(hc' - gf') + A(ah' - ha') + H(ab' - hh') \\ &\quad \quad + G(af' - hg') + F(hf' - gb')] \xi \zeta \}. \end{aligned} \right.$$

Enfin le calcul de l'invariant $\mathcal{L}'$ donne

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = a^2 \{ & a^3 [(cb'g' - bc'g' + 2fc'h' - 2cf'h')\eta \\ & + (cb'h' - bc'h' + 2bf'g' - 2fb'g')\zeta] \\ & + a^2 \{ (bhc'g' - cgb'h' + bgc'h' - 2fhc'h' \\ & \quad + 2chf'h' - chb'g' + 2fgb'g' - 2bgf'g')\xi \\ & \quad + [cg(2h^2 - a'b') + bg(2g^2 + a'c') - 2fha'c' + 2cha'f' \\ & \quad \quad + h^2c'g' - 2ghc'h' - 4fgg'h' + g^2(2f'h' - b'g')]\eta \\ & \quad + [bh(a'c' - 2g^2) - ch(a'b' + 2h^2) + 2fga'b' - 2bga'f' \\ & \quad \quad + h^2(c'h' - 2f'g') - g^2b'h' + 2ghb'g' + 4fhg'h']\zeta \} \\ & + a \{ [-2Hga'b' + 2Gha'c' + 2(bg^2 - ch^2)a'f' - g^2h(b'g' + 2f'h') \\ & \quad \quad + gh^2(c'h' + 2f'g') + g^2b'h' - h^2c'g']\xi \\ & \quad + [2Hga'h' + g^3(a'b' - 2h^2) + gh^2(a'c' - 2g^2) \\ & \quad \quad + (4fgh - ch^2 - 3bg^2)a'g' + 2g^2h(2g'h' - a'f')]\eta \\ & \quad + [-2Gha'g' + h^3(2g^2 - a'c') + g^2h(2h^2 - a'b') \\ & \quad \quad + (bg^2 + 3ch^2 - 4fgh)a'h' + 2gh^2(a'f' - 2g'h')]\zeta \} \\ & \quad + a'(ch^2 + bg^2 - 2fgh)[(hg' - gh')\xi + ga'\eta - ha'\zeta] \}. \end{aligned}$$

A l'inspection de cette formule, on voit immédiatement qu'en ajoutant au péninvariant $\frac{J'}{a^2}$ le péninvariant composé $Da'\delta_0$, le résultat sera divisible par a , ce qui donnera un péninvariant mixte de degré (3, 2), de classe 1, de poids 6, correspondant, par suite, à un covariant mixte d'ordre 2 en x, y, z . Pour obtenir une expression plus simple, j'ajouterai encore $-I\delta_0$, ce qui permettra de diviser par 2. Désignant ce nouveau covariant mixte par ϵ , nous aurons, pour l'expression de sa source ϵ_0 , tous calculs faits,

$$(24) \left\{ \begin{aligned} \epsilon_0 &= \frac{J' + Da'a'\delta_0 - I a^2 \delta_0}{2a^3} = [(H'a + F'g + B'h)(G\xi + F\eta + C\zeta) \\ &\quad - (G'a + C'g + F'h)(H\xi + B\eta + F\zeta)]. \end{aligned} \right.$$

3. En résumé, les treize invariants du système binaire (U, U', V, V') nous ont fourni, pour le système ternaire (s, s'), quatre invariants, deux covariants purs, deux contrevariants et cinq covariants mixtes. Les sept dernières de ces formations se répartissent comme suit, au point de vue de leur degré, classe et ordre respectifs :

		Degré par rapport aux coefficients		Classe.	Ordre.
		de s.	de s'.		
Contrevariants	τ	2	0	2	0
	φ	1	1	2	0
	α	2	1	1	1
Covariants mixtes . . .	β	1	2	1	1
	γ	3	1	2	1
	δ	1	1	1	2
	ε	3	2	1	2

Il ressort immédiatement de ce tableau que le système des contrevariants et des covariants mixtes n'est pas encore complet : car le contrevariant τ et les covariants mixtes β , ε , ne sont pas symétriques par rapport à s et s', et leurs symétriques, que nous pouvons désigner d'avance par τ' , β' , ε' , ne figurent pas dans le tableau. Nous devons donc nous attendre, en poursuivant l'application de notre méthode, c'est-à-dire en combinant convenablement entre elles les formations déjà trouvées, en vue de diviser le plus possible par x, à rencontrer *au moins* les trois formations nouvelles τ' , β' , ε' , reliées chacune aux formations antérieures par une syzygie qui sera la traduction immédiate de la combinaison qui leur aura donné naissance. C'est la recherche que nous allons maintenant aborder.

Pour cela, écrivons, en les distinguant par un astérisque, les résidus pour $x = 0$ des invariants, contrevariants et péninvariants obtenus jusqu'ici :

$$\tau^* = Gz - H\lambda,$$

$$\tau' = A\lambda - 2Gz - 2H\lambda - 6z^2 - 2\lambda^2 - 2Fz\lambda,$$

$$\beta' = B\lambda - Gz - 2Fz - 2Gz - 2H\lambda,$$

$$\beta^* = A\lambda - Gz - H\lambda,$$

$$\varepsilon^* = -Gz^2 - 2Fz\lambda - B\lambda^2,$$

$$\begin{aligned}
 {}^*t_0 &= a'^2 [g^2(bf' - fb') + gh(cb' - bc') + h^2(fc' - cf')] + (hg' - gh')^2 \\
 &\quad + a'(hg' - gh')(bgg' + chh' + 2ghf' - g^2b' - h^2c' - fgh' - fhg'), \\
 {}^*\delta_0 &= (hg' - gh')\xi + a'(g\eta - h\zeta), \\
 {}^*x_0 &= a'(A\xi + H\eta + G\zeta) + (Gg' + Hh')\xi + (hg' - gh')(g\eta - h\zeta), \\
 {}^*\sigma &= A\xi^2 + 2G\xi\zeta + 2H\xi\eta - (g\eta - h\zeta)^2, \\
 {}^*x'_0 &= (G'g + H'h)\xi + (F'g + B'h)\eta + (C'g + F'h)\zeta, \\
 {}^*\varphi &= (bc' + cb' - 2ff')\xi^2 + a'(c\eta^2 - 2f\eta\zeta + b\zeta^2) - 2(g\eta - h\zeta)(g'\eta - h'\zeta) \\
 &\quad + 2(fg' + gf' - hc' - ch')\xi\eta + 2(fh' + hf' - bg' - gb')\xi\zeta, \\
 {}^*\beta_0 &= \xi^2 [A(hg' - gh') + H(hf' - gb') + G(hc' - gf')] + (hg' - gh')(g\eta - h\zeta)^2 \\
 &\quad + a' [H g \eta^2 - G h \zeta^2 + (G g - H h) \eta \zeta + A \xi (g \eta - h \zeta)] \\
 &\quad + \xi \eta [h^2 (g c' - c g') + g^2 (g b' - b g') + 2 g h (f g' - g f')] \\
 &\quad + \xi \zeta [h^2 (c h' - h c') + g^2 (b h' - h b') + 2 g h (h f' - f h')], \\
 {}^*\varepsilon &= (F'g + B'h) [G\xi + h(g\eta - h\zeta)] - (C'g + F'h) [H\xi - g(g\eta - h\zeta)].
 \end{aligned}$$

En examinant ces expressions, on remarque tout d'abord que, dans le produit ${}^*\delta_0 {}^*x_0$, les coefficients de η^2 , $\eta\zeta$, ζ^2 ne diffèrent que par le facteur a' de leurs valeurs dans ${}^*\beta_0$. Donc

$$a' {}^*\beta_0 - {}^*\delta_0 {}^*x_0$$

est divisible par ξ . Si l'on effectue la division, on trouve pour quotient ${}^*\varepsilon_0$. Donc

$$a' {}^*\beta_0 - {}^*\delta_0 {}^*x_0 - \xi {}^*\varepsilon_0 = 0,$$

et, par suite,

$$a' \beta_0 - x_0 \delta_0 - \xi \varepsilon_0$$

est divisible par a , ce qui fournit un nouveau péninvariant, de degré (2, 2), de classe 2, de poids 6, correspondant par conséquent à un covariant mixte linéaire en x, y, z , irréductible aux formations précédentes, et que je désignerai par γ . La syzygie qui le définit est, d'après ce qui précède,

$$(25) \quad s\gamma = s'\beta - x\delta - \varepsilon\pi.$$

(Je désignerai désormais par π le covariant identique

$$\xi x + \eta y + \zeta z,$$

dont la source est ξ .) On trouve pour expression de sa source γ_0 , tous calculs faits,

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_0 &= (HG' - GH')\xi^2 + (BF' - FB')\eta^2 + (FC' - CF')\zeta^2 \\ &\quad + (HC' - CH' + FG' - GF')\xi\zeta \\ &\quad + (HF' - FH' + BG' - GB')\xi\eta + (BC' - CB')\eta\zeta. \end{aligned} \right.$$

On voit que γ_0 ne fait que changer de signe (comme δ_0 et t_0) quand on permute les coefficients de s et ceux de s' . La même opération laisse évidemment π invariable, et change $\alpha, \beta, \varepsilon$ en leurs symétriques $\alpha', \beta', \varepsilon'$; si donc on l'applique à la syzygie (25), ce qui doit donner encore une syzygie en raison de la symétrie évidente du système par rapport aux deux formes fondamentales s, s' , on obtient cette nouvelle syzygie

$$(27) \quad s\beta' = -s'\gamma - \alpha'\delta + \varepsilon'\pi,$$

laquelle renferme les deux covariants non encore rencontrés β' et ε' , et nous apprend, dès à présent, comment β'_0 pourra être obtenu par l'application de notre méthode, lorsque nous aurons obtenu ε'_0 .

Pour obtenir ε'_0 , il suffit de remarquer que, si l'on forme

$$\alpha'^*\varepsilon_0 + \alpha_0^*\delta_0,$$

les coefficients de τ_1 et ζ s'évanouissent, et celui de ξ se réduit à $\alpha_0^*t_0$. Donc $\alpha'\varepsilon_0 + \alpha_0^*\delta_0 - t_0\xi$ est divisible par α , et, en effectuant cette opération, on trouve précisément ε'_0 , c'est-à-dire ce qui devient ε_0 quand on y permute les coefficients de s et ceux de s' . On a donc, pour rattacher ε' aux formations déjà rencontrées, la syzygie

$$(28) \quad s\varepsilon' = s'\varepsilon + w\delta - t\pi,$$

qui est symétrique par rapport à s et s' .

On voit encore immédiatement que $\alpha^*\delta_0^2 + \alpha'^2\sigma$ est divisible par ξ , et qu'en y ajoutant $-2\alpha'\xi^*\alpha_0$, il ne subsiste plus que des termes en ξ^2 ; on vérifie sans peine que l'ensemble de ces termes se réduit à $(\alpha^*w_0 - \alpha'^*I)\xi^2$; par conséquent

$$\delta_0^2 + \alpha'^2\sigma - 2\alpha'\alpha_0\xi + (I\alpha' - w_0)\xi^2$$

est divisible par α . En effectuant la division, on trouve, pour expression du quotient,

$$\begin{aligned} &bg'^2 + ch'^2 - 2fg'h')\xi^2 + (ag'^2 + ca'^2 - 2ga'g')\tau_1^2 \\ &- (ah'^2 + ba'^2 - 2ha'h')\xi^2 + 2(ga'h' + ha'g' - ag'h' - fa'^2)\tau_1\xi \\ &- 2(gg'h' - hg'^2 - ca'h' + fa'g')\xi\tau_1 \\ &+ 2(hg'h' - gh'^2 - ba'g' + fa'h')\xi^2\tau_1. \end{aligned}$$

En y ajoutant $-\alpha'\varphi$, il ne subsistera évidemment plus dans

cette expression que des termes divisibles soit par α , soit par ξ , et l'on reconnaît sans peine qu'en y ajoutant encore $I'\xi^2$ elle se réduit à $2\alpha'_0\xi - \alpha\sigma'$, en appelant comme ci-dessus σ' le contrevariant symétrique de σ . Ce contrevariant, dont il est inutile d'écrire l'expression, est donc relié aux formations antérieures par la syzygie

$$(29) \quad \partial^2 + s^2\sigma' + s'^2\sigma - ss'\varphi - 2\pi(s\alpha' + s'\alpha) + \pi^2(Is' + I's - w) = 0.$$

Nous avons ainsi obtenu, en appliquant notre méthode générale, les formations β' , ε' , σ' , dont l'existence était prévue, et de plus la formation γ , symétrique (au signe près), par rapport aux deux séries de coefficients. Pour avoir le système complet, tel que l'a établi M. Gordan, il ne nous reste plus à obtenir qu'un contrevariant de degré (3,3) et de classe 3, qui corresponde dualistiquement au covariant cubique pur désigné ci-dessus par t .

Pour obtenir ce contrevariant, que j'appellerai τ , il suffit de remarquer que si l'on forme $^*\alpha'_0\beta_0 + ^*\alpha_0\gamma_0$, les termes en γ_1^3 , $\gamma_1^2\zeta$, $\gamma_1\zeta^2$, ζ^3 disparaissent d'eux-mêmes; en divisant par ξ , on trouve $^*I\gamma_0 + ^*D\beta'_0$; de telle sorte que

$$\alpha'_0\beta_0 + \alpha_0\gamma_0 - \xi(I\gamma_0 + D\beta'_0)$$

est divisible par α , ce qui donne un péninvariant de degré (3,3), de classe 3, de poids 10, correspondant par suite à un covariant mixte d'ordre 0; en d'autres termes, un contrevariant précisément de même degré et classe que τ et qui ne peut être que τ lui-même, car les contrevariants déjà trouvés étant tous de classe paire, aucune combinaison formée avec eux ne pourrait fournir un contrevariant de classe impaire. Nous avons donc, pour relier τ aux autres formations, la syzygie

$$(30) \quad s\tau = \alpha\gamma - \alpha'\beta - \pi(I\gamma + D\beta').$$

Il est inutile de donner l'expression complète de τ ⁽¹⁾; elle change de signe quand on permute s et s' . En effectuant cette permutation dans la syzygie (30), on obtient la nouvelle sy-

(¹) On l'obtiendrait d'ailleurs en permutant les lettres majuscules avec les minuscules dans l'expression de t , dont la source t , a été donnée ci-dessus [formule (16)].

zygie

$$(31) \quad s'\tau = \alpha'\gamma - \alpha\beta' - \pi(\Gamma'\gamma - D'\beta).$$

4. Nous sommes maintenant en possession du système complet des formations invariants, avec les sept syzygies (13), (25), (27), (28), (29), (30) et (31) qui les relient entre elles. Voici le Tableau de ces formations, avec la notation de Clebsch en regard :

		Degré dans les coefficients.		Classe.	Ordre.	Notation de Clebsch.
		de s .	de s' .			
4 invariants	$\left\{ \begin{array}{l} D \dots\dots \\ I \dots\dots \\ I' \dots\dots \\ D' \dots\dots \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} A_{111} \\ A_{112} \\ A_{122} \\ A_{222} \end{array} \right.$
4 covariants purs	$\left\{ \begin{array}{l} s \dots\dots \\ w \dots\dots \\ s' \dots\dots \\ t \dots\dots \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} f \\ \Phi_{12} \\ f' \\ \Delta \end{array} \right.$
4 contrevariants	$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \dots\dots \\ \varphi \dots\dots \\ \tau' \dots\dots \\ \tau \dots\dots \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{22} \\ D \end{array} \right.$
9 covariants mixtes	$\left\{ \begin{array}{l} \pi \dots\dots \\ \alpha \dots\dots \\ \alpha' \dots\dots \\ \beta \dots\dots \\ \gamma \dots\dots \\ \beta' \dots\dots \\ \varepsilon \dots\dots \\ \varepsilon' \dots\dots \\ \delta \dots\dots \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} u_x \\ B_1 \\ B_2 \\ C_1 \\ \mathcal{C} \\ C_2 \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ N \end{array} \right.$

Les formations $t, \tau, \beta, \beta', \gamma, \delta, \varepsilon, \varepsilon'$ sont gauches, c'est-à-dire changent de signe par une substitution de déterminant -1 , comme les invariants binaires dont elles dérivent.

Proposons-nous de former de nouvelles syzygies, en transportant dans le domaine ternaire celles qui existent entre les treize invariants binaires dont nous sommes partis.

D'après les résultats obtenus dans le Mémoire déjà cité plu-

sieurs fois, ces treize invariants binaires sont reliés par vingt syzygies distinctes, dont voici le Tableau :

$$\begin{aligned}
 (32) \quad & \left. \begin{aligned}
 & \text{I. } \left\{ \begin{aligned}
 \mathfrak{G}^2 &= \mathfrak{A}\mathfrak{B}'\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2(\mathfrak{D}') - \mathfrak{A}'^2(\mathfrak{D}), \\
 \mathfrak{G}'^2 &= \mathfrak{D}\mathfrak{D}'\mathfrak{A} - \mathfrak{D}^2(\mathfrak{D}') - \mathfrak{D}'^2(\mathfrak{D}), \\
 \mathfrak{L}'^2 &= \mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}\mathfrak{A}' + 2\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{B}') - 4(\mathfrak{A}\mathfrak{B}'\mathfrak{D}'(\mathfrak{D}) + \mathfrak{B}\mathfrak{B}^2(\mathfrak{D}')), \\
 \mathfrak{G}\mathfrak{G}' &= \mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{B}'\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\mathfrak{B}^2(\mathfrak{D}') - \mathfrak{B}\mathfrak{B}'^2(\mathfrak{D}), \\
 \mathfrak{G}\mathfrak{L}' &= \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}' - \mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{A}', \\
 \mathfrak{G}'\mathfrak{L}' &= \mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{B}', \\
 \mathfrak{G}\mathfrak{L}' &= \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{A}' + \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}') - 2(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{B}(\mathfrak{D}') + \mathfrak{A}'\mathfrak{B}\mathfrak{B}'(\mathfrak{D})), \\
 \mathfrak{G}'\mathfrak{L}' &= \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{B}') - 2(\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{D}(\mathfrak{D}') + \mathfrak{B}\mathfrak{B}'\mathfrak{D}'(\mathfrak{D})), \\
 \mathfrak{L}'\mathfrak{L}' &= \mathfrak{A}\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}\mathfrak{A}'; \\
 & \text{II. } \left\{ \begin{aligned}
 (\mathfrak{D})\mathfrak{L}'^2 &= \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{B}^2, \\
 (\mathfrak{D}')\mathfrak{L}'^2 &= \mathfrak{A}\mathfrak{B}'\mathfrak{D}' - \mathfrak{B}\mathfrak{B}'^2, \\
 \mathfrak{A}\mathfrak{L}'^2 &= \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}\mathfrak{A}' - 2\mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{B}';
 \end{aligned}
 \right. \\
 & \text{III. } \left\{ \begin{aligned}
 \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{G}' + \mathfrak{D}\mathfrak{G} - \mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{L}' &= 0, \\
 \mathfrak{A}\mathfrak{B}'\mathfrak{G}' + \mathfrak{D}'\mathfrak{G} - \mathfrak{B}\mathfrak{B}'\mathfrak{L}' &= 0, \\
 \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{G}' - \mathfrak{D}\mathfrak{G} + (2\mathfrak{B}\mathfrak{B}'(\mathfrak{D}) - \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B})\mathfrak{L}' &= 0, \\
 \mathfrak{A}\mathfrak{B}'\mathfrak{G}' - \mathfrak{D}'\mathfrak{G} + (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{B}' - 2\mathfrak{B}\mathfrak{B}(\mathfrak{D}'))\mathfrak{L}' &= 0, \\
 \mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{L}' - \mathfrak{A}\mathfrak{L}') + 2(\mathfrak{A}\mathfrak{B}'(\mathfrak{D})\mathfrak{L}' - \mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{G}) &= 0, \\
 \mathfrak{A}\mathfrak{B}'(\mathfrak{L}' + \mathfrak{A}\mathfrak{L}') - 2(\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{D}')\mathfrak{L}' + \mathfrak{B}\mathfrak{B}'\mathfrak{G}) &= 0, \\
 \mathfrak{D}(\mathfrak{L}' + \mathfrak{A}\mathfrak{L}') - 2(\mathfrak{D}'(\mathfrak{D})\mathfrak{L}' + \mathfrak{B}\mathfrak{B}\mathfrak{G}') &= 0, \\
 \mathfrak{D}'(\mathfrak{L}' - \mathfrak{A}\mathfrak{L}') + 2(\mathfrak{D}(\mathfrak{D}')\mathfrak{L}' - \mathfrak{B}\mathfrak{B}'\mathfrak{G}') &= 0.
 \end{aligned}
 \right.
 \end{aligned}
 \right.
 \end{aligned}$$

Le groupe I donne l'expression des carrés et produits deux à deux des invariants binaires gauches (à l'exception du seul carré $\mathfrak{L}'^2$) en fonction des invariants droits; nous pouvons donc nous attendre à obtenir les expressions des carrés et produits deux à deux des formations ternaires gauches ι , δ , β , ϵ , à l'exception de δ^2 , en fonction des formations droites : il n'y aura même plus d'exception pour δ^2 , que la syzygie (29) exprime précisément de cette manière. Le groupe II ne contenant que $\mathfrak{L}'^2$ comme invariant gauche nous donnera des syzygies entre formes droites. Enfin le groupe III fournira des syzygies gauches, c'est-à-dire dans chaque terme desquelles entre une formation gauche, et une seule.

Pour transporter toutes ces syzygies dans le domaine ternaire, il suffit d'y remplacer chaque invariant binaire par son expression en fonction des péninvariants ternaires, d'effectuer les

simplifications qui se présentent par la suppression des puissances de α qui apparaissent en facteur commun ou par l'emploi de syzygies déjà connues, enfin de remplacer les péninvariants ternaires par les covariants dont ils sont respectivement les sources. Les expressions de $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{G}$ ont déjà été données plus haut; celles des sept autres invariants binaires se déduisent facilement de proche en proche des formules (18), (19), (20), (21), (22), (23) et (24). Je les écris toutes ci-dessous, en y remplaçant d'avance, pour plus de commodité, les péninvariants ternaires par les covariants correspondants :

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q} &= Ds, & \mathfrak{Q}' &= s^2(I's - w), & \mathfrak{A} &= s(Is - Ds'), \\ \mathfrak{A} &= s(Is' - sw - Ds'^2), & \mathfrak{A}' &= s^2(I'ss' - s'w - Ds'^2), \\ \mathfrak{G} &= s^2t, & \mathfrak{L} &= s\delta, & \mathfrak{B} &= s(s\alpha - Ds'\pi), \\ \mathfrak{C} &= s(s\sigma - D\pi^2), & \mathfrak{B}' &= s^2(-s\alpha' + I's\pi - w\pi), \\ \mathfrak{C}' &= s^2(s\varphi - s'\sigma + 2\alpha\pi - I\pi^2), & \mathfrak{G}' &= s^2(s\beta - D\delta\pi), \\ \mathfrak{L}' &= s^2(2s\varepsilon - Ds'\delta + Is\delta).\end{aligned}$$

Commençons par les syzygies du groupe I. La première a déjà été utilisée et nous a donné la syzygie (13). La cinquième donne la relation symétrique que voici :

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} t\delta &= (D's^2 - I'ss' + w's')\alpha + (Ds'^2 - Iss' + w's)\alpha' \\ &+ [(I' - DD')ss' - w(1s' + I's) + w^2]\pi. \end{aligned} \right.$$

La sixième donne, en tenant compte de (20),

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta\delta &= (s\varphi - s'\sigma)\alpha + s\sigma\alpha' \\ &+ [2\alpha^2 + w\sigma - s(D\sigma' + I'\sigma)]\pi + (D\alpha' - I\alpha)\pi^2; \end{aligned} \right.$$

d'où l'on conclut, par symétrie,

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta'\delta &= -s'\sigma'\alpha + (s\sigma' - s'\varphi)\alpha' \\ &- [2\alpha'^2 + w'\sigma' - s'(D'\sigma + I'\sigma')]\pi + (I'\alpha' - D'\alpha)\pi^2. \end{aligned} \right.$$

La neuvième peut s'écrire, à cause de la troisième du groupe II,

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{L}' - \mathfrak{A}\mathfrak{L}) = 2(\mathfrak{B}\mathfrak{B}' - \mathfrak{C}\mathfrak{A}'),$$

et donne par suite

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta\varepsilon &= (D's^2 + s'w - I'ss')\pi - s\alpha\alpha' \\ &+ [(I's - w)\alpha + Ds'\alpha']\pi - DD's\pi^2; \end{aligned} \right.$$

d'où l'on conclut, par symétrie,

$$(37) \quad \begin{cases} \delta \varepsilon' = (I s s' - D s'^2 - s w) \sigma' + s' \alpha x' \\ + [(w - I s') x' - D' s \alpha] \pi + D D' s' \pi^2. \end{cases}$$

La deuxième donne, en tenant compte de (29) et de (34),

$$(38) \quad \begin{cases} \beta^2 = (w - I s' - I' s) \sigma^2 + (I s + D s') \varphi \sigma - D s \varphi^2 \\ + 2 \pi [(I \sigma - D \varphi) x + D \alpha x'] + \pi^2 (I D \varphi - I^2 \sigma - D^2 \sigma'); \end{cases}$$

d'où, par symétrie,

$$(39) \quad \begin{cases} \beta'^2 = (w - I s' - I' s) \sigma'^2 + (I' s' + D' s) \varphi \sigma' - D' s' \varphi'^2 \\ + 2 \pi [(I' \sigma' - D' \varphi) x' + D' \sigma' \alpha] + \pi^2 (I' D' \varphi - I'^2 \sigma' - D'^2 \sigma). \end{cases}$$

La quatrième donne, en tenant compte de (33),

$$(40) \quad \begin{cases} t \beta = (w - I' s) x^2 + (D s' - I s) \alpha x' - D s \alpha'^2 + [(I I' + D D') s - I w] x \pi \\ + D (2 I' s - w) x' \pi + D (I' w - D D' s' - I'^2 s) \pi^2; \end{cases}$$

d'où, par symétrie,

$$(41) \quad \begin{cases} t \beta' = (I s' - w) \alpha'^2 + (I' s' - D' s) \alpha x' + D' s' \alpha^2 \\ + [I' w - (I I' + D D') s'] x' \pi + D' (w - 2 I s') x \pi \\ + D' (I^2 s' + D D' s - I w) \pi^2. \end{cases}$$

La septième donne, en tenant compte de (33),

$$(42) \quad \begin{cases} t \varepsilon = (-I D' s'^2 + D D' s s' + I' s w - w^2) x + (-D D' s^2 + I' D s s' - D s' w) x' \\ + [I' D D' s^2 + D (I D' - I'^2) s s' + D^2 D' s'^2 - D D' s w + I' D s' w] \pi; \end{cases}$$

d'où, par symétrie,

$$(43) \quad \begin{cases} t \varepsilon' = (D D' s'^2 - I D' s s' + D' s w) x + (I' D s'^2 - D D' s s' - I s' w + w^2) x' \\ + [-I D D' s'^2 - D' (I' D - I^2) s s' + D D'^2 s^2 + D D' s' w - I D' s w] \pi. \end{cases}$$

La huitième peut s'écrire, en tenant compte de la sixième,

$$\mathfrak{J}''(\mathfrak{L}' - \mathfrak{J} \mathfrak{L}') = 2(\mathfrak{J} \ominus \mathfrak{W}' - \mathfrak{W} \ominus \mathfrak{W}' + \mathfrak{W}' \ominus' \mathfrak{W}),$$

et donne par suite, en tenant compte de (36),

$$(44) \quad \begin{cases} \beta \varepsilon = (w - I' s) \sigma \alpha - (D \varphi - I \sigma) s \alpha' \\ + [D \alpha x' + (w - I' s)(D \varphi - I \sigma) + D D' s \sigma] \pi - D^2 D' \pi^3; \end{cases}$$

d'où, par symétrie,

$$(45) \quad \begin{cases} \beta' \varepsilon' = (w - I' s') \sigma' \alpha' - (D' \varphi - I' \sigma') s' \alpha \\ + [D' \alpha x' + (w - I s')(D' \varphi - I' \sigma') + D D' s' \sigma'] \pi - D D'^2 \pi^3. \end{cases}$$

Enfin la troisième peut s'écrire, en tenant compte de la dernière du groupe II,

$$(\mathcal{L}' + \mathfrak{L})(\mathcal{L}' - \mathfrak{L}) = 4[\mathfrak{W}(\mathfrak{W}' - \mathfrak{W}(\mathfrak{D}')) - \mathfrak{D}\mathfrak{W}'\mathfrak{D}'],$$

et donne alors, en tenant compte de (36),

$$(46) \quad \varepsilon^2 = (\omega - I's)(\alpha^2 + Ds'\varphi - Is'\sigma) + D's^2(D\varphi - I\sigma) + DD'\pi(2s\alpha - Ds'\pi);$$

d'où, par symétrie,

$$(47) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 = (\omega - I's)(\alpha^2 + D's\varphi - I's\sigma) \\ + Ds'^2(D'\varphi - I'\sigma) + DD'\pi(2s'\alpha' - D's\pi). \end{cases}$$

Passons maintenant aux syzygies binaires du groupe II. En les transportant dans le domaine ternaire, avec le secours de (29), on obtient les trois importantes relations

$$(48) \quad \alpha^2 = D\sigma's + (I\sigma - D\varphi)s' - \sigma\omega - 2D\alpha'\pi + I'D\pi^2,$$

$$(49) \quad \alpha'^2 = D'\sigma s' + (I'\sigma' - D'\varphi)s - \sigma'\omega - 2D'\alpha\pi + ID'\pi^2,$$

$$(50) \quad \begin{cases} 2\alpha\alpha' = (D'\sigma - I'\sigma)s + (D\sigma' - I'\sigma)s' + \varphi\omega \\ + 2(I'\alpha + I\alpha')\pi - (II' + DD')\pi^2, \end{cases}$$

dont les deux premières sont symétriques l'une de l'autre; la troisième est sa propre symétrique. Ces trois syzygies ne renferment, comme il avait été prévu, que des formes droites; elles peuvent servir à ramener toutes les expressions à ne contenir α et α' qu'au premier degré.

Transportons enfin dans le domaine ternaire les huit syzygies binaires du groupe III. Le calcul ne présente aucune difficulté, en s'aidant des syzygies (25), (27), (28), (30) et (31). Voici le groupe de syzygies gauches auxquelles on est finalement conduit :

$$(51) \quad (Is' - \omega)\beta - Ds'\gamma - I\alpha\delta - 2\alpha\varepsilon + D\pi\varepsilon' + \sigma t = 0,$$

$$(52) \quad \begin{cases} (I's' - D's)\beta + (D's' - Is)\beta' - 2\omega\gamma \\ + 2(\alpha' - I'\pi)\varepsilon + (DD' - II')\pi\delta + 2(I\pi - \alpha)\varepsilon' + \varphi t = 0, \end{cases}$$

$$(53) \quad D(D's - I's')\delta + (\omega - I's)\varepsilon + Ds'\varepsilon' + \alpha t = 0,$$

$$(54) \quad \alpha' - I'\pi)\beta + D\pi\beta' + I\pi\gamma + I'\sigma\delta + \varphi\varepsilon - \sigma\varepsilon' = 0,$$

$$(55) \quad \alpha\beta - D\pi\gamma + (D\varphi - I\sigma)\delta - \sigma\varepsilon = 0,$$

$$(56) \quad D'(D's' - Is)\delta - D's\varepsilon + (I's - \omega)\varepsilon' + \alpha' t = 0,$$

$$(57) \quad D(\alpha' - I'\pi)\delta - \alpha\varepsilon + D\pi\varepsilon' + \sigma t = 0,$$

$$(58) \quad [(DD' + II')\pi - I\alpha' - I'\alpha]\delta + (I'\pi - \alpha')\varepsilon - (I\pi - \alpha)\varepsilon' - \varphi t = 0.$$

$$\begin{aligned}
 (59) \quad & Ds'\beta' + (Is' - w)\gamma + DD'\pi\delta - \alpha\varepsilon' = 0, \\
 (60) \quad & (Is' - w)\beta' + D's\gamma + I'\alpha'\delta - 2\alpha'\varepsilon' + D'\pi\varepsilon - \sigma't = 0, \\
 (61) \quad & (\alpha - I\pi)\beta' + D'\pi\beta - I'\pi\gamma - I\sigma'\delta + \varphi\varepsilon' - \sigma'\varepsilon = 0, \\
 (62) \quad & \alpha'\beta' + D'\pi\gamma + (I'\sigma' - D'\varphi)\delta - \sigma'\varepsilon' = 0, \\
 (63) \quad & D'(\alpha - I\pi)\delta + \alpha'\varepsilon' - D'\pi\varepsilon + \sigma't = 0, \\
 (64) \quad & D's\beta + (w - I's)\gamma - DD'\pi\delta - \alpha'\varepsilon = 0.
 \end{aligned}$$

Les huit premières de ces syzygies [(51) à (58)] proviennent respectivement des première, deuxième, cinquième, huitième, septième, sixième, troisième et quatrième syzygies binaires du groupe III (32). La syzygie (59) s'obtient en divisant par s la combinaison suivante des syzygies (25), (27), (28), (51), (53), (57), où tous les termes non divisibles par s disparaissent d'eux-mêmes,

$$0 = \begin{cases} (w - Is')[s\gamma - s'\beta + \alpha\delta + \pi\varepsilon] - Ds'[s\beta' + s'\gamma + \alpha'\delta - \pi\varepsilon'] \\ + \alpha[s\varepsilon' - s'\varepsilon - w\delta + \pi t] \\ - s'[(Is' - w)\beta - Ds'\gamma - I\alpha\delta - 2\alpha\varepsilon + D\pi\varepsilon' + \sigma t] \\ - \pi[D(D's - I's')\delta + (w - Is')\varepsilon + Ds'\varepsilon' + \alpha t] \\ + s'[D(\alpha' - I'\pi)\delta - \alpha\varepsilon + D\pi\varepsilon' + \sigma t]. \end{cases}$$

Enfin les syzygies (60) à (64) se déduisent respectivement par symétrie des syzygies (51), (54), (55), (57), (59). Les syzygies (52) et (58) sont leurs propres symétriques ; (53) a pour symétrique (56).

5. Nous avons obtenu précédemment dix-sept syzygies donnant l'expression de carrés ou de doubles produits de formes gauches en fonction des formes droites, savoir (13), (29) et (33) à (47). Je vais maintenant calculer les expressions analogues pour tous les autres carrés ou doubles produits de formes gauches, en formant méthodiquement dix-neuf syzygies nouvelles par le procédé suivant.

Je multiplie la syzygie (25) successivement par t , δ , β , ε ; je remplace dans le second membre les doubles produits ou carrés de formes gauches par leurs expressions en fonction des formes droites, connues en vertu des syzygies antérieures ; en utilisant au besoin les syzygies (48), (49) et (50), il est facile de faire disparaître les termes non divisibles par s ; effectuant la division, j'ob-

tiens dans le premier membre γt , $\gamma \delta$, $\gamma \beta$, $\gamma \varepsilon$, et le second membre donne, pour ce double produit, l'expression demandée. Connaissant ainsi $\gamma \delta$, $\gamma \beta$, $\gamma \varepsilon$, il suffit de multiplier (25) par γ et d'opérer de la même manière pour obtenir l'expression de γ^2 . J'opère ensuite de même sur la syzygie (28), puis sur (27), enfin sur (30); en profitant d'ailleurs de la loi de symétrie pour éviter quelques-uns de ces calculs. Les résultats que fournit cette méthode sont donnés par le Tableau ci-dessous, dans l'ordre même où on les obtient :

$$(65) \quad \begin{cases} t\gamma = -D'sx^2 - wx'x - Ds'x'^2 + D'(Is + Ds')x\pi \\ \quad + D(I's' + D's)x'\pi + DD'(w - Is' - I's)\pi^2, \end{cases}$$

$$(66) \quad \gamma\delta = s\sigma'x + s'\sigma x' - (xx' + Ds'\sigma' + D's\sigma)\pi + DD'\pi^2,$$

$$(67) \quad \begin{cases} \beta\gamma = -I's'\sigma^2 + Ds'\sigma\sigma' - Ds'\sigma'\varphi + w\sigma\varphi - \sigma x x' + (I\sigma + D\varphi)x'\pi \\ \quad + (2I'\sigma - D\sigma')x\pi - II'\sigma\pi^2, \end{cases}$$

$$(68) \quad \begin{cases} \beta'\gamma = Is\sigma'^2 - D's\sigma\sigma' + D's'\sigma\varphi - w\sigma'\varphi + \sigma'xx' - (I'\sigma' + D'\varphi)x\pi \\ \quad + (D'\sigma - 2I'\sigma')x'\pi + II'\sigma'\pi^2, \end{cases}$$

$$(69) \quad \begin{cases} \gamma\varepsilon = s(D\sigma'x' - D'\sigma x) - w\sigma x' + \pi[(ID'\sigma - 2I'D\sigma' + DD'\varphi)s - DD's'\sigma + 2D'w\sigma'] \\ \quad - D\pi^2(I'x' + 3D'x) - 2IDD'\pi^3, \end{cases}$$

$$(70) \quad \begin{cases} \gamma\varepsilon' = s'(D\sigma'x' - D'\sigma x) + w\sigma'x - \pi[(I'D\sigma' - 2ID'\sigma + DD'\varphi)s' - DD's'\sigma' + 2D'w\sigma] \\ \quad - D'\pi^2(Ix + 3Dx') + 2I'DD'\pi^3, \end{cases}$$

$$(71) \quad \begin{cases} \gamma^2 = -Ds\sigma'^2 - I's'\sigma^2 + w\sigma\sigma' + 2\pi(D'\sigma x + D\sigma'x') \\ \quad + \pi^2(DD'\varphi - II'\sigma - I'D\sigma'), \end{cases}$$

$$(72) \quad \begin{cases} \beta\varepsilon' = -x^2x' + (w\varphi - I's'\sigma)x + Ds\sigma'x' \\ \quad + \pi(2I'x^2 + Ixx' - Dx'^2 + DD's'\sigma - I'Ds\sigma') \\ \quad + \pi^2[I'Dx' - (II' + DD')x], \end{cases}$$

$$(73) \quad \begin{cases} \beta'\varepsilon = -xx'^2 + (w\varphi - Is\sigma')x' + D's'\sigma x \\ \quad + \pi(2Ix'^2 + I'xx' - D'x^2 + DD's'\sigma' - II's'\sigma) \\ \quad + \pi^2[ID'x - (II' + DD')x'], \end{cases}$$

$$(74) \quad \begin{cases} \varepsilon\varepsilon' = ss'(DD'\varphi - II'\sigma - I'D\sigma') + w(I's\sigma + Ds'\sigma' - xx') \\ \quad + \pi[D'x(Is + Ds') + Dx'(I's' + D's)] - DD'\pi^2(I's + I's'), \end{cases}$$

$$(75) \quad \begin{cases} \beta\beta' = \sigma\sigma'(w - Is' - I's) + \varphi(D's\sigma + Ds'\sigma' - xx') \\ \quad + \pi[(I'\sigma + D'\sigma)x - (I'\sigma + D'\sigma')x'] - \pi^2(I'D\sigma' + II'\sigma), \end{cases}$$

$$(76) \quad \begin{cases} t\pi = -D'x^3 - I'x^2x' - Ixx'^2 - Dx'^3 + \pi[2ID'x^2 + (II' + 3DD')xx' + 2I'Dx'^2] \\ \quad - \pi^2[D'(I'x + I'D)x + D(I'^2 + II')x'] + DD'(II' - DD')\pi^3, \end{cases}$$

(Cette importante syzygie, dont la signification sera étudiée plus loin, présente à première vue ce caractère remarquable, que le second membre ne renferme que les quatre invariants et les trois covariants mixtes linéo-linéaires π , α , α' .)

$$(77) \quad \begin{cases} \tau\delta = \sigma'\alpha^2 + \varphi\alpha\alpha' + \sigma\alpha'^2 - \pi[(D'\sigma + I\sigma')\alpha + (D\sigma' + I'\sigma)\alpha'] \\ \quad + \pi^2[ID'\sigma + I'D\sigma' - DD'\varphi], \end{cases}$$

$$(78) \quad \begin{cases} \tau\beta = (-D'\sigma^2 + I\sigma\sigma' - D\sigma'\varphi)\alpha + (-I'\sigma^2 + D\sigma\sigma' + I\sigma\varphi - D\varphi^2)\alpha' \\ \quad + [ID'\sigma^2 + (I'D - I^2)\sigma\sigma' - D^2\sigma'^2 - DD'\sigma\varphi + ID\sigma'\varphi]\pi, \end{cases}$$

$$(79) \quad \begin{cases} \tau\beta' = (I\sigma'^2 - D'\sigma\sigma' - I'\sigma'\varphi + D'\varphi^2)\alpha + (D\sigma'^2 - I'\sigma\sigma' + D'\sigma\varphi)\alpha' \\ \quad + [D^2\sigma^2 + (I^2 - ID')\sigma\sigma' - I'D\sigma'^2 + DD'\sigma'\varphi - I'D'\sigma\varphi]\pi, \end{cases}$$

$$(80) \quad \begin{cases} \tau\varepsilon = -D'\sigma\alpha^2 + (D\sigma' - I'\sigma)\alpha\alpha' + (D\varphi - I\sigma)\alpha'^2 + D'(\sigma I\sigma - D\varphi)\alpha\pi \\ \quad + [(H' + DD')\sigma - I'D\varphi]\alpha'\pi + D'(-I^2\sigma - D^2\sigma' + ID\varphi)\pi^2. \end{cases}$$

$$(81) \quad \begin{cases} \tau\varepsilon' = (I'\sigma' - D'\varphi)\alpha^2 + (I\sigma' - D'\sigma)\alpha\alpha' + D\sigma'\alpha'^2 \\ \quad + [ID'\varphi - (H' + DD')\sigma']\alpha\pi + D(D'\varphi - 2I'\sigma')\alpha'\pi \\ \quad + D(D^2\sigma + I^2\sigma' - I'D'\varphi)\pi^2, \end{cases}$$

$$(82) \quad \begin{cases} \tau\gamma = (-D\sigma'^2 + I'\sigma\sigma' - D'\sigma\varphi)\alpha + (-D'\sigma^2 + I\sigma\sigma' - D\sigma'\varphi)\alpha' \\ \quad + [(ID'\sigma + I'D\sigma')\varphi + (DD' - H')\sigma\sigma' - DD'\varphi^2]\pi, \end{cases}$$

$$(83) \quad \begin{cases} \tau^2 = DD'\varphi^3 - (ID'\sigma + I'D\sigma')\varphi^2 + [I'D\sigma^2 + (H' - 3DD')\sigma\sigma' + ID\sigma'^2]\varphi - D^2\sigma^3 \\ \quad - (I^2 - 2ID')\sigma^2\sigma' - (I^2 - 2I'D)\sigma\sigma'^2 - D^2\sigma'^3. \end{cases}$$

Pour faciliter l'emploi de tous ces résultats, je donnerai ici une Table à double entrée, au moyen de laquelle on peut retrouver immédiatement, par son numéro d'ordre, la syzygie qui fournit le carré d'une forme gauche donnée ou le produit de deux formes gauches données :

$\iota.$	$\delta.$	$\beta.$	$\beta'.$	$\varepsilon.$	$\varepsilon'.$	$\gamma.$	$\tau.$	
(13)	(33)	(40)	(41)	(42)	(43)	(65)	(76)	$\iota.$
	(29)	(34)	(35)	(36)	(37)	(66)	(77)	$\delta.$
		(38)	(75)	(44)	(72)	(67)	(78)	$\beta.$
			(39)	(73)	(45)	(68)	(79)	$\beta'.$
				(46)	(74)	(69)	(80)	$\varepsilon.$
					(47)	(70)	(81)	$\varepsilon'.$
						(71)	(82)	$\gamma.$
							(83)	$\tau.$

6. En examinant attentivement les syzygies obtenues, on re-

connaît l'existence (indépendamment de la symétrie, évidente *a priori*, relative à l'échange des coefficients de s et de s') d'un genre particulier de symétrie croisée, qui peut être défini comme suit :

« Si, dans une quelconque des syzygies, on remplace $s, s', w, t, \varepsilon, \varepsilon', \gamma$, respectivement par $D\sigma', D'\sigma, DD'\varphi, -DD'\tau, D\beta', D'\beta, \delta$, et en même temps, inversement, $\sigma, \sigma', \varphi, \tau, \beta, \beta', \delta$, par $\frac{s'}{D}, \frac{s}{D}, \frac{w}{DD'}, -\frac{t}{DD'}, \frac{\varepsilon'}{D}, \frac{\varepsilon}{D}, \gamma$, en conservant sans modification α, α', π , et les invariants D, D', I, I' , on obtient encore une syzygie. »

Je dirai que deux syzygies sont *réciproques* quand elles se déduisent l'une de l'autre par le procédé que je viens d'indiquer. Ainsi chacune des trois syzygies fondamentales entre formes droites (48), (49) et (50) est sa propre réciproque, comme il est aisé de le vérifier. Dans la Table à double entrée donnée ci-dessus, les quatre syzygies (76), (66), (72), (73), placées sur la diagonale, sont aussi leurs propres réciproques; et chacune des autres a pour réciproque celle qui occupe la position symétrique par rapport à cette même diagonale. La vérification de cette curieuse propriété, lorsqu'elle n'est pas immédiate, n'exige que l'emploi convenablement dirigé des trois syzygies droites (48), (49) et (50).

En ce qui concerne les syzygies gauches, on reconnaît que les syzygies (30), (31), (55), (62) ont respectivement pour réciproques (63), (57), (59), (64). La réciproque de (25) serait

$$(84) \quad D\sigma'\delta - \sigma\varepsilon' + \alpha\gamma + D\pi\beta' = 0;$$

cette syzygie, que nous n'avons pas encore rencontrée, est néanmoins exacte; car on l'obtient en divisant par s la combinaison suivante de syzygies connues :

$$\alpha(25) + D\pi(27) - \sigma(28) - \delta(48) + s'(55) + \pi(57) = 0.$$

La réciproque de (27) est évidemment exacte aussi comme étant la symétrique de (84), savoir

$$(85) \quad D'\sigma\delta + \sigma'\varepsilon + \alpha'\gamma - D'\pi\beta = 0.$$

La réciproque de (28) serait

$$(86) \quad \beta'\sigma - \beta\sigma' + \varphi\gamma + \pi\tau = 0.$$

Cette syzygie symétrique, que nous n'avons pas encore rencontrée, est néanmoins exacte; car elle s'obtiendrait en divisant par s^2 la combinaison suivante de syzygies connues :

$$0 = \begin{cases} (s\varphi + 2\alpha\pi - s'\sigma)(25) + (s\sigma + D\pi^2)(27) - \pi\sigma(28) - \beta(29) \\ + s\pi[(30) - (54) - (84)] + \delta(34) + \pi^2(51). \end{cases}$$

On peut d'ailleurs en vérifier plus rapidement l'exactitude en la multipliant par τ , et remplaçant $\beta'\tau$, $\beta\tau$, $\gamma\tau$, τ^2 par leurs expressions (79), (78), (82), (83) : les coefficients de α , α' , π s'évanouissent d'eux-mêmes séparément.

La réciproque de (51) serait

$$(I\sigma - D\varphi)\varepsilon' - DD'\sigma\delta - I\alpha\gamma - 2D\alpha\beta' + DD'\pi\beta - Ds'\tau = 0;$$

mais ce n'est que la combinaison suivante de syzygies déjà connues

$$D[(31) + (61) + (85)] + I(84) = 0.$$

Les réciproques de (52), (53), (54), (56), (58), (61) seraient respectivement

$$\begin{aligned} (87) \quad & \left\{ \begin{aligned} (I'\sigma - D\sigma')\varepsilon' + (D'\sigma - I\sigma')\varepsilon + 2(I\pi - \alpha)D'\beta \\ + 2(\alpha' - I'\pi)D\beta' - 2DD'\varphi\delta + (DD' - II')\pi\gamma - \omega\tau = 0, \end{aligned} \right. \\ (88) \quad & (D\sigma' - I'\sigma)\gamma + (D\varphi - I\sigma)\beta' + D'\sigma\beta - \alpha\tau = 0, \\ (89) \quad & (\alpha' - I'\pi)\varepsilon' + D'\pi\varepsilon + ID'\pi\delta + I's'\gamma + \omega\beta' - D's'\beta = 0, \\ (90) \quad & (D'\sigma - I'\sigma')\gamma - D\sigma'\beta' + (I'\sigma' - D'\varphi)\beta - \alpha'\tau = 0, \\ (91) \quad & (I'\pi - \alpha')D\beta' - (I\pi - \alpha)D'\beta + [(DD' + II')\pi - I\alpha' - I'\alpha]\gamma + \omega\tau = 0, \\ (92) \quad & (\alpha - I\pi)\varepsilon + D\pi\varepsilon' - I'D\pi\delta - Is\gamma + \omega\beta - Ds\beta' = 0, \end{aligned}$$

syzygies dont l'exactitude pourrait sans doute être vérifiée assez facilement. Quant à (60), symétrique de (51), elle donnerait évidemment par réciprocity, comme celle-ci, une combinaison de syzygies connues.

On pourrait chercher à obtenir encore d'autres syzygies gauches, en combinant celles que nous avons obtenues de manière à pouvoir diviser par un facteur commun, comme il a été procédé ci-dessus pour vérifier l'exactitude des syzygies (84) et (86) : je m'abstiendrai de poursuivre cette recherche, qui ne paraît présenter actuellement que peu d'intérêt au point de vue des applications géométriques, point de vue auquel je vais maintenant me placer.

II.

7. Avant d'aborder les applications géométriques qui font plus particulièrement l'objet de ce second Chapitre, il ne sera pas inutile de résumer en quelques mots les résultats purement algébriques obtenus dans le premier.

En partant des deux formes ternaires quadratiques s, s' , j'ai établi l'existence des dix-huit formations concomitantes qui constituent, avec s, s' et le covariant identique π , le système complet de ces deux formes ; savoir :

- 4 invariants, D, I, I', D' ;
- 2 covariants purs, w, t , d'ordres 2 et 3 ;
- 4 contrevariants, $\tau, \varphi, \tau', \tau$, de classes 2, 2, 2 et 3 ;
- 8 covariants mixtes... $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ linéo-linéaires } x, x', \\ 3 \text{ de classe 2 et d'ordre 1, } \beta, \beta', \gamma, \\ 3 \text{ de classe 1 et d'ordre 2, } \varepsilon, \varepsilon', \delta. \end{array} \right.$

J'ai calculé les expressions, en fonction des coefficients de s et de s' , des invariants, contrevariants et péninvariants (sources par rapport à x des covariants) purs et mixtes.

J'ai obtenu 67 syzygies distinctes reliant ces diverses formations, savoir : 36 qui fournissent les expressions des 8 carrés et des 28 produits deux à deux des 8 formes gauches $t, \tau, \gamma, \delta, \beta, \beta', \varepsilon, \varepsilon'$, en fonction des formes droites ; 28 syzygies gauches, c'est-à-dire dans chaque terme desquelles entre une forme gauche, et une seule ; enfin 3 syzygies, (18), (19), (50), où ne figurent que les formes droites.

J'ai enfin montré qu'outre la symétrie relative à l'échange des coefficients de s et s' , il se manifeste entre les diverses formations, dans toutes les syzygies, une symétrie croisée particulière, que j'ai désignée sous le nom de *réciprocité*.

Au point de vue géométrique, on peut regarder s et s' , égalées à zéro, comme les équations ponctuelles de deux coniques ; w et t comme celles d'une certaine conique et d'une certaine cubique dépendant des deux premières coniques ; τ, τ', φ comme les équations tangentielles de trois autres coniques dépendant toujours des deux premières ; τ comme celle d'une courbe de troisième classe ; enfin $x, x', \beta, \beta', \gamma, \delta, \varepsilon, \varepsilon'$ comme les équations de

huit connexes liés aux deux coniques fondamentales ; π représente le connexe identique.

A ce point de vue général, les syzygies obtenues dans le Chapitre I fourniraient évidemment le moyen d'étudier les particularités que peuvent présenter ces divers connexes. Toutefois, je n'entreprendrai pas ici cette étude, et je considérerai les formations mixtes comme représentant les équations tantôt ponctuelles, tantôt tangentielles, suivant le cas, de droites ou de coniques définies par une droite donnée ou par un point donné, dont les coordonnées y sont introduites de manière à n'y laisser subsister comme variables effectives que les variables de l'une ou de l'autre série.

8. La première question géométrique qui se présente naturellement est de former les équations tangentielles des coniques s, s' . La syzygie (29) fournit immédiatement la réponse. Soient en effet x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point quelconque M de la conique s , mais que nous supposerons n'être pas en même temps sur s' . En introduisant ces valeurs de x, y, z, s s'annule ; s' et w prennent des valeurs déterminées s'_1, w_1 ; $\partial, \alpha, \alpha', \pi$ deviennent des fonctions déterminées $\partial_1, \alpha_1, \alpha'_1, \pi_1$ des seules variables ξ, η, ζ , comme sont déjà σ, σ', φ . La syzygie (29) prend la forme

$$\partial_1^2 + s_1'^2 \sigma - \pi_1 [2 s'_1 \alpha_1 + (w_1 - 1 s'_1) \pi_1] = 0,$$

et elle exprime que l'équation tangentielle $\sigma = 0$ est exactement équivalente à celle-ci :

$$\partial_1^2 - \pi_1 \Pi_1,$$

où π_1 est le point M, ∂_1 et Π_1 sont deux autres points dépendant de la position de M. Mais cette dernière représente, comme on sait, une conique passant par les deux points π_1, Π_1 , les tangentes en ces points allant concourir au point ∂_1 ; donc M est sur σ , et, par suite, σ est l'équation tangentielle de s .

Par le même raisonnement, appliqué toujours à la syzygie (29), on voit que $\sigma + k\varphi + k^2\sigma'$ est l'équation tangentielle de $s + ks'$.

De même la syzygie (71), réciproque de (29), fait connaître l'équation ponctuelle de la conique $\sigma + k\sigma'$; car, soient ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées d'une tangente T de cette conique, elles annulent $\sigma + k\sigma'$, donnent à σ, σ', φ les valeurs déterminées $-k\sigma'_1, \sigma'_1,$

φ_1 et font de $\pi, \gamma, \alpha, \alpha'$ des fonctions déterminées $\pi_1, \gamma_1, \alpha_1, \alpha'_1$ des seules variables x, y, z . La syzygie (71) devient

$$\gamma_1^2 + \sigma_1^2(Ds + k\omega + k^2D's') - \pi_1\{2\sigma_1'(D\alpha'_1 - kD'\alpha_1) - \pi_1[DD'\varphi_1 + \sigma_1'(kID' - I'D)]\} =$$

et montre que l'équation de la conique $Ds + k\omega + k^2D's'$ peut se mettre sous la forme

$$\gamma_1^2 - \pi_1\Pi_1 = 0,$$

et que, par suite, cette conique est tangente à la droite π_1 , qui n'est autre que T. Donc $\sigma + k\sigma'$ a pour équation ponctuelle

$$Ds + k\omega + k^2D's'.$$

La signification géométrique des invariants D, D' est immédiatement donnée par les syzygies droites (48), (49).

Si dans (48), par exemple, on suppose $D = 0$, il vient

$$\alpha^2 = \sigma(Is' - \omega),$$

et, comme chacun des facteurs du second membre ne contient qu'une des séries de variables, chacun d'eux doit être un carré parfait; donc σ se réduit à deux points coïncidents. Mais, d'autre part, la syzygie (47) devient, pour $D = 0$,

$$\varepsilon^2 = (\omega - Is')[\alpha'^2 + s(D'\varphi - I'\sigma')];$$

$\omega - Is'$ étant carré parfait, comme nous venons de le voir, il faut qu'il en soit de même du second facteur du second membre. On peut donc, en désignant par θ une certaine forme linéaire par rapport aux deux séries de variables, poser

$$\alpha'^2 + s(D'\varphi - I'\sigma') = \theta^2$$

ou encore

$$s(D'\varphi - I'\sigma') = (\theta + \alpha')(\theta - \alpha').$$

Chacun des facteurs du premier membre ne contenant qu'une des séries de variables doit se décomposer en deux facteurs linéaires: donc s représente deux droites, et $D'\varphi - I'\sigma'$ deux points.

9. Proposons-nous d'exprimer, au moyen des formations que nous avons obtenues, les invariants, contrevariants et covariants purs ou mixtes du système où σ et σ' seraient les deux formes fondamentales, au lieu de s et de s' , le rôle des deux séries de

coordonnées se trouvant renversé. Nous savons déjà que Ds , w , $D's'$ correspondent respectivement dans cette hypothèse à σ , φ , σ' . Le covariant identique π n'est évidemment pas affecté. Désignons par D_1 , D'_1 , I_1 , I'_1 , α_1 , ... les formations qui correspondraient respectivement à D , D' , I , ... La syzygie (29) devant subsister entre ces nouvelles formations, on peut poser

$$\delta_1^2 = -D's'\sigma^2 - Ds\sigma'^2 + w\sigma\sigma' + 2\pi(\sigma\alpha'_1 + \sigma'\alpha_1) + \pi^2(-I_1\sigma' - I'_1\sigma + w_1).$$

Comparant avec (71), on conclut

$$\delta_1 = \pm \gamma, \quad \alpha'_1 = D'x, \quad \alpha_1 = D\alpha', \quad I_1 = I'D, \quad I'_1 = ID', \quad w_1 = DD'\varphi.$$

D'ailleurs, si l'on compare les coefficients de ξx^2 dans δ et de $x\xi^2$ dans γ [formules (18) et (26)], on voit que le second se déduit du premier en remplaçant g , h , g' , h' , par G , H , G' , H' , comme pour passer de s , s' à σ , σ' ; donc c'est bien $+\gamma$ qui correspond à δ .

Portons les valeurs ci-dessus dans la syzygie (47); elle donne

$$D^2\alpha'^2 = D^2(I'\sigma' - D'\varphi)s + D_1(D'\sigma s' - \sigma'w - 2D'\alpha\pi + ID'\pi^2).$$

Comparant avec (48), on obtient immédiatement

$$D_1 = D^2, \quad \text{d'où} \quad D'_1 = D'^2.$$

De même, la comparaison de la transformée de (34) avec (69) donne $\beta_1 = -D\varepsilon$, d'où $\beta'_1 = -D'\varepsilon'$. Par l'emploi des autres syzygies, on trouve de même successivement

$$\varepsilon_1 = -DD'\beta, \quad \varepsilon'_1 = -DD'\beta', \quad \gamma_1 = DD'\delta, \quad \varepsilon_1 = -DD'\tau, \quad \tau_1 = -DD't.$$

La symétrie dualistique entre les formations est donc représentée dans les formules par ce fait, que les syzygies restent invariables ou se changent les unes dans les autres, quand on y remplace respectivement

$$s, \quad w, \quad t, \quad D, \quad I, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon, \quad \sigma, \quad \varphi, \quad \tau$$

par

$$\tau, \quad DD'\varphi, \quad -DD'\tau, \quad D^2, \quad I'D, \quad D\alpha', \quad -D\varepsilon, \quad DD'\delta, \quad \gamma, \quad -DD'\beta, \\ Ds, \quad w, \quad -DD't,$$

et de même pour les lettres accentuées, en laissant π invariable.

En combinant la symétrie dualistique avec la symétrie relative aux accents, on retrouve, à des puissances près de D et D' , la

symétrie croisée spéciale que j'ai désignée sous le nom de *réciprocité*; toutefois cette dernière, dont la signification géométrique est ainsi rendue évidente, se présente plus simplement pour les applications que la superposition pure et simple des deux symétries géométriques.

10. La syzygie (29), considérée à un autre point de vue, fournit aussi la solution immédiate du problème suivant :

Former l'équation des coniques passant par les quatre points communs à s et s' , et tangentes à une droite donnée, qui ne passe par aucun de ces quatre points.

Soient ξ_1, τ_1, ζ_1 les coordonnées de la droite donnée, $\sigma_1, \sigma'_1, \varphi_1, \pi_1, \dots$ ce que deviennent $\sigma, \sigma', \varphi, \pi, \dots$ quand on y introduit ces valeurs pour ξ, τ, ζ . La syzygie (29) ne renferme plus que les variables ponctuelles x, y, z ; et elle nous apprend que les valeurs de ces variables, qui satisfont à la fois aux deux conditions

$$\pi_1 = 0, \quad \sigma'_1 s^2 - \varphi_1 s s' + \sigma_1 s'^2 = 0,$$

satisfont par cela même à la condition

$$\delta_1^2 = 0,$$

autrement dit, que les quatre points où la droite donnée π_1 coupe le système de deux coniques Γ, Γ' (passant par les points communs à s et s') que représente $\sigma'_1 s^2 - \varphi_1 s s' + \sigma_1 s'^2$, sont situés sur la conique δ_1 comptée deux fois, c'est-à-dire se réduisent à deux. Il faut donc ou que les deux coniques Γ, Γ' se coupent sur la droite donnée, ce qui est impossible puisqu'elles ont déjà quatre points communs, savoir ceux qui sont communs à s et s' , ou qu'elles soient tangentes à la droite donnée, auquel cas elles fournissent la solution du problème. Il y a donc deux coniques répondant à la question, et leur équation est

$$(33) \quad 2\sigma_1 s' - (\varphi_1 \pm \sqrt{\varphi_1^2 - 4\sigma_1 \tau_1})s = 0.$$

La syzygie (46) fournit la solution du problème analogue où il s'agit de trouver les coniques tangentes à une droite donnée et passant par les quatre points communs à s et w .

On peut, en effet, l'écrire, en tenant compte de (48),

$$\varepsilon^2 = (DD'\varphi - ID'\sigma - I'D\sigma')s^2 + (D\sigma' + I'\sigma)ws - \sigma w^2 + \pi E,$$

E étant un covariant mixte composé, de classe 1 et d'ordre 4.

Donc, par le même raisonnement que plus haut, l'équation des deux coniques demandées sera

$$(94) \quad 2\tau_1 w - [D\sigma'_1 + I'\tau_1 \pm \sqrt{(D'\sigma'_1 - I'\tau_1)^2 + 4D'\sigma_1(D\varphi_1 - I\tau_1)}]s = 0.$$

Pour les problèmes réciproques, où l'on demanderait les équations des coniques passant par un point donné et tangentes aux quatre tangentes communes à σ et σ' , ou à τ et φ , on peut recourir aux syzygies réciproques de (29) et de (47), c'est-à-dire aux syzygies (71) et (39); ou plus simplement transformer par réciprocity les formules (93) et (94), ce qui donne, pour le premier cas,

$$(95) \quad 2D's'_1\sigma - (w_1 \pm \sqrt{w_1^2 - 4DD's_1s_1})\sigma' = 0$$

et, pour le second,

$$(96) \quad 2Ds_1\varphi - [Ds'_1 + Is_1 \pm \sqrt{(Ds'_1 - Is_1)^2 + 4s_1(w_1 - I's_1)}]\sigma = 0.$$

Nous verrons plus loin que les formules (93) à (96) ne sont que des cas particuliers d'une formule donnant la solution d'un problème beaucoup plus général que ceux que nous venons de traiter.

11. Examinons maintenant de près la syzygie (76), dont j'ai signalé précédemment l'importance :

$$(76) \quad \begin{cases} I\tau = DD'(II' - DD')\pi^3 - D'(I^2 + I'D)x\pi^2 - D(I'^2 + ID')x'\pi^2 + 2ID'x^2\pi \\ \quad + (II' + 3DD')xx'\pi + 2I'Dx^2\pi - D'x^3 - I'x^2x' - Ixx'^2 - Dx'^3. \end{cases}$$

Le premier membre est le produit d'un covariant pur de troisième ordre par un contrevariant de troisième classe, et représente par conséquent le produit de l'équation ponctuelle d'une cubique par l'équation tangentielle d'une courbe de troisième classe. Le second membre est une forme ternaire cubique aux variables π , x , x' , avec tous les coefficients invariants.

Si donc on introduit dans π , x , x' , qui sont des covariants mixtes linéaires par rapport aux deux séries de variables, les

coordonnées ξ_1, η_1, ζ_1 d'une droite Δ qui ne soit pas tangente à la courbe τ , cette forme ternaire donnera l'équation de t exprimée au moyen de trois coordonnées ponctuelles, c'est-à-dire rapportée à trois droites dont l'une est la droite arbitraire Δ , et les deux autres dépendent, d'une manière déterminée, de la position de Δ . Si, au contraire, on introduit dans π, α, α' les coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un point arbitraire P non situé sur la cubique t , la même forme ternaire représentera en coordonnées tangentielles la courbe de troisième classe τ , un des sommets du triangle de référence étant le point P, et les deux autres étant déterminés par la position assignée à ce point.

Mais, si l'on calcule le covariant hessien de la forme ternaire cubique aux variables π, α, α' , on trouve sans peine, en employant les formules connues, qu'il se réduit, à un facteur numérique près, à la forme elle-même multipliée par l'invariant composé

$$(97) \quad E = 27 D^2 D'^2 - 12 I'^2 - 18 II' DD' + 4 I^2 D' + 4 I'^2 D.$$

Par conséquent, la forme ternaire en π, α, α' est toujours décomposable en trois facteurs linéaires par rapport à ces variables, qui elles-mêmes sont linéaires par rapport à x, y, z , comme par rapport à ξ, η, ζ . Donc le covariant t représente trois droites, et le contrevariant τ trois points. Si E est nul, deux au moins de ces droites et deux au moins de ces points coïncident, puisque la théorie des formes ternaires cubiques apprend que dans ce cas la forme en π, α, α' admet au moins un facteur carré.

Plaçons-nous pour le moment dans le cas général où E n'est pas nul. Soient ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées d'une droite quelconque Δ , assujettie *seulement* à ne pas passer par un des trois points que représente τ . Alors τ prend une valeur $\tau_1 \neq 0$, et les coordonnées des points d'intersection de la droite Δ avec les trois droites que représente t satisferont aux deux conditions

$$t = 0, \quad \pi = 0$$

et, par suite, en vertu de la syzygie (76), à celle-ci

$$(98) \quad D^2 x^3 + I' x^2 x' + I x x'^2 + D x'^3 = 0$$

(où il faut supposer qu'on ait remplacé, dans α et α' , ξ, η, ζ par ξ_1, η_1, ζ_1). Le discriminant de cette équation étant précisément E.

elle ne peut pas avoir de racines égales, quelle que soit la situation de Δ . Mais il est évident géométriquement que si Δ passait par un des sommets du triangle t , et seulement dans ce cas, deux racines de (98) devraient devenir égales : donc ces deux restrictions imposées à Δ , savoir de ne pas passer par un des trois points τ , ou de ne pas passer par un des sommets du triangle t , sont équivalentes, et les trois points τ ne sont autres que les trois sommets du triangle t . Cette corrélation bien connue est, comme on le voit, une conséquence immédiate de la syzygie (76).

Si l'une s des coniques fondamentales se décompose en deux droites, on a $D = 0$, et la syzygie (76) devient, comme il est aisé de le vérifier,

$$(99) \quad 4D'\tau = -\alpha[2D'(\alpha - 1\pi) + \alpha'(1' + \sqrt{1'^2 - 4DD'})] + 2D'(\alpha - 1\pi) - \alpha'(1' - \sqrt{1'^2 - 4DD'}).$$

Les trois facteurs linéaires sont ainsi mis en évidence, et l'on voit que α est toujours l'un d'eux, et que les deux autres coïncident si $1'^2 = 4DD'$, comme cela devait être d'après (97). Dans la même hypothèse ($D = 0$), nous avons déjà vu que

$$\alpha^2 = \sigma(1s' - w);$$

donc l'intersection τ des deux droites qui composent s est un des sommets du triangle t (ou τ), et la conique dégénérée en deux droites coïncidentes $1s' - w$ est un des côtés du même triangle.

Soient maintenant, dans le cas général où D et E ne sont pas nuls, ξ_1, τ_1, ζ_1 les coordonnées d'une droite Δ passant par un des trois points τ . Ces valeurs de ξ, τ, ζ , introduites dans toutes les formations, annulent τ et, par conséquent, le second membre de la syzygie (76), *quels que soient* x, y, z ; un des facteurs linéaires de la forme ternaire en α, α', π est donc nul identiquement, quels que soient x, y, z , pour ces valeurs particulières de ξ, τ, ζ ; donc enfin, la droite Δ ainsi choisie et les deux droites α_1, α'_1 , qui en dépendent, concourent en un même point. Réciproquement, si l'on détermine ξ, τ, ζ par la condition que les trois droites π, α, α' soient concourantes, l'une de ces trois quantités peut s'exprimer, quels que soient x, y, z , en fonction linéaire et homogène des deux autres; il en est donc de même des trois facteurs linéaires du second membre de (76), et, par suite, les trois droites qui constituent la cubique t passent par un

même point, savoir le point de concours de π , α et α' . Mais cette conséquence est inadmissible, puisque les trois points τ seraient alors coïncidents, bien que l'on eût $E \leq 0$. Il faut donc que l'un des trois facteurs s'annule identiquement, quels que soient x, y, z , pour les valeurs en question de ξ, τ, ζ ; dès lors, il en est de même du premier membre de (76), c'est-à-dire de τ ; et la droite Δ passe par l'un des trois points τ .

On doit donc retrouver τ en exprimant que $\pi + k\alpha + k'\alpha'$, où k et k' sont deux indéterminées, s'évanouit identiquement quels que soient x, y, z , ce qui fournit trois équations, et en éliminant k et k' entre ces trois équations. On est ainsi conduit à évaluer à zéro le déterminant

$$(100) \quad \begin{vmatrix} m\xi + n\tau + p\zeta & m'\xi + n'\tau + p'\zeta & \xi \\ m_1\xi + n_1\tau + p_1\zeta & m'_1\xi + n'_1\tau + p'_1\zeta & \tau \\ m_2\xi + n_2\tau + p_2\zeta & m'_2\xi + n'_2\tau + p'_2\zeta & \zeta \end{vmatrix},$$

où $m, n, p, \dots$ ont les valeurs suivantes

$$(101) \quad \begin{cases} m = Aa' + Gg' + Hh', & n = Ha' + Fg' + Bh', & p = Ga' + Cg' + Fh' \\ m_1 = Hb' + Ah' + Gf', & n_1 = Bb' + Ff' + Hh', & p_1 = Fb' + Gh' + Cf' \\ m_2 = Gc' + Hf' + Ag', & n_2 = Fc' + Bf' + Hg', & p_2 = Cc' + Gg' + Ff' \end{cases}$$

et $m', n', p', \dots$, les valeurs qui se déduisent des précédentes en permutant les lettres accentuées avec les lettres non accentuées. Le déterminant (100) a bien, en effet, le degré, la classe et le poids convenables pour être égal à τ .

Déterminons encore ξ, τ, ζ par la condition que α ne diffère de π que par un facteur constant k . Un raisonnement analogue à celui de tout à l'heure montrerait que α' doit aussi être égal à $k'\pi$, k' étant un autre facteur constant, et que τ doit être nul. Mais, en outre, les syzygies (57), (58), (63) montrent que $\sigma t, \varphi t, \sigma' t$ deviennent divisibles par π , c'est-à-dire, puisque, dans ces expressions, t seul contient les variables x, y, z , que t devient divisible par π . Donc π , ou la droite choisie, est un des côtés du triangle t . De là une méthode nouvelle pour trouver les équations des trois côtés du triangle t , ce qui équivaut, comme on sait, à la réduction simultanée de s et s' à la forme canonique (somme de trois

carrés). On a

$$\pi = \xi x + \tau_1 y + \zeta z.$$

$$\alpha = (m\xi + n\tau_1 + p\zeta)x + (m_1\xi + n_1\tau_1 + p_1\zeta)y + (m_2\xi + n_2\tau_1 + p_2\zeta)z,$$

$m, n, p, \dots$ ayant les valeurs (101). Pour que $u = k\pi$ identiquement par rapport à x, y, z , il faut poser

$$(102) \quad \begin{cases} (m - k)\xi + n\tau_1 + p\zeta = 0, \\ m_1\xi + (n_1 - k)\tau_1 + p_1\zeta = 0, \\ m_2\xi + n_2\tau_1 + (p_2 - k)\zeta = 0. \end{cases}$$

Pour que ces trois équations soient satisfaites simultanément par un même système de valeurs de ξ, τ_1, ζ , il faut que l'on ait

$$(103) \quad \begin{vmatrix} m - k & n & p \\ m_1 & n_1 - k & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 - k \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui détermine k par une équation cubique. Soient k_1, k_2, k_3 , les trois racines de cette équation; en les reportant successivement dans les équations (102), on aura trois systèmes de valeurs (ξ_i, τ_i, ζ_i) ($i = 1, 2, 3$); et

$$(104) \quad \xi_i x + \tau_i y + \zeta_i z = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

donnera les équations des trois côtés du triangle t . Les mêmes racines k_1, k_2, k_3 , introduites dans les trois équations

$$\begin{aligned} (m - k)x + m_1 y + m_2 z &= 0, \\ nx + (n_1 - k)y + n_2 z &= 0, \\ px + p_1 y + (p_2 - k)z &= 0, \end{aligned}$$

donneraient d'ailleurs évidemment les trois systèmes de valeurs (x_i, y_i, z_i) ($i = 1, 2, 3$), qui, portés dans

$$x_i \xi + y_i \tau_1 + z_i \zeta = 0,$$

fourniraient les équations tangentielles des trois sommets de τ .

Comme application, soient

$$\begin{aligned} s &= 3x^2 + 9y^2 + 4yz - 2xz - 6xy, \\ s' &= 5x^2 + 8y^2 - 2z^2 - 6xz - 14xy. \end{aligned}$$

Les formules (15) donnent

$$\begin{aligned} A = -4, \quad B = -1, \quad C = 18, \quad F = -3, \quad G = 3, \quad H = -2. \\ A' = -16, \quad B' = -19, \quad C' = -9, \quad F' = 21, \quad G' = 24, \quad H' = -14. \end{aligned}$$

et les formules (101)

$$\begin{aligned} m = -15, \quad n = 6, \quad p = -18, \quad m_1 = 12, \quad n_1 = 6, \quad p_1 = -45. \\ m_2 = 6, \quad n_2 = 12, \quad p_2 = -45. \end{aligned}$$

L'équation (103) devient

$$k^3 - 54k^2 - 891k - 4374 = 0.$$

et ses trois racines sont $-9, -18, -27$. Les équations (102) donnent alors pour ξ, τ, ζ les trois systèmes de valeurs $(0, 3, 1)$; $(-2, 1, 0)$; $(1, 1, 1)$; ce qui donne enfin, pour les trois côtés du triangle t ,

$$3y + z = 0, \quad 2x - y = 0, \quad x + y + z = 0.$$

12. La syzygie (76), que nous venons d'étudier, nous a donné l'équation de t rapportée, en coordonnées trilinéaires, à trois axes dont un est arbitraire (avec cette seule condition de ne pas passer par l'un des sommets de τ); et aussi l'équation de τ rapportée, en coordonnées tangentielles, à trois points dont un est arbitraire (avec cette seule condition de ne pas être sur l'un des côtés de t).

Les syzygies (77), (78), (79), (80), (81) et (82) nous donnent les équations ponctuelles de $\delta, \beta, \beta', \epsilon, \epsilon', \gamma$, rapportées aux mêmes coordonnées que t dans la syzygie (76); avec cette seule différence que les coefficients ne sont plus des invariants, mais des contrevariants, et que leurs valeurs dépendent, par conséquent, de la position de la droite arbitraire choisie pour l'un des côtés du triangle de référence. De même, les syzygies (33), (40), (41), (42), (43), (65) donnent les équations tangentielles de $\delta, \beta, \beta', \epsilon, \epsilon', \gamma$, rapportées aux mêmes coordonnées que τ dans la syzygie (76), avec cette seule différence que les coefficients sont des covariants purs, dont les valeurs dépendent de la position du point arbitraire choisi pour l'un des sommets du triangle de référence. Dans tous les cas, les coordonnées sont les trois covariants mixtes linéo-linéaires π, α, α' .

Il est facile d'obtenir des expressions analogues pour les équations

tions ponctuelles de s, s', w , et tangentielles de σ, σ', φ , rapportées à ces mêmes coordonnées. Si l'on multiplie les syzygies (30), (31), (87) par τ , et qu'on y remplace $\tau\delta, \tau\beta, \tau\beta', \tau\epsilon, \tau\epsilon', \tau\gamma$ par leurs valeurs tirées des syzygies (77) à (82); ou encore si l'on tire des trois équations (48), (49), (50) les expressions de s, s', w , considérées comme seules inconnues, on arrive, en remarquant que le déterminant de (48), (49) et (50) est, dans ce calcul, égal à τ^2 , en vertu de (83), aux trois syzygies suivantes

$$\begin{aligned}
 (105) \quad & \left\{ \begin{aligned} \tau^2 s &= \theta \alpha^2 + 2\theta' \alpha \alpha' + \Lambda \alpha'^2 + 2(D\theta - I\theta') \alpha' \pi \\ &+ 2(D'\Lambda - I'\theta') \alpha \pi + [(II' + DD')\theta' - I'D\theta - ID'\Lambda] \pi^2, \end{aligned} \right. \\
 (106) \quad & \left\{ \begin{aligned} \tau^2 s' &= \theta' \alpha'^2 + 2\theta \alpha \alpha' + \Lambda' \alpha^2 + 2(D'\theta' - I'\theta) \alpha \pi \\ &+ 2(D\Lambda' - I\theta) \alpha' \pi + [(II' + DD')\theta - ID'\theta' - I'D\Lambda'] \pi^2, \end{aligned} \right. \\
 (107) \quad & \left\{ \begin{aligned} \tau^2 w &= (I'\theta - D'\theta') \alpha^2 + 2(I\theta - D\Lambda') \alpha \alpha' + (I\theta' - D\theta) \alpha'^2 \\ &+ 2[(ID' - I'^2)\theta' - DD'\theta + I'D'\Lambda] \alpha \pi \\ &+ 2[(I'D - I^2)\theta - DD'\theta' + ID\Lambda'] \alpha' \pi \\ &+ [(I^2 I' + 2IDD' - I'^2 D)\theta + D'(I'D - I^2)\theta' - (II' + DD')D\Lambda'] \pi^2, \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

dans lesquelles j'ai posé, pour abréger,

$$(108) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta &= I'\sigma\sigma' - D\sigma'^2 - D'\sigma\varphi, \\ \theta' &= I\sigma\sigma' - D'\sigma^2 - D\sigma'\varphi, \\ \Lambda &= D\sigma\sigma' - I'\sigma^2 + I\sigma\varphi - D\varphi^2, \\ \Lambda' &= D'\sigma\sigma' - I\sigma'^2 + I'\sigma'\varphi - D'\varphi^2, \end{aligned} \right.$$

ce qui entraîne les relations

$$(109) \quad \left\{ \begin{aligned} I\theta - D\Lambda' &= I'\theta' - D'\Lambda, \\ \theta\varphi - \theta'\sigma' &= \Lambda'\sigma, \\ \theta'\varphi - \theta\sigma &= \Lambda\sigma', \end{aligned} \right.$$

et aussi les suivantes, d'une grande importance,

$$(110) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta\Lambda - \theta'^2 &= \tau^2\sigma, \\ \theta'\Lambda' - \theta^2 &= \tau^2\sigma', \\ \Lambda\Lambda' - \theta\theta' &= \tau^2\varphi. \end{aligned} \right.$$

Les syzygies (105), (106), (107) peuvent être considérées comme donnant pour s, s', w , des expressions canoniques éminemment commodes pour résoudre, avec l'aide des relations (109) et (110), les problèmes dans lesquels il s'agit de trouver l'équa-

tion tangentielle d'un lieu quelconque dépendant des deux coniques fondamentales et d'une droite variable.

Tout d'abord, les intersections d'une droite arbitraire π avec s et s' sont évidemment données par les deux équations

$$\begin{aligned}\theta x^2 + 2\theta' x x' + \Lambda x'^2 &= 0, \\ \Lambda' x^2 + 2\theta x x' + \theta' x'^2 &= 0,\end{aligned}$$

dont les discriminants sont $\tau^2\sigma$ et $\tau'^2\sigma'$, comme cela devait être, l'invariant commun $\tau^2\varphi$, et le résultant $\tau^4(\varphi^2 - 4\sigma\sigma')$. Donc $\varphi^2 - 4\sigma\sigma'$ est l'équation tangentielle des quatre points communs à s et s' , et φ , d'après la signification connue de l'invariant binaire, est l'enveloppe des droites coupées harmoniquement par s et s' .

Proposons-nous de former l'équation de l'enveloppe des droites coupées harmoniquement par les deux coniques covariantes

$$\lambda w + \mu s + \nu s', \quad \lambda' w + \mu' s + \nu' s',$$

qui dépendent chacune de deux arbitraires. Les intersections de ces coniques avec une droite quelconque π seront données, en utilisant les formules (105) à (107), par l'évanouissement simultané de la forme binaire

$$\begin{aligned}[\lambda(I'\theta - D'\theta') + \mu\theta + \nu\Lambda']x^2 \\ + 2[\lambda(I\theta - D\Lambda') + \mu\theta' + \nu\theta]xx' + [\lambda(I\theta' - D\theta) + \mu\Lambda + \nu\theta']x'^2,\end{aligned}$$

et de celle qui s'en déduirait en remplaçant λ, μ, ν par λ', μ', ν' . Il suffit donc d'égaliser à zéro l'invariant commun de ces deux formes, ce qui donne, en tenant compte des relations (109) et (110), et divisant par τ^2 , pour l'équation demandée

$$(111) \quad 0 = \begin{cases} 2\lambda\lambda'(I'D\sigma' + ID'\sigma - DD'\varphi) + 2\mu\mu'\sigma + 2\nu\nu'\sigma' + (\lambda\mu' + \lambda'\mu)(I'\sigma + D\sigma') \\ + (\lambda\nu' + \lambda'\nu)(I\sigma' + D'\sigma) + (\mu\nu' + \mu'\nu)\varphi. \end{cases}$$

C'est donc une conique covariante. Au moyen de (111), on peut résoudre des questions du genre de celle-ci :

Étant donnée une conique V du faisceau $s + ks'$, il existe une autre conique V', de la forme $\lambda'w + \mu's + \nu's'$, qui, réunie à V, coupe harmoniquement toutes les tangentes de s. Trouver l'enveloppe de V'.

Il suffit évidemment d'exprimer que l'une des coniques dont

on part dans le problème précédent se réduit à $s + ks'$, et que la conique représentée par (111) se réduit à σ , ce qui donne cinq relations entre les six indéterminées, savoir

$$\begin{aligned} \lambda = 0, \quad \mu = 1, \quad \nu = k, \\ 2k\nu' + D\lambda' + Ik\lambda' = 0, \quad \nu' + k\mu' = 0. \end{aligned}$$

On satisfait à ces conditions en prenant

$$\lambda' = 2k^2, \quad \mu' = D + Ik, \quad \nu' = -k(D + Ik);$$

d'où, pour l'équation de la seconde conique initiale,

$$k^2(2\omega - Is') + k(Is - Ds') + Ds = 0,$$

et pour celle de l'enveloppe cherchée

$$(112) \quad (Is + Ds')^2 - 8D\omega s = 0;$$

c'est donc une courbe du quatrième ordre.

Pour obtenir l'équation tangentielle de la conique covariante la plus générale exprimée en coordonnées ponctuelles, savoir :

$$\lambda\omega + \mu s + \nu s',$$

il suffit évidemment de faire dans la formule (111) $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$, $\nu' = \nu$; ce qui donne

$$(113) \quad \begin{cases} \lambda^2(I'D\sigma' + ID'\sigma - DD'\varphi) + \mu^2\sigma \\ + \nu^2\sigma' + \lambda\mu(I'\sigma + D\sigma') + \lambda\nu(I\sigma' + D'\sigma) + \mu\nu\varphi = 0. \end{cases}$$

Le discriminant du premier membre de (113), considéré comme forme quadratique ternaire en λ , μ , ν , se réduit à $\frac{1}{3}\tau^2$.

13. Comme cas particulier des équations (105), (106), (107), supposons $\Theta = \Theta' = 0$, ce qui équivaut, d'après (110), à supposer $\sigma = \sigma' = 0$, c'est-à-dire à prendre pour l'un des côtés du triangle de référence une des quatre tangentes communes à s et s' . Alors les équations dont il s'agit deviennent, puisque (83) et (108) donnent, dans ce cas,

$$(114) \quad \begin{aligned} \tau^2 &= DD'\varphi^2, \quad \Lambda = -D\varphi^2, \quad \Lambda' = -D'\varphi^2, \\ \begin{cases} D'\varphi s = -\alpha'^2 - 2D'\alpha\pi + ID'\pi^2, \\ D\varphi s' = -\alpha^2 - 2D\alpha'\pi + I'D\pi^2, \\ \varphi\omega = -2\alpha\alpha' - 2I'\alpha\pi - 2I\alpha'\pi + (II' + DD')\pi^2, \end{cases} \end{aligned}$$

comme on aurait pu d'ailleurs le déduire immédiatement des syzygies (48), (49), (50).

Les formules (114) donnent les équations de s , s' , w sous une forme éminemment commode pour les problèmes où il s'agit de calculer des invariants, puisque tous les coefficients y sont déjà des invariants.

Elles montrent, par exemple, que, pour $D = 0$, s se décompose en deux droites $\alpha' \pm \pi \sqrt{DD'}$, et w en deux droites, π et $2\alpha' - I'\pi$, tandis que α est identiquement nul; que, pour $II' - DD' = 0$, w se décompose en deux droites, $\alpha - I\pi$, $\alpha' - I'\pi$. Elles montrent encore, dans le cas général, que si M , M' sont les points de contact respectifs de s et de s' avec la droite π , α passe par M' et α' par M ; si N et N' sont les seconds points d'intersection de α' avec s , et de α avec s' , la tangente à s en N est $I\pi - 2\alpha$ et passe par M' , la tangente à s' en N' est $I'\pi - 2\alpha'$ et passe par M ; de telle sorte que M est le pôle de α par rapport à s' , et M' le pôle de α' par rapport à s . La signification géométrique des invariants I , I' apparaît alors clairement : si $I = 0$, par exemple, α est tangente à s en N , les trois points M' , N , N' sont en ligne droite, et l'on a ce théorème :

Si l'invariant I des deux coniques s et s' est nul, la polaire, par rapport à s' , de l'un quelconque des quatre points de contact de s avec les tangentes communes à s et s' sera tangente à s .

Au point de vue dualistique, I' correspond à I , comme nous l'avons vu; on peut donc dire encore :

Si l'invariant I des deux coniques s et s' est nul, le pôle, par rapport à s , de la tangente à s' en l'un quelconque des quatre points communs à s et s' sera situé sur s' .

14. Comme exemple d'un calcul d'invariants, proposons-nous de former le discriminant de la conique covariante la plus générale

$$V = \lambda w + \mu s + \nu s'.$$

En prenant s , s' , w sous la forme donnée par (114), V peut

s'écrire

$$\varphi V = [(II' + DD')\lambda + I\mu + I'\nu]\pi^2 - \frac{\nu}{D} \alpha^2 - \frac{\mu}{D'} \alpha'^2 \\ + 2\lambda\alpha\alpha' - 2(I'\lambda + \mu)\alpha\pi - 2(I\lambda + \nu)\alpha'\pi.$$

Et dès lors, en appliquant la formule (6), on trouve, pour le discriminant $D_{\lambda\mu\nu}$ de V , l'expression

$$(115) \quad \begin{cases} D_{\lambda\mu\nu} = DD'(II' - DD')\lambda^3 + D(I^2 + ID')\lambda^2\mu + D'(I^2 + I'D)\lambda^2\nu + 2I'D\lambda\mu^2 \\ \quad + (II' + 3DD')\lambda\mu\nu + 2ID'\lambda\nu^2 + D\mu^3 + I\mu^2\nu + I'\mu\nu^2 + D'\nu^3. \end{cases}$$

Cette expression de $D_{\lambda\mu\nu}$ devient identique à celle de $t\tau$ [syzygie (76)], si l'on y remplace λ, μ, ν par $\pi, -\alpha', -\alpha$. On en conclut que $D_{\lambda\mu\nu}$ est décomposable en trois facteurs linéaires par rapport à λ, μ, ν , et que les systèmes de valeurs de λ, μ, ν , pour lesquels V se décompose en deux droites, sont précisément les systèmes de valeurs de $\pi, -\alpha', -\alpha$ qui annulent $t\tau$. En d'autres termes, si l'on introduit dans π, α, α' les coordonnées tangentielles d'une droite arbitraire Δ et les coordonnées ponctuelles d'un point M appartenant à l'un des côtés du triangle t (ou encore celles d'un point M arbitraire et d'une droite Δ passant par un des sommets de t) la conique $V = \pi\nu - \alpha's - \alpha s'$, que je dirai être *associée* à Δ et M (ou à M et Δ), dégénérera en deux droites. Si, en particulier, Δ restant arbitraire, on prend pour M un des trois points où Δ coupe les côtés de t , on aura $\pi = 0$, et l'on obtiendra les trois coniques du faisceau $\alpha's + \alpha s'$ qui dégénèrent en deux droites, c'est-à-dire les couples de cordes d'intersection de s et s' ; les valeurs correspondantes de α et α' satisfont, comme le montre d'ailleurs immédiatement la formule (115), à l'équation déjà obtenue (98)

$$D\alpha^3 + I\alpha'^2\alpha + I'\alpha'\alpha^2 + D'\alpha^3 = 0.$$

Si, Δ restant arbitraire, on prend pour M un des sommets de t , il est naturel de prévoir que V dégénérera en deux droites coïncidentes : nous allons voir que c'est en effet ce qui a lieu.

Désignons par ψ la fonction de λ, μ, ν qui constitue le second membre de (115), et par ψ_1, ψ_2, ψ_3 ses trois facteurs linéaires par rapport à λ, μ, ν . Posons en outre

$$(116) \quad \begin{cases} \varphi = ID'\lambda^2 + \mu^2 + I'\lambda\mu + I'\lambda\nu, \\ \varphi' = I'D\lambda^2 + \nu^2 + I\lambda\nu + D\lambda\mu, \\ \chi = \pi\nu - DD'\lambda^2. \end{cases}$$

ce qui permet, en vertu de (113), d'écrire ainsi l'équation tangentielle de V :

$$(117) \quad \rho\sigma + \rho'\sigma' + \chi\varphi = 0.$$

On vérifie aisément les trois relations

$$(118) \quad \begin{cases} \frac{d\psi}{d\lambda} = 2I'D\rho + 2ID'\rho' + (II' + 3DD')\chi, \\ \frac{d\psi}{d\mu} = 3D\rho + I'\rho' + 2I\chi, \\ \frac{d\psi}{d\nu} = I\rho + 3D'\rho' + 2I'\chi. \end{cases}$$

Lorsqu'un système de valeurs de λ, μ, ν annule un des facteurs de ψ, ψ_3 par exemple, les valeurs des trois dérivées $\frac{d\psi}{d\lambda}, \frac{d\psi}{d\mu}, \frac{d\psi}{d\nu}$ deviennent évidemment égales à la valeur du produit $\psi_1\psi_2$ multipliée par les valeurs de certains coefficients qui sont des fonctions irrationnelles des seuls invariants. Il en est donc de même, en vertu de (118), des valeurs de ρ, ρ', χ ; par suite, l'équation (117), en supprimant le facteur $\psi_1\psi_2$ commun à ρ, ρ', χ , prend la forme

$$\rho_1\sigma + \rho'_1\sigma' + \chi_1\varphi = 0,$$

où les valeurs de ρ_1, ρ'_1, χ_1 ne dépendent pas de celles de λ, μ, ν , mais uniquement de celles des invariants; seulement ces trois coefficients ont des valeurs numériques différentes, suivant que c'est l'un ou l'autre des trois facteurs ψ_1, ψ_2, ψ_3 qui s'annule. Donc l'équation tangentielle reste la même, quelle que soit Δ , pour tout point M situé sur un même côté du triangle t ; et, comme elle représente le carré de l'équation tangentielle du point double de la conique dégénérée V, on en conclut que ce point double occupe une position fixe.

Si M coïncide avec un des sommets de t , deux des facteurs de ψ s'annulent; il en est donc de même de $\frac{d\psi}{d\lambda}, \frac{d\psi}{d\mu}, \frac{d\psi}{d\nu}$ et, par suite, aussi de ρ, ρ', χ ⁽¹⁾; l'équation (117) est donc satisfaite iden-

(¹) A moins que le déterminant E des équations (118) ne soit nul; ce cas sera discuté plus tard.

tiquement, ce qui signifie que la conique associée à Δ et M dégénère en deux droites coïncidentes ; et réciproquement.

Il existe donc trois systèmes de valeurs de π , α , α' qui rendent $\pi w - \alpha' s - \alpha s'$ un carré parfait, et il n'en existe que trois.

Mais, d'autre part, le second membre de la syzygie (13), considéré comme forme ternaire cubique aux variables φ , s , s' , se décompose en trois facteurs, car son hessien n'en diffère que par le coefficient $-\frac{1}{108}E$. Chacun de ces facteurs représente donc, soit le carré d'un des côtés de t , soit le produit de deux côtés. Mais cette seconde hypothèse est inadmissible, car un même côté de t entrerait alors en facteur dans deux expressions différentes

$$\lambda_1 w + \mu_1 s + \nu_1 s', \quad \lambda_2 w + \mu_2 s + \nu_2 s',$$

et, par suite, dans leur combinaison

$$(\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2) s + (\lambda_2 \nu_1 - \lambda_1 \nu_2) s',$$

et passerait par deux des points communs à s et s' ; tandis que la syzygie (13) montre que t^2 ne peut pas s'annuler pour $s = s' = 0$, à moins que w ne s'annule aussi, ce qui entraîne évidemment une relation invariante (nous verrons plus loin que cette relation est $E = 0$). Donc, si t_1 , t_2 , t_3 sont les trois côtés du triangle t , les trois coniques de la forme $\lambda w + \mu s + \nu s'$ qui se réduisent à deux droites coïncidentes sont précisément les facteurs du second membre de la syzygie (13); et ces trois droites doubles sont précisément t_1 , t_2 , t_3 .

Donc aussi on peut inversement mettre s , s' , w sous la forme suivante

$$(119) \quad \begin{cases} w = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2, \\ s = k_1 t_1^2 + k_2 t_2^2 + k_3 t_3^2, \\ s' = k'_1 t_1^2 + k'_2 t_2^2 + k'_3 t_3^2, \end{cases}$$

avec la relation

$$(120) \quad t^2 = \theta t_1^2 t_2^2 t_3^2,$$

où θ est un coefficient numérique; et une conique quelconque du réseau, $V = \pi w - \alpha' s - \alpha s'$, sous la forme analogue

$$(121) \quad \begin{cases} V = (\pi - k_1 \alpha' - k'_1 \alpha) t_1^2 \\ \quad + (\pi - k_2 \alpha' - k'_2 \alpha) t_2^2 + (\pi - k_3 \alpha' - k'_3 \alpha) t_3^2. \end{cases}$$

Il est clair que, pour que V dégénère en deux droites, il faut et il suffit que le coefficient de l'un des trois carrés s'évanouisse, auquel cas V se décomposera en deux droites se coupant en un des sommets de t : ce qui concorde bien avec le résultat obtenu ci-dessus relativement à l'invariabilité du point de concours des deux droites composant une conique dégénérée ; et aussi avec un des résultats obtenus au n° 11, savoir que l'on retrouve les trois points τ en déterminant ξ, η, ζ par la condition que

$$\pi - kx - k'x'$$

s'annule quels que soient x, y, z (ou, en vertu de la réciprocity, les trois côtés du triangle t en déterminant x, y, z par la condition que cette même expression s'annule quels que soient ξ, η, ζ). On voit de plus que les trois systèmes de valeurs de k et de k' que fournit ce dernier calcul sont précisément les coefficients des trois carrés dans s et s' ramenés à la forme canonique (119).

Les coefficients des trois carrés dans le second membre de (121) étant précisément les trois facteurs linéaires en π, α, α' , dont le produit est égal à $t\tau$ en vertu de la syzygie (76), et dont chacun, égalé à zéro, représente un des côtés du triangle t ou le sommet opposé, la formule (121) peut s'écrire

$$(122) \quad V = (t\tau)_1 t_1^2 + (t\tau)_2 t_2^2 + (t\tau)_3 t_3^2,$$

en désignant par $(t\tau)_1, (t\tau)_2, (t\tau)_3$ les valeurs que prennent les trois facteurs linéaires de $t\tau$ quand on y introduit les valeurs $x_1, y_1, z_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$, qui définissent le point M et la droite Δ auxquels V est associée.

15. L'analogie signalée plus haut entre les formules (115) et (76) peut être utilisée à un autre point de vue. Puisque le discriminant $D_{\lambda\mu\nu}$ peut être écrit sous forme de déterminant, il en est de même de $t\tau$. On obtient ainsi

$$(123) \quad t\tau = \begin{vmatrix} (H' + DD')\pi - I'\alpha - I\alpha' & \alpha' - I'\pi & \alpha - I\pi \\ D(\alpha' - I'\pi) & \alpha & D\pi \\ D'(\alpha - I\pi) & D'\pi & \alpha' \end{vmatrix};$$

$t\tau$ est donc le résultant de trois équations linéaires, que l'on peut, en se reportant aux relations (114), écrire sous l'une des deux

formes suivantes :

$$(124) \quad \begin{cases} \pi_1 \frac{dw}{d\pi} + \alpha_1 \frac{dw}{d\alpha} + \alpha'_1 \frac{dw}{d\alpha'} = 0, \\ \pi_1 \frac{ds'}{d\pi} + \alpha_1 \frac{ds'}{d\alpha} + \alpha'_1 \frac{ds'}{d\alpha'} = 0, \\ \pi_1 \frac{ds}{d\pi} + \alpha_1 \frac{ds}{d\alpha} + \alpha'_1 \frac{ds}{d\alpha'} = 0 \end{cases}$$

ou

$$(125) \quad \begin{cases} \pi_1 \frac{dw}{d\pi} - \alpha_1 \frac{ds'}{d\pi} - \alpha'_1 \frac{ds}{d\pi} = 0, \\ \pi_1 \frac{dw}{d\alpha} - \alpha_1 \frac{ds'}{d\alpha} - \alpha'_1 \frac{ds}{d\alpha} = 0, \\ \pi_1 \frac{dw}{d\alpha'} - \alpha_1 \frac{ds'}{d\alpha'} - \alpha'_1 \frac{ds}{d\alpha'} = 0. \end{cases}$$

Le groupe d'équations (125) n'est autre que

$$\frac{dV}{d\pi} = 0, \quad \frac{dV}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dV}{d\alpha'} = 0,$$

en désignant toujours par V la conique $\pi_1 w - \alpha_1 s' - \alpha'_1 s$; il exprime donc que t est le lieu des points dont les coordonnées, introduites dans V , font dégénérer cette conique en deux droites, et aussi [à cause de la parfaite symétrie des équations (125) par rapport à π et π_1 , α et α_1 , α' et α'_1] le lieu des points doubles de ces coniques dégénérées, ce que nous savions déjà.

Le groupe (124) exprime que t est le lieu des points dont les polaires par rapport à w , s , s' sont concourantes, et le lieu des points de concours de ces polaires.

D'ailleurs, si l'on écrit explicitement les équations (124), ou les équations (125), en affectant l'indice 1 à l'un des points qui y figurent symétriquement, l'indice 2 à l'autre, on obtient dans les deux cas les trois mêmes relations entre les coordonnées de ces deux points, savoir :

$$(126) \quad \begin{cases} (II' + DD')\pi_1\pi_2 - I(\pi_1\alpha'_2 + \pi_2\alpha'_1) \\ \quad - I'(\pi_1\alpha_2 + \pi_2\alpha_1) + (\alpha_1\alpha'_2 + \alpha_2\alpha'_1) = 0, \\ \alpha_1\alpha_2 + D(\pi_1\alpha'_2 + \pi_2\alpha'_1) - I'D\pi_1\pi_2 = 0, \\ \alpha'_1\alpha'_2 + D'(\pi_1\alpha_2 + \pi_2\alpha_1) - ID'\pi_1\pi_2 = 0. \end{cases}$$

Si, dans ces relations, on introduit les coordonnées ξ_1, τ_1, ζ_1 d'une droite quelconque, puis dans $\pi_1, \alpha_1, \alpha'_1$ les coordonnées

d'un point M pris arbitrairement sur un des côtés de t , elles donneront pour $\pi_2, \alpha_2, \alpha'_2$ les valeurs qui conviennent au sommet opposé; et, si M est un des sommets, elles donneront entre $\pi_2, \alpha_2, \alpha'_2$ une seule relation, celle qui convient au côté opposé.

Ainsi la polaire, par rapport à une quelconque V des coniques covariantes, d'un point quelconque pris sur un des côtés du triangle t passe par le sommet opposé, et la polaire d'un sommet est le côté opposé, ce qui constitue la propriété la plus importante du triangle t , comme il est bien connu.

16. De même que nous avons obtenu les expressions [formules (105) à (107)] de $\tau^2 s, \tau^2 s', \tau^2 w$ en fonction des trois variables π, α, α' , avec des coefficients où n'entrent que les invariants et contrevariants, de même il est facile d'obtenir les expressions de $t^2 \sigma, t^2 \sigma', t^2 \varphi$ en fonction des mêmes variables, avec des coefficients où n'entrent que les invariants et covariants purs. Il est d'ailleurs inutile de faire le calcul complet en partant soit des syzygies (57), (63), (58), multipliées par t , soit des syzygies (48), (49), (50), résolues par rapport à σ, σ', φ : il suffit de transformer, en appliquant la loi de réciprocité, les formules (105) et suivantes. Voici les formules auxquelles on est ainsi conduit

$$(127) \quad \left\{ \begin{array}{l} t^2 \sigma = L' x^2 + 2 DT x x' + DT' x'^2 + 2 D(D'T' - I'T) x \pi \\ \quad + 2 D(L' - IT) x' \pi + D[(H' + DD')T - ID'T' - I'L] \pi^2, \end{array} \right.$$

$$(128) \quad \left\{ \begin{array}{l} t^2 \sigma' = D'T x^2 + 2 D'T' x x' + L x'^2 + 2 D'(L - I'T') x \pi \\ \quad + 2 D'(DT - IT') x' \pi + D'[(H' + DD')T' - I'DT - IL] \pi^2, \end{array} \right.$$

$$(129) \quad \left\{ \begin{array}{l} t^2 \varphi = (I'T - D'T') x^2 + 2 (IT - L') x x' + (IT' - DT) x'^2 \\ \quad + 2 [(ID' - I^2)T' - DD'T + I'L] x \pi \\ \quad + 2 [(I'D - I^2)T - DD'T' + IL] x' \pi \\ \quad + [(I^2 I' + 2 IDI' - I^2 D)T + D'(I'D - I^2)T' - (H' + DD')L] \pi^2, \end{array} \right.$$

en posant pour abréger

$$(130) \quad \left\{ \begin{array}{l} T = I'ss' - D's^2 - w s', \\ T' = I'ss' - D s'^2 - w s, \\ L = DI'ss' - I'D s'^2 + I s' w - w^2, \\ L' = DI'ss' - ID s^2 + I s w - w^2, \end{array} \right.$$

ce qui entraîne les relations

$$(131) \quad \begin{cases} IT - L' = I'T - L, \\ T'w - D'T's = L's, \\ T'w - DT's' = Ls, \end{cases}$$

et aussi les relations importantes

$$(132) \quad \begin{cases} TL - D'T^2 = t^2 s', \\ T'L' - DT^2 = t^2 s, \\ LL' - DD'TT' = t^2 w. \end{cases}$$

Les formules (127) à (132) permettent de résoudre les problèmes réciproques de ceux auxquels s'appliquaient les formules (105) à (110). On trouve notamment ainsi :

1° Que le lieu des sommets des faisceaux harmoniques tangents aux deux coniques $\lambda\varphi + \mu\sigma + \nu\sigma'$, $\lambda'\varphi + \mu'\sigma + \nu'\sigma'$ a pour équation ponctuelle

$$(133) \quad \begin{cases} 0 = 2\lambda\lambda'(Is' + I's - w) + 2\mu\mu'Ds \\ \quad + 2\nu\nu'D's' + (\lambda\mu' + \lambda'\mu)(Is + Ds') \\ \quad + (\lambda\nu' + \lambda'\nu)(I's' + D's) + (\mu\nu' + \mu'\nu)w; \end{cases}$$

2° Que l'équation ponctuelle de la conique contrevariante la plus générale $\lambda\varphi + \mu\sigma + \nu\sigma'$ est

$$(134) \quad \begin{cases} \lambda^2(Is' + I's - w) + \mu^2Ds \\ \quad + \nu^2D's' + \lambda\mu(Is + Ds') + \lambda\nu(I's' + D's) + \mu\nu w = 0; \end{cases}$$

3° Que le discriminant de cette dernière équation a pour expression

$$(135) \quad \begin{cases} D\lambda_{\mu\nu} = (II' + DD')\lambda^3 + (I^2 + I'D)\lambda^2\mu \\ \quad + (I'^2 + ID')\lambda^2\nu + 2ID\lambda\mu^2 + (II' + 3DD')\lambda\mu\nu \\ \quad + 2I'D'\lambda\nu^2 + D^2\mu^3 + I'D\mu^2\nu + ID'\mu\nu^2 + D^2\nu^3, \end{cases}$$

et devient égal à $D^2D'^2D_{\lambda\mu\nu}$ [formule (115)], si l'on y écrit $DD'\lambda$, $D'\nu$, $D\mu$ au lieu de λ , μ , ν , respectivement. On en conclut immédiatement :

4° Que, si π , α , α' deviennent π_1 , α_1 , α'_1 , quand on y introduit les coordonnées ponctuelles d'un point M quelconque et tangentielles d'une droite Δ quelconque, il faut et il suffit, pour que la conique contrevariante $V' = DD'\pi_1\varphi - D'\alpha_1\sigma - D\alpha'_1\sigma'$ dégénère en deux points, que Δ passe par un des sommets du triangle t :

dans ce cas, les deux points dont il s'agit se trouvent sur le côté opposé du triangle, ainsi que les pôles de Δ par rapport à une conique contrevariante quelconque;

5° Que, si Δ coïncide avec un des côtés du triangle t , la conique V' se réduit au sommet opposé compté deux fois, et constitue un des trois facteurs du second membre de la syzygie (83).

17. Je vais maintenant établir une syzygie remarquable, dont les conséquences, au point de vue géométrique, sont nombreuses et importantes.

Posons tout d'abord

$$(136) \quad \begin{cases} P = D\sigma's + (I\sigma - D\varphi)s' - \sigma w, \\ P' = D'\sigma s' + (I'\sigma' - D'\varphi)s - \sigma' w, \\ Q = (D'\sigma - I\sigma')s + (D\sigma' - I'\sigma)s' + \varphi w. \end{cases}$$

Les trois quantités P , P' , Q représentent toujours trois coniques, soit qu'on donne à ξ , η , ζ les valeurs qui définissent une droite Δ , soit qu'on donne à x , y , z les valeurs qui définissent un point M ; et elles restent invariables par l'application de la loi de réciprocité. On vérifie d'ailleurs sans peine que les coniques P , P' , sont toujours tangentes à Δ , ou passent toujours par M ; et qu'il n'en est de même de Q que si Δ passe par un des sommets du triangle t , ou si M est sur un des côtés de ce triangle.

Les syzygies (48), (49), (50) donnent, d'autre part,

$$(137) \quad \begin{cases} P = x^2 + 2Dx'\pi - I'D\pi^2, \\ P' = x'^2 + 2D'x\pi - ID'\pi^2, \\ Q = 2xx' - 2(I'x + Ix')\pi + (II' + DD')\pi^2. \end{cases}$$

On tire de ces relations

$$(138) \quad \begin{cases} Q^2 - 4PP' = \pi [(II' - DD')^2\pi^3 - 4(II' - DD')(I'x + Ix')\pi^2 \\ \quad + 4(I'^2 + ID')x^2\pi + 12(II' - DD')xx'\pi \\ \quad + 4(I^2 + I'D)x'^2\pi - 8(D'x^3 + I'x^2x' + Ixx'^2 + Dx'^3)]. \end{cases}$$

C'est la syzygie que je me proposais d'obtenir. Son premier membre est une fonction des seuls covariants purs et contrevariants droits s , s' , w , σ , σ' , φ , et des invariants; son second membre est le produit de quatre facteurs mixtes linéaires en π , x , x' . En effet, le facteur π est déjà mis en évidence; et, si l'on considère la

parenthèse qui multiplie π comme une forme ternaire cubique aux variables π, α, α' , il est facile de vérifier que le hessien de cette forme n'en diffère que par le facteur $-\frac{4}{27}E$, en désignant toujours par E l'invariant composé [formule (97)], qui revient à chaque instant dans cette théorie. Nous pouvons donc écrire ainsi la syzygie (138) :

$$(139) \quad Q^2 - 4PP' = \pi\pi'\pi''\pi''',$$

en appelant π', π'', π''' les trois facteurs, linéaires par rapport à π, α, α' , c'est-à-dire par rapport à chacune des séries de variables, dont le produit constitue la parenthèse du second membre de (138).

Mais on peut mettre cette parenthèse sous une autre forme non moins intéressante. Si l'on en retranche huit fois la valeur de $t\tau$ donnée par la syzygie (76), le reste est divisible par π , et l'on vérifie sans peine que le quotient de cette division est égal à

$$4(I^2 - 3ID')P + 4(I^2 - 3I'D)P' + 2(II' - 9DD')Q + E\pi^3,$$

de telle sorte que si l'on représente par R la conique

$$(140) \quad R = 2(I^2 - 3ID')P + 2(I^2 - 3I'D)P' + (II' - 9DD')Q,$$

on a la relation

$$(141) \quad \pi'\pi''\pi''' = 8t\tau + 2\pi R + E\pi^3,$$

et la syzygie (138) ou (139) prend la forme

$$(142) \quad Q^2 - 4PP' = \pi(8t\tau + 2\pi R + E\pi^3).$$

Sous cette forme, elle ne contient plus que les invariants, les co-variants purs et les contrevariants [P, P', Q, R étant des fonctions de ces formes définies par les formules (136) et (140)], avec une seule forme mixte, le covariant identique π . Elle est d'ailleurs symétrique par rapport aux coefficients de s et s' , et reste invariable quand on lui applique la loi de réciprocité.

18. Comme application géométrique de cette syzygie, nous pouvons, en premier lieu, la regarder comme exprimant que l'enveloppe des coniques comprises dans la formule

$$(143) \quad U_{\lambda\mu} = \lambda^2 P + \lambda\mu Q + \mu^2 P',$$

où $\frac{\lambda}{\mu}$ est un paramètre variable, se réduit à quatre droites, si l'on regarde U comme une équation ponctuelle, ou à quatre points, si on la regarde comme équation tangentielle. L'une de ces droites (ou l'un de ces points) peut être choisie arbitrairement ; les trois autres sont alors déterminées par la relation (141), et cette relation montre qu'elles coupent la première sur les côtés du triangle t (ou que les droites, joignant les trois autres points au premier arbitrairement choisi, passent par les trois sommets du triangle t).

L'équation de la conique covariante ou contrevariante la plus générale renferme, comme nous l'avons vu, deux paramètres. Si on l'assujettit à toucher une droite donnée ou à passer par un point donné, un de ces paramètres sera fixé, il n'en restera plus qu'un ; (143) représente donc bien l'équation de la conique covariante ou contrevariante la plus générale assujettie à l'une des deux conditions indiquées ci-dessus. Et nous pouvons énoncer ce théorème :

Toutes les coniques contrevariantes qui passent par un point fixe donné (ou covariantes qui touchent une droite fixe donnée) passent aussi par trois autres points fixes (ou touchent trois autres droites fixes); les droites qui joignent deux à deux ces quatre points fixes passent deux à deux par les sommets du triangle t (ou les intersections des quatre droites fixes sont situées deux par deux sur les côtés du triangle t).

L'équation générale de ces coniques covariantes (ou contrevariantes) s'obtiendra par la formule (143), en introduisant dans P, P', Q, définis par les formules (136), les coordonnées ξ_1, τ_1, ζ_1 de la droite fixe donnée (ou x_1, y_1, z_1 du point fixe donné).

Comme application, reprenons le problème résolu au n° 10 : *Former l'équation des coniques passant par les quatre points communs à s et s', et tangentes à une droite donnée.* Nous n'avons qu'à introduire dans P, Q, P' les coordonnées ξ_1, τ_1, ζ_1 de la droite donnée, et à déterminer λ et μ par la condition que $U_{\lambda\mu}$ [formule (143)] s'annule pour $s = s' = 0$; ce qui donne la condition

$$\tau\lambda^2 - 2\lambda\mu - \tau'\mu^2 = 0.$$

L'expression de U devient, dès lors,

$$(144) \quad U = 2\sigma'^2 P + \sigma' \varphi Q + (\varphi^2 - 2\sigma\sigma') P' \pm (\sigma' Q + \varphi P') \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\sigma'}.$$

Les deux coniques représentées par cette équation sont les mêmes que celles que nous avons déjà trouvées, car l'expression du n° 10 (93)

$$2\sigma\sigma' - \varphi s \mp s\sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\sigma'}$$

se change en l'expression (144), si on la multiplie par le facteur

$$(145) \quad \frac{1\varphi\sigma'^2 - 1'\varphi^2\sigma' + D'\varphi^3 - 3D'\varphi\sigma\sigma' - 2D\sigma'^3 + 21'\sigma\sigma'^2 \pm (1\sigma'^2 - 1'\varphi\sigma' + D'\varphi^2 - D'\sigma\sigma')\sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\sigma'}}{\varphi \mp \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\sigma'}}.$$

Toutefois il est un cas où les deux méthodes ne donnent pas le même résultat. Si l'on cherche la condition pour que le numérateur du facteur (145) s'annule, on trouve, en faisant disparaître le radical, que cette condition est

$$\sigma'^2\tau^2 = 0.$$

L'hypothèse $\sigma' = 0$ annule aussi le dénominateur, et le facteur a pour vraie valeur $D'\varphi^2$, qui n'est pas nul. Mais si $\tau = 0$, c'est-à-dire si la droite donnée passe par un des sommets du triangle t , l'une des deux coniques représentée par (144) disparaît, tandis que l'expression (93) continue à fournir deux coniques distinctes. Cette anomalie provient de ce que toutes les coniques covariantes, tangentes à une droite Δ menée par un des sommets M de t , touchent Δ en un même point, savoir le point d'intersection de Δ avec le côté de t opposé à M , excepté les coniques dégénérées en deux droites et qui ont leur point double en M . La droite Δ n'est donc plus enveloppe, à proprement parler, pour les coniques comprises dans la formule (143), l'enveloppe véritable se compose de deux points situés sur Δ , et effectivement cette droite apparaît alors au carré dans le second membre de (142).

Comme seconde application, soit demandé de former l'équation de la conique qui passe par les quatre points communs à s' et w , et qui touche une tangente commune à τ et $\varphi + k\sigma'$, k étant un paramètre.

Soient ξ_1, τ_1, ζ_1 les coordonnées de la tangente commune : elles annulent τ et donnent à φ la valeur $-k\sigma'$. Faisant donc $\tau = 0$,

$\varphi = -k\sigma'$ dans les formules (136), il vient

$$Q = \sigma'(-Is + Ds' - k\omega),$$

$$P = D\sigma'(s + ks'),$$

$$P' = \sigma'(I's - \omega + kD's),$$

et la conique $U_{\lambda\mu}$, tangente à la droite donnée, devient.

$$U_{\lambda\mu} = \sigma'[D\lambda^2(s + ks') + \lambda\mu(Ds' - Is - k\omega) + \mu^2(I's - \omega + kD's)].$$

Pour qu'elle passe par les points communs à s' et ω , il suffit de déterminer $\frac{\lambda}{\mu}$ par la condition

$$(146) \quad D\lambda^2 - I\lambda\mu + (I' + kD')\mu^2 = 0.$$

Il y a donc deux coniques qui répondent à la question, et, puisque k subsiste comme seul paramètre, elles touchent l'une et l'autre non pas seulement une des tangentes communes à σ et à $\varphi + k\sigma'$, mais les quatre. Pour obtenir l'équation des deux coniques ensemble, il suffit d'égaliser à zéro le résultant de (146) et de $U_{\lambda\mu} = 0$; ce qui donne, tous calculs faits,

$$(147) \quad (D + Ik + I'k^2 + D'k^3)[\omega^2 - I\omega s' + D(I' + kD')s'^2] = 0.$$

Si k est égal à l'une des trois racines de l'équation

$$(148) \quad D'k^3 + I'k^2 + Ik + D = 0,$$

c'est-à-dire, à cause de $k = -\frac{\omega}{\sigma'}$ et de la syzygie (83), si τ s'annule en même temps que σ et $\varphi + k\sigma'$, c'est-à-dire enfin, si la tangente choisie passe par l'un des sommets du triangle t , l'équation (146) a une racine commune avec $U_{\lambda\mu} = 0$, quels que soient x, y, z ; ce qui signifie que l'équation de l'une des coniques $U_{\lambda\mu}$ s'évanouit identiquement. Si k a une valeur quelconque, les deux coniques qui répondent à la question sont données par la formule

$$(149) \quad 2\omega - (I \pm \sqrt{I^2 - 4I'D - 4kDD'})s' = 0.$$

Comme vérification, cherchons quelle valeur il faut donner à k pour que l'une de ces deux coniques dégénère en deux droites. D'après la formule (115), le discriminant de (149) a pour valeur

$$-4DD'^2[Ik + 2D \mp k\sqrt{I^2 - 4I'D - 4DD'k}]:$$

si on l'égalé à zéro, on retrouve la condition (148); et, en effet, lorsque la droite choisie passe par un des sommets du triangle t , il est clair qu'elle coupe en deux points coïncidents la conique dégénérée qui se compose des deux cordes d'intersection de v et s' passant par le sommet considéré : ce couple de cordes d'intersection est donc une des deux coniques fournies par la formule (149), quand on y prend pour k une des racines de (148).

19. A un autre point de vue, la syzygie (139) montre qu'à un point M quelconque, arbitrairement choisi (ou à une droite Δ quelconque), sont associés trois autres points déterminés M_1, M_2, M_3 (ou trois autres droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$), tels que l'ensemble de ces quatre points (ou de ces quatre droites) peut être représenté en coordonnées tangentielles (ou ponctuelles) par une relation entre les seuls invariants et contrevariants (ou invariants et covariants purs), avec des coefficients numériques ou littéraux dépendant des valeurs numériques ou littérales assignées aux coordonnées ponctuelles de M (ou tangentielles de Δ). Si donc le point M (ou la droite Δ) est défini par une propriété projective, il y aura trois autres points (ou droites) jouissant de la même propriété; l'équation des quatre ensemble s'obtiendra en posant

$$(150) \quad Q\delta - 4PP' = 0,$$

et particulierisant les expressions P, P', Q d'après la définition donnée. Si les coordonnées ponctuelles de l'un des points sont connues, on obtiendra l'équation tangentielle des trois autres en introduisant ces coordonnées dans l'équation

$$(151) \quad 8t\tau + 2R\pi + E\pi^3 = 0,$$

dont le premier membre est toujours décomposable en trois facteurs linéaires par rapport aux variables conservées.

Enfin la forme de ce premier membre, qui s'évanouit si l'on suppose à la fois $\pi = 0, t$ ou $\tau = 0$, permet d'énoncer ce théorème :

Lorsque quatre points (ou quatre droites) répondent à une même définition projective par rapport au système des deux coniques, et y répondent seuls, les six droites qui joignent ces points passent deux par deux par les sommets du triangle t

(ou les six points d'intersection des quatre droites sont situés deux par deux sur les côtés du même triangle).

Ainsi le théorème s'applique aux quatre points d'intersection de deux quelconques des coniques covariantes du système, à leurs quatre tangentes communes, aux points de contact de ces tangentes avec une des coniques, aux secondes tangentes (non communes) que l'on peut mener de ces points de contact, aux points de contact de ces secondes tangentes, et ainsi de suite.

Comme application, soit demandé de former l'équation tangentielle des points d'intersection de deux coniques covariantes du système

$$U = \lambda w + \mu s + \nu s', \quad U' = \lambda' w + \mu' s + \nu' s'.$$

Ces points satisfont aux deux équations $U = 0$, $U' = 0$. On peut donc en tirer ces valeurs de s , s' ,

$$s = w \frac{\lambda' \nu - \lambda \nu'}{\mu \nu' - \mu' \nu}, \quad s' = w \frac{\lambda \mu' - \lambda' \mu}{\mu \nu' - \mu' \nu}.$$

Si on les porte dans les formules (136), il vient

$$\begin{aligned} (\mu \nu' - \mu' \nu) P &= w [D(\lambda' \nu - \lambda \nu') \sigma' + (\lambda \mu' - \lambda' \mu)(I \sigma - D \varphi) - (\mu \nu' - \mu' \nu) \sigma], \\ (\mu \nu' - \mu' \nu) P' &= w [D'(\lambda \mu' - \lambda' \mu) \sigma + (\lambda' \nu - \lambda \nu')(I' \sigma' - D' \varphi) - (\mu \nu' - \mu' \nu) \sigma'], \\ (\mu \nu' - \mu' \nu) Q &= w [(\lambda' \nu - \lambda \nu')(D' \sigma - I \sigma') + (\lambda \mu' - \lambda' \mu)(D \sigma' - I' \sigma) + (\mu \nu' - \mu' \nu) \varphi]. \end{aligned}$$

Et l'équation (150) donne, en supprimant les facteurs communs $(\mu \nu' - \mu' \nu)^2 w^2$,

$$\begin{aligned} 0 &= (\mu \nu' - \mu' \nu)^2 (\varphi^2 - I \sigma \sigma') \\ &\quad + (\lambda' \nu - \lambda \nu')^2 [D'^2 \sigma'^2 + (I^2 - 4 I' D) \sigma'^2 - 2 I D' \sigma \sigma' + 4 D D' \sigma' \varphi] \\ &\quad + (\lambda \mu' - \lambda' \mu)^2 [D^2 \sigma^2 + (I'^2 - 4 I D') \sigma^2 - 2 I' D \sigma \sigma' + 4 D D' \sigma \varphi] \\ &\quad + 2(\mu \nu' - \mu' \nu)(\lambda' \nu - \lambda \nu') [2 D \sigma'^2 + 2 I' \sigma \sigma' - I \sigma' \varphi - D' \sigma \varphi] \\ &\quad + 2(\mu \nu' - \mu' \nu)(\lambda \mu' - \lambda' \mu) [2 D' \sigma^2 + 2 I \sigma \sigma' - I' \sigma \varphi - D \sigma' \varphi] \\ &\quad - 2(\lambda' \nu - \lambda \nu')(\lambda \mu' - \lambda' \mu) [2 D D' \varphi^2 + I' D' \sigma^2 + I D \sigma'^2 \\ &\quad \quad \quad + (II' + D D') \sigma \sigma' - 2 I' D \sigma' \varphi - 2 I D \sigma \varphi]. \end{aligned} \tag{152}$$

Comme cas particulier, cette formule donne l'équation bien connue des quatre points d'intersection de s et s' ,

$$\varphi^2 - 4 \sigma \sigma' = 0; \tag{153}$$

celle des quatre points d'intersection de s et w ,

$$D^2 \sigma'^2 + (I^2 - 4 I D') \sigma'^2 - 2 I' D \sigma \sigma' + 4 D D' \sigma \varphi = 0; \tag{154}$$

celle des quatre points d'intersection de w et de $s + ks'$,

$$(155) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= D^2 \sigma'^2 + (I^2 - 4ID') \sigma'^2 - 2I'D \sigma \sigma' + 4DD' \sigma \varphi \\ &+ 2k[2DD' \varphi^2 + I'D' \sigma^2 + ID \sigma'^2 + (II' + DD') \sigma \sigma' - 2I'D \sigma' \varphi - 2ID' \sigma \varphi] \\ &- k^2[D'^2 \sigma^2 + (I^2 - 4I'D) \sigma'^2 - 2ID' \sigma \sigma' + 4DD' \sigma' \varphi], \end{aligned} \right.$$

et ainsi de suite.

Par un calcul analogue, ou en appliquant la loi de réciprocité à la formule (152), on trouve, pour l'équation ponctuelle des quatre tangentes communes à $\lambda \varphi + \mu \sigma + \nu \sigma'$, $\lambda' \varphi + \mu' \sigma + \nu' \sigma'$,

$$(156) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= (\nu \mu' - \mu \nu')^2 [w^2 - 4DD' ss'] \\ &- (\lambda' \mu - \lambda \mu')^2 [D^2 s'^2 + (I^2 - 4I'D) s^2 - 2II' ss' + 4Dws] \\ &+ (\lambda \nu' - \nu \lambda')^2 [D'^2 s^2 + (I'^2 - 4ID') s'^2 - 2I'D' ss' + 4D'ws'] \\ &+ 2(\nu \mu' - \mu \nu')(\mu \lambda' - \lambda \mu') [2DD' s^2 + 2I'D ss' - Iws - Dws'] \\ &- 2(\nu \mu' - \mu \nu')(\lambda \nu' - \nu \lambda') [2DD' s'^2 + 2I'D' ss' - I'ws' - D'ws'] \\ &- 2(\mu \lambda' - \lambda \mu')(\lambda \nu' - \nu \lambda') [2ws^2 + I'D s'^2 + ID' s^2 \\ &\quad + (II' + DD') ss' + 2I'ws - 2Iws']. \end{aligned} \right.$$

Comme cas particulier de cette formule, on retrouve, pour les quatre tangentes communes à s et s' , l'équation bien connue

$$(157) \quad w^2 - 4DD' ss' = 0.$$

Proposons-nous une question un peu plus compliquée, telle que celle-ci :

Par un des points de contact M de s avec les tangentes communes à s et s' , on mène la seconde tangente à s' , qui touche s' en un point N. Former l'équation tangentielle des quatre points N.

Les points M étant à la fois sur s et sur les tangentes communes à s et s' , dont l'équation est (157), leurs coordonnées ponctuelles annulent à la fois s et $w^2 - 4DD' ss'$, c'est-à-dire s et w . Faisant $s = w = 0$ dans (150), on obtient, pour l'équation tangentielle des quatre points M, l'équation (154) déjà écrite plus haut. Les tangentes MN menées de ces points à s' ont des coordonnées qui satisfont à la fois à cette équation et à $\sigma' = 0$, par conséquent à celle-ci

$$\sigma[I^2 - 4ID']\sigma + 4DD'\varphi = 0.$$

Cette dernière équation se décompose en deux : $\tau = 0$, qui correspond aux tangentes communes à s et s' , dont nous n'avons pas à nous occuper, et

$$(I^2 - 4ID')\tau + 4DD'\varphi = 0,$$

qui convient bien aux secondes tangentes MN. Faisant donc dans (150) $\tau' = 0$, $\varphi = \frac{4ID' - I^2}{4DD'}\tau$, nous obtenons, pour l'équation ponctuelle des quatre tangentes MN,

$$0 = (I^2 - 4ID')^2 \omega^2 + 8DD'(I^2 - 4ID')\omega s - 8DD'(2DD'^2 - 4II'D' + I^2)\omega s' - 16D^2D'^2s^2 + 4I'DD'(8DD'^2 + 4II'D' - I^2)ss'.$$

Pour $s' = 0$, cette équation se réduit, comme cela devait être, à un carré parfait, savoir

$$[(I^2 - 4ID')\omega + 4DD'^2s]^2 = 0,$$

ce qui montre que les quatre points N sont déterminés par l'intersection de s' avec la conique

$$(I^2 - 4ID')\omega + 4DD'^2s = 0.$$

Pour avoir leur équation tangentielle, il suffit donc de faire dans (150) $s' = 0$, $s = \frac{4ID' - I^2}{4DD'^2}\omega$, ce qui donne

$$(158) \quad \begin{cases} [4DD'^2\varphi + (I^2 - 4ID')(I\tau' - D'\tau)]^2 \\ - 4D[(I^2 - 4ID')\tau + 4D'^2\tau][D'(I^2 - 4ID')\varphi - (I^2 - 4II'D' + 4DD'^2)\tau'] = 0. \end{cases}$$

Si $I^2 - 4ID' = 0$, cette équation se réduit à $\varphi^2 - 4\tau\tau' = 0$; donc, lorsque cette condition invariante est satisfaite, la tangente à s' en chacun des points communs à s et s' va couper s en l'un des points où cette conique est touchée par les tangentes communes à s et s' .

On en conclut que, lorsque cette condition invariante est satisfaite, le nombre des tangentes communes réelles est égal au nombre des points communs réels.

Soit maintenant M' le point de contact de s' avec une des tangentes communes à s et s' . On peut joindre chacun des quatre points N à chacun des quatre points M' , ce qui donnera seize droites, dont les coordonnées satisferont à la fois à l'équation (158) et à l'équation tangentielle des points M' , laquelle se déduit

de (154) en intervertissant les accents. Si donc on résout ces deux équations par rapport à σ , σ' , φ , et qu'on porte dans (150) un des seize systèmes de solutions, on aura quatre des seize droites. Si donc enfin on élimine σ , σ' , φ entre (150), (158) et l'équation tangentielle des points M' , on obtiendra évidemment l'équation ponctuelle des seize droites dont il s'agit.

Bornons-nous au cas particulier où l'invariant I est nul. Les trois équations à considérer sont alors

$$\begin{aligned} D'^2 \sigma^2 - 4 I' D' \sigma'^2 + 4 DD' \sigma' \varphi &= 0, \\ D'^2 (4 DD' \varphi - I'^2 \sigma)^2 + 4 D (I'^2 \sigma' + 4 D'^2 \sigma) [I'^2 D' \varphi - (I'^3 + 4 DD'^2) \sigma'] &= 0, \\ [D' \sigma s + (D \sigma' - I' \sigma) s' + \varphi w]^2 \\ - 4 (D \sigma' s - D \varphi s' - \sigma w) [D' \sigma s' + (I' \sigma' - D' \varphi) s - \sigma' w] &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on porte dans la seconde la valeur de φ tirée de la première, elle devient

$$\sigma [D'^4 \sigma^3 - 2 I'^2 D'^2 \sigma^2 \sigma' - 8 I' DD'^2 \sigma \sigma'^2 - 8 D (I'^3 + 8 DD'^2) \sigma'^3] = 0$$

et se décompose en deux équations distinctes, dont l'une est $\sigma = 0$. Nous voyons ainsi que sur les seize droites considérées, quatre sont tangentes à la conique σ ou s , ce qui concorde avec le résultat obtenu au n° 11 pour la signification géométrique de I . Nous pouvons ainsi obtenir isolément l'équation de ces quatre tangentes de s , qui sont les polaires par rapport à s' des quatre points de contact de s avec les tangentes communes à s et s' ; il suffit de faire $\sigma = 0$, $\varphi = \frac{I' \sigma'}{D'}$ dans la troisième des équations ci-dessus, ce qui donne, tous calculs faits,

$$(159) \quad (I' w - DD' s')^2 + 4 DD'^2 w s = 0.$$

20. Dans l'exemple que nous venons de traiter, la formule (150) nous a permis d'obtenir, par la voie de l'élimination, l'équation d'un ensemble de douze ou de seize droites homologues, suivant que I est nul ou $\neq 0$. Lorsque, parmi les données d'une question, figurent des éléments (points ou lignes) pris arbitrairement, il est évident qu'en suivant la marche que nous avons indiquée on obtiendra une équation finale s'appliquant non seulement au résultat des constructions faites en partant de cet élément arbitraire, mais au résultat des mêmes constructions supposées faites

à la fois à partir des quatre points ou droites homologues composant le système covariant complet dont fait partie le point ou la droite arbitraire.

Soit proposée, par exemple, cette question : D'un point A arbitraire, on mène les tangentes AB, AC à la conique s , AB', AC' à la conique s' . On demande l'équation des quatre droites BB', BC', CB', CC' qui joignent un point de contact de s à un point de contact de s' .

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées ponctuelles de A ; $s_1, s'_1, w_1, \pi_1, \dots$ ce que deviennent $s, s', w, \pi, \dots$ quand on y introduit les valeurs de ces coordonnées. Soit π l'une des quatre droites dont nous voulons obtenir l'équation. Les deux tangentes aux points où π coupe s ont pour équation, comme il est facile de le vérifier, $\sigma s - D\pi^2 = 0$; et de même les deux tangentes aux points où elle coupe s' , $\sigma' s' - D'\pi^2 = 0$. La condition donnée pour définir π est que chacune des coniques dégénérées $\sigma s - D\pi^2$, $\sigma' s' - D'\pi^2$, doit passer par A ; les coordonnées ξ, η, ζ de π satisferont donc aux deux conditions

$$(160) \quad \sigma = D \frac{\pi_1^2}{s_1}, \quad \sigma' = D' \frac{\pi_1^2}{s'_1}.$$

Si l'on tire de ces équations les valeurs ξ_1, η_1, ζ_1 , on aura quatre systèmes de valeurs, et pour l'un de ces systèmes les fonctions $\sigma, \sigma', \varphi, \pi$ prendront des valeurs parfaitement déterminées. P, P', Q deviennent dès lors

$$\begin{aligned} P &= D \pi_1^2 \left(\frac{D's}{s'_1} + \frac{I s' - w}{s_1} \right) - D s' \varphi_1, \\ P' &= D' \pi_1^2 \left(\frac{D s'}{s_1} + \frac{I' s - w}{s'_1} \right) - D' s \varphi_1, \\ Q &= \pi_1^2 \left[\frac{D(D's - I' s')}{s_1} + \frac{D'(D s' - I s)}{s'_1} \right] + w \varphi_1. \end{aligned}$$

Et, en portant ces valeurs dans la formule (150), on aura une équation de la forme

$$(161) \quad A \pi_1^2 + B \pi_1^2 \varphi_1 + C \varphi_1^2 = 0,$$

où A, B, C représentent des courbes bien déterminées du quatrième ordre. Cette équation représentera donc quatre droites, comprenant une de celles que nous avons en vue ; et elle suppose la résolution préalable du système de deux équations du second

degré (160). Pour avoir une équation qui représente les quatre droites, il faut évidemment faire disparaître le rapport $\frac{\varphi_1}{\pi_1^2}$ dont la valeur dépend de celui des quatre systèmes de solutions des équations (160) que l'on considère en particulier. Pour arriver à cette élimination, il suffit de remarquer que la syzygie (142) reste vraie, quelles que soient les valeurs assignées aux variables $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$. Si nous y donnons à x, y, z les valeurs x_1, y_1, z_1 qui définissent le point A, et l'un des systèmes de valeurs ξ_1, η_1, ζ_1 qui satisfont aux conditions (160), cette syzygie deviendra

$$A_1 \pi_1^2 + B_1 \pi_1^2 \varphi_1 + C_1 \varphi_1^2 = \pi_1 (8 \ell_1 \pi_1 + 2 \pi_1 R_1 + E \pi_1^2),$$

$A_1, B_1, C_1, \dots$ étant ce que deviennent $A, B, C, \dots$ quand on y fait $x = x_1, y = y_1, z = z_1, s = s_1, \dots$. Mais R_1 est une fonction de P_1, P'_1, Q_1 , définie par (140), et par suite une fonction quadratique de π_1^2 et de φ_1 ; on peut donc écrire cette relation

$$(162) \quad 8 \pi_1 \ell_1 \pi_1 = A'_1 \pi_1^2 + B'_1 \pi_1^2 \varphi_1 + C_1 \varphi_1^2,$$

A'_1, B'_1, C_1 étant des fonctions explicites des données. Si le point A est quelconque, on pourra élever les deux termes au carré, exprimer π_1^2 en fonction de $\sigma_1, \sigma'_1, \varphi_1$ au moyen de la syzygie (83) et, par suite, en tenant compte de (160), en fonction de π_1^2 et φ_1 . On aura donc une relation homogène du huitième degré par rapport à π_1^2 et φ_1 , dont les coefficients seront des fonctions complètement connues des données; en éliminant $\frac{\varphi_1}{\pi_1^2}$ entre cette relation et (161), on aura une équation où les coefficients de (161) entreront au quatrième degré, et, par suite, cette équation sera du seizième ordre par rapport aux variables ponctuelles x, y, z ; ce sera l'équation des seize droites que donne la construction indiquée, appliquée tant au point A qu'aux trois points associés à A.

Si le point A a été pris sur l'un des côtés du triangle ℓ , ou a $\ell_1 = 0$; la relation (162) se réduit à

$$A'_1 \pi_1^2 + B'_1 \pi_1^2 \varphi_1 + C_1 \varphi_1^2 = 0,$$

et l'élimination de $\frac{\varphi_1}{\pi_1^2}$ entre cette relation et (161) conduit à une équation du huitième ordre seulement: cette équation représentera les quatre droites obtenues en partant du point A, plus les

quatre autres droites qu'on obtiendrait en partant du point unique associé à A dans ce cas spécial.

Examinons le cas particulier où $C_1 = 0$. L'équation (162) se décompose en deux, savoir $\pi_1 = 0$, et

$$(163) \quad 8 t_1 \tau_1 = A'_1 \pi_1^2 + B'_1 \pi_1 \tau_1.$$

Le système des seize droites se décompose en un système de quatre droites qui s'obtiendra en faisant $\pi_1 = 0$ dans (161), ce qui donne $C = 0$, et en un système de douze droites. Mais, si l'on se reporte aux valeurs de P, P', Q données ci-dessus, on voit que $C = s_1^2 s_1'^2 (w^2 - 4 DD' ss')$; par conséquent, lorsque le point A est pris sur l'une des tangentes communes à s et s', on trouve comme résultat du calcul, d'une part, le groupe de ces quatre tangentes communes, comme cela devait être, de l'autre, un groupe de douze droites qui correspondent trois par trois aux quatre points associés dont A fait partie. Si A est en même temps sur un des côtés du triangle t, ces douze droites se réduisent à quatre, parce que $\pi_1 = 0$ est encore une racine de (163), ce qui donne une seconde fois les quatre tangentes communes, et que l'autre racine, $\frac{\tau_1}{\pi_1} = -\frac{A'_1}{B'_1}$, portée dans (161), donne une équation du quatrième ordre seulement.

Si l'on demandait quelle doit être la position du point A pour que l'une des quatre droites fournies par la construction indiquée soit tangente à la conique φ , il suffirait d'égaliser à zéro le coefficient de π_1^3 dans l'équation (162) élevée au carré, c'est-à-dire de poser

$$(164) \quad 64 DD' t^2 [D^2 D' s'^2 + (I^2 - 2 ID') D ss'^2 + (I^2 - 2 I' D) D' s^2 s' + DD'^2 s^2] + A_1'^2 s^2 s'^2 = 0,$$

ce qui donnerait, pour le lieu du point A, une courbe covariante du douzième ordre. A un point déterminé de cette courbe correspondent évidemment les quatre droites représentées par l'équation $A = 0$. Mais, si l'on calcule A, on trouve que les coefficients n'y dépendent que du seul paramètre $\frac{s'_1}{s_1}$, lequel y figure au second degré. On peut donc aisément former l'équation de l'enveloppe des droites représentées par $A = 0$, lorsque le paramètre prend toutes les valeurs possibles, c'est-à-dire lorsque le point directeur se déplace sur la courbe représentée par (164). On trouve ainsi

l'équation

$$(w - l's - ls')t^2 = 0.$$

Le premier facteur n'est autre chose que l'équation ponctuelle de la conique φ , laquelle constitue donc bien une partie de l'enveloppe, comme nous le savions. Le second facteur est le lieu des points d'intersection des droites variables, lieu qui doit être fourni également, comme on sait, par l'équation de l'enveloppe. Nous avons vu, en effet, que les quatre droites comprises dans l'équation $A = 0$, étant obtenues par une même construction faite à partir de quatre points associés, doivent se couper deux à deux sur les côtés du triangle t .

21. Examinons le cas particulier, déjà touché dans l'exemple précédent, où le point (ou la droite) dont on demande l'équation est situé sur le triangle t (ou passe par un de ses sommets). On a alors $t = 0$ (ou $\tau = 0$), et la syzygie (142) devient

$$(165) \quad Q^2 - 4PP' = \pi^2(2R + E\pi^2).$$

Si donc on pose

$$(166) \quad Q^2 - 4PP' = 0,$$

cette équation représentera le point (ou la droite) compté deux fois, plus deux points (ou deux droites) associés. Mais je dis que ces deux autres points (ou droites) seront eux-mêmes coïncidents. En effet, d'après ce que nous avons vu dans le cas général, les quatre points associés représentés par le second membre de la syzygie (142) sont disposés de telle sorte que les trois sommets du triangle t sont les faux sommets du quadrilatère complet construit sur eux. D'après les propriétés harmoniques du quadrilatère complet, on obtiendra donc les trois points associés à un point donné M en joignant M aux trois sommets, et prenant sur chaque droite le conjugué harmonique de M par rapport au sommet qu'elle renferme et au point de rencontre avec le côté opposé du triangle t . On voit immédiatement que, si M est sur un des côtés de t , un des trois points associés vient se confondre avec M , et que les deux autres vont se réunir en un seul, situé sur ce même côté du triangle t .

D'après ces considérations, il est évident que la formule (166)

fournira en pareil cas le carré de l'équation du point considéré et de son associé, ou, s'il y a une élimination préalable à effectuer, le carré de l'équation de tous les points (ou droites) qui répondent à la question.

Proposons-nous, par exemple, de former l'équation des six tangentes menées à s des trois sommets du triangle t . Les coordonnées de l'une quelconque de ces droites satisfont à la double condition $\sigma = 0$, $\tau = 0$; c'est-à-dire, à cause de la syzygie (83), aux deux conditions

$$\sigma = 0, \quad D(D'\varphi^3 - I'\varphi^2\sigma' + I\varphi\sigma'^2 - D\sigma'^3) = 0.$$

Faisant $\sigma = 0$ dans la formule (166), on aura donc à éliminer $\frac{\varphi}{\sigma}$ entre la seconde des équations précédentes et celle-ci

$$[w\varphi + (Ds' - Is)\sigma']^2 - 4[D's\varphi + (w - I's)\sigma'](Ds'\varphi - Ds\sigma') = 0,$$

qui peut s'écrire

$$m\varphi^2 + 2n\varphi\sigma' + p\sigma'^2 = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$(167) \quad \begin{cases} m = w^2 - 4DD'ss', \\ n = 2DD's^2 + 2I'Dss' - Dws' - Iws, \\ p = (I^2 - 4I'D)s^2 + D^2s'^2 - 2IDss' + 4Dws. \end{cases}$$

Par une formule connue, on obtient comme résultat de l'élimination

$$(168) \quad \begin{cases} 8DD'n^3 + 4(I'Dm + ID'p)n^2 \\ + 2[IDm^2 + (II' - 3DD')mp + I'D'p^2]n \\ + D^2m^3 + (I^2 - 2I'D)m^2p + (I'^2 - 2ID')mp^2 + D'^2p^3 = 0. \end{cases}$$

Si l'on se reporte à la syzygie (83), on voit que les premiers membres ne diffèrent qu'en ce que φ , σ' , σ sont remplacés respectivement par $2n$, $-m$, $-p$. Le premier membre de (168) est donc décomposable en trois facteurs linéaires par rapport à m , n , p ; chacun de ces facteurs est du quatrième ordre en x , y , z et représente évidemment le carré du couple de tangentes à s issu de l'un des sommets de t . Pour $s = 0$, il se réduit, comme cela devait être, à un carré parfait, savoir

$$(w^2 - Is'w^2 + I'Ds'^2w - D^2D's'^3)^2,$$

la parenthèse étant ce que devient t^2 [syzygie (13)] quand on y fait $s = 0$: les points de contact de s avec les trois couples de tangentes sont en effet sur les côtés de t . Si enfin (k, k') est un des trois systèmes de coefficients qui rendent $\varphi + k\sigma + k'\sigma'$ un carré parfait, l'expression $2n - kp - k'm$ représentera le carré du couple de tangentes à s issu du sommet dont $\varphi + k\sigma + k'\sigma'$ est l'équation tangentielle.

Si, en particulier, $D = 0$, l'équation (168) se réduit à

$$(169) \quad I^2 s^2 (\omega^2 - I' \omega s + ID' s^2)^2 = 0$$

et donne séparément les trois couples de tangentes, savoir s et

$$2\omega - s(I' \pm \sqrt{I'^2 - 4ID'}).$$

D'ailleurs la syzygie (13) devient, dans la même hypothèse,

$$(170) \quad t^2 = (\omega - Is')(\omega^2 - I' \omega s + ID' s^2),$$

de telle sorte que les deux couples de tangentes à s issues des deux sommets de t autres que le point double de s se réduisent, comme cela devait être, aux deux côtés de t passant par ce point double, le carré du troisième côté étant $\omega - Is'$.

22. Je vais maintenant examiner succinctement ce qui arrive lorsque l'invariant E s'annule, c'est-à-dire lorsque s et s' se touchent ; en commençant par le cas du contact simple.

Posons

$$(171) \quad \begin{cases} M = II' - 9DD', \\ N = I^2 - 3I'D, \\ N' = I'^2 - 3ID'. \end{cases}$$

Nous pourrions écrire les diverses relations suivantes :

$$(172) \quad \begin{cases} M^2 - 4NN' = 3E = 0, \\ IN' - I'M + 3D'N = 0, & I'N - IM + 3DN' = 0, \\ ID'N + I'DN' - NN' - 3DD'M = E = 0, \\ 4ID'N + 4I'DN' - (II' + 3DD')M = E = 0, \\ DMN' + D'N^2 - INN' = IE = 0, \\ D'MN + DN^2 - I'NN' = I'E = 0, \\ (IN' + D'N)^2 - MN'(II' - DD') = ID'E = 0, \\ (I'N + DN')^2 - MN(I' - DD') = I'DE = 0, \\ 2(IN' + D'N)(I'N + DN') - (II' - DD')M^2 = (II' - 3DD')E = 0. \end{cases}$$

Les seconds membres des syzygies (76), (13) et (83) admettent, comme nous l'avons vu, un facteur carré. On vérifie en outre sans peine, par les formules (140), (137) et (76), que R devient un carré parfait et divise $t\tau$; de sorte qu'on a, dans ce cas,

$$(173) \quad t\tau = R \left(\frac{2DD'\pi}{M} - \frac{D'\alpha}{2N'} - \frac{D\alpha'}{2N} \right),$$

avec la valeur suivante de R

$$(174) \quad R = \frac{1}{2M(II' - DD')} [M(II' - DD')\pi - 2(IN' + D'N)\alpha - 2(I'N + DN')\alpha']^2.$$

La syzygie (138) devient, dès lors,

$$(175) \quad \left\{ \begin{aligned} Q^2 - 4PP' &= \frac{\pi}{(II' - DD')M^2} [M(II' - DD')\pi - 8D'N\alpha - 8DN'\alpha'] \\ &\times [M(II' - DD')\pi - 2(IN' + D'N)\alpha - 2(I'N + DN')\alpha']^2. \end{aligned} \right.$$

Puisque le facteur carré du second membre divise $t\tau$, il représente le côté double (ou le sommet double) du triangle t ; et l'on a ce théorème :

Lorsque s et s' sont tangentes, si π est l'équation d'une droite (ou d'un point) quelconque, l'équation

$$(176) \quad M(II' - DD')\pi - 2(IN' + D'N)\alpha - 2(I'N + DN')\alpha' = 0$$

représente le côté double (ou le sommet double) du triangle t, c'est-à-dire la tangente commune double (ou son point de contact); l'équation

$$(177) \quad MDD'\pi - D'N\alpha - DN'\alpha' = 0$$

représente le côté simple (ou le sommet simple) du même triangle; enfin les trois droites (ou les trois points) associées à la droite (ou au point) π sont la tangente double (ou le point de contact) comptée deux fois et une autre droite (ou point) représentée par l'équation

$$(178) \quad M(II' - DD')\pi - 8D'N\alpha - 8DN'\alpha' = 0.$$

Si, par exemple, π est une des deux tangentes simples communes à s et s', la seconde sera (178); de même pour les deux points d'intersection simples de s et de s', etc.

Pour décomposer en leurs facteurs les seconds membres des syzygies (13) et (83), et obtenir l'expression, en fonction de s, s', ω et des invariants, du carré de la tangente double, ou, en fonction de σ, σ', φ et des invariants, du carré du point de contact, il suffit d'appliquer les résultats obtenus aux nos 14 et 16. Soit $(\pi_1, \alpha_1, \alpha'_1)$ un des systèmes de valeurs de π, α, α' qui annulent à la fois deux des facteurs linéaires de $t\tau$: nous avons vu que l'expression $\pi_1 \omega - \alpha'_1 s - \alpha_1 s'$ représente le carré du côté de t correspondant, et l'expression $DD'\pi_1 \varphi - D'\alpha_1 \sigma - D\alpha'_1 \sigma'$ le carré du sommet opposé. Or nous avons les équations en π, α, α' de deux côtés distincts du triangle t , savoir (176) et (177); le système de valeurs de π, α, α' qui satisfait à la fois à ces deux équations est $\pi_1 = M, \alpha_1 = 2DN', \alpha'_1 = 2D'N$. On en déduit immédiatement, pour l'équation du carré de la tangente double,

$$(179) \quad M\omega - 2D'Ns - 2DN's' = 0,$$

et, pour l'équation du carré du point de contact,

$$(180) \quad M\varphi - 2N'\sigma - 2N\sigma' = 0.$$

Il suffit maintenant de diviser respectivement les seconds membres des syzygies (13) et (83) par les carrés des deux expressions (179) et (180), pour obtenir l'équation du carré du côté simple du triangle t

$$(181) \quad NN'\omega - DN'^2s - D'N^2s' = 0,$$

et l'équation du carré du sommet simple du même triangle

$$(182) \quad DD'NN'\varphi - D'^2N^2\sigma - D^2N'^2\sigma' = 0.$$

En appliquant encore les résultats des nos 14 et 15, nous pouvons obtenir les équations générales des systèmes de coniques dégénérées en deux droites ou en deux points passant par l'un ou l'autre des deux sommets distincts du triangle t , ou situés sur l'un ou l'autre des deux côtés distincts de ce triangle. Ainsi l'équation du sommet simple étant (177), il suffit de prendre

$$\pi_1 = \frac{D'N\alpha_1 + DN'\alpha'_1}{MDD'},$$

de porter cette valeur de π_1 dans les expressions

$$\pi_1 \omega - \alpha'_1 s - \alpha_1 s', \quad DD'\pi_1 \varphi - D'\alpha_1 \sigma - D\alpha'_1 \sigma'$$

et de remplacer $\frac{2_1'}{\alpha_1}$ par une indéterminée k , pour obtenir l'équation générale des coniques covariantes dégénérées en deux droites dont le point de concours est au sommet simple

$$(183) \quad (Mw - 4DN's') + k(Mw - 4D'Ns) = 0,$$

et l'équation générale des coniques contrevariantes dégénérées en deux points situés sur le côté simple

$$(184) \quad (M\varphi - 4N'\sigma) + k'(M\varphi - 4Ns') = 0.$$

D'ailleurs, l'équation (183) étant satisfaite pour $s = s' = w = 0$, toutes les coniques dégénérées qu'elle représente passent par le point de contact de s et s' , et comprennent, par conséquent, la droite qui joint ce point au sommet simple, c'est-à-dire la tangente commune double. L'équation (183) représente donc, quel que soit k , la tangente double avec une autre droite passant par le sommet simple de t . Si l'on veut que cette seconde droite soit celle qui passe par les deux points d'intersection simples de s et s' , il suffit évidemment de prendre $k = -1$, ce qui donne

$$(185) \quad D'Ns - DN's' = 0$$

pour l'équation de la tangente double et de la corde d'intersection ne passant pas par le point de contact. De même

$$(186) \quad \begin{cases} Mw - 4DN's' = 0, \\ Mw - 4D'Ns = 0 \end{cases}$$

représentent évidemment, avec la tangente double, les droites joignant les deux points de contact de s' (ou de s) avec les tangentes communes simples. En prenant $k = +1$, on retrouve l'équation (179); ce qui permet d'énoncer ce théorème :

Lorsque deux coniques s, s' sont tangentes, leur tangente commune au point de contact, celle de leurs cordes d'intersection qui ne passe pas par ce point, et les deux cordes de contact de s et de s' avec leurs tangentes communes simples forment un faisceau harmonique.

On verrait de la même manière que (184) représente deux points dont l'un est toujours le point de contact de s et s' , et

l'autre varie avec la valeur de k' . Pour $k' = 1$, on retrouve (180); pour $k' = -1$, ce qui donne

$$(187) \quad N'\sigma - N\sigma' = 0,$$

le second point représenté est le point de concours des deux tangentes communes simples. Pour les équations

$$(188) \quad M\varphi - 4N'\sigma = 0, \quad M\varphi - 4N\sigma' = 0,$$

le second point est le point de concours des tangentes à s (ou à s') aux deux points d'intersection simples; et ces deux points de concours, réunis à celui de l'équation (187) et au point de contact de s et s' , forment sur le côté simple du triangle t une division harmonique : c'est le théorème réciproque de celui qui a été énoncé plus haut.

En opérant sur l'équation (176) du sommet double de t comme nous venons de le faire sur l'équation (177) du sommet simple, on obtient les résultats suivants :

$$(189) \quad \begin{cases} 2(IN' + D'N)w - M(H' - DD')s' \\ + k[2(I'N + DN')w - M(H' - DD')s] = 0, \end{cases}$$

où k est une arbitraire, est l'équation des coniques covariantes dégénérées en deux droites passant par le point de contact de s et de s' . Cette équation peut encore s'écrire

$$(190) \quad (M + 2kN')w - (IN' + D'N)(s + ks') = 0;$$

comme cas particulier, elle donne : 1° l'équation des deux cordes d'intersection de s et s' passant par leur point de contact

$$(191) \quad Ms' - 2N's = 0 \quad \text{ou} \quad 2Ns' - Ms = 0,$$

ce qui revient au même, à cause des relations (172); 2° l'équation des droites joignant le point de contact de s et s' aux deux points de contact de s avec les tangentes communes simples

$$(192) \quad Mw - (IN' + D'N)s = 0,$$

ou aux deux points de contact de s' avec ces mêmes tangentes

$$(193) \quad Mw - (I'N + DN')s' = 0.$$

L'équation des coniques contrevariantes dégénérées en deux

points situés sur la tangente commune double sera de même

$$(194) \quad DD'(M + 2kN)\tau - (I'N + DN')(D'\tau + kD\tau') = 0$$

et donnera, comme cas particuliers, l'équation

$$(195) \quad 2D'N\tau - DM\tau' = 0$$

des deux points où la tangente commune double est rencontrée par les deux tangentes communes simples ; l'équation

$$(196) \quad DM\tau - (I'N + DN')\tau = 0$$

des deux points où elle est rencontrée par les tangentes à s aux points d'intersection simples de s et s' ; et ainsi de suite.

23. Je passe au cas où les deux coniques s, s' sont bitangentes, c'est-à-dire se touchent en deux points distincts.

Dans ce cas, les deux droites (192) du numéro précédent doivent évidemment se confondre, ainsi que les deux points (195). Si donc on calcule, par les formules (113) et (134), l'équation tangentielle de la conique (192) et l'équation ponctuelle de la conique (195), ces équations doivent être satisfaites identiquement. On obtient ainsi les deux relations suivantes entre les invariants, covariants et contrevariants,

$$(197) \quad M\tau - 2N'\tau - 2N\tau' = 0.$$

$$(198) \quad Mw - 2D'Ns - 2DN's' = 0.$$

Mais, si l'on compare ces relations avec les équations (180) et (179) du numéro précédent, on s'aperçoit qu'elles expriment que la tangente double et son point de contact cessent ici d'exister : ce qui devait être, puisqu'il y a, dans le cas qui nous occupe, deux tangentes communes doubles et deux points de contact distincts.

Les premiers membres de (197) et de (198) étant respectivement, lorsque $E = 0$, facteurs des expressions de τ^2 et de t^2 , on en conclut que le covariant t et le contrevariant τ s'annulent identiquement : ce qui devait être, puisqu'il existe ici, non plus un seul triangle autopolaire commun à s et s' , mais une infinité, ayant tous un sommet commun et leurs deux autres sommets sur une droite fixe, savoir la corde de contact des deux coniques.

L'équation du carré de ce sommet fixe, qui est ici le point de

concours des deux tangentes communes, continue d'ailleurs à être donnée par la formule (182); en y introduisant la valeur de φ fournie par (197), on trouve pour cette équation

$$(199) \quad D'(I'N - 3DN')\sigma + D(IN' - 3D'N)\sigma' = 0.$$

De même l'équation (181) donne, en tenant compte de (198), pour le carré de la corde de contact des deux coniques,

$$(200) \quad (IN' - 3D'N)s + (I'N - 3DN')s' = 0.$$

Puisque t et τ sont identiquement nuls, il en est de même de $t\tau$ et, par suite, de l'un des facteurs du second membre de la syzygie (76); ce ne peut d'ailleurs être que celui qui représentait, dans le numéro précédent, le côté double de t ou le sommet double opposé. On a donc encore cette relation entre covariants mixtes

$$(201) \quad M(II' - DD')\pi - 2(IN' + D'N)\alpha - 2(I'N + DN')\alpha' = 0.$$

En l'introduisant dans les formules (177) et (178), on obtient, pour l'équation de la corde de contact (ou de son pôle),

$$(202) \quad D'N\alpha - DN'\alpha' = 0,$$

et pour celle de la droite (ou du point) associée à une droite donnée (ou à un point donné) π ,

$$(203) \quad (IN' - 3D'N)\alpha + (I'N - 3DN')\alpha' = 0.$$

Les systèmes de coniques dégénérées covariantes (183) et contrevariantes (184) se réduisent respectivement à la seule conique

$$(204) \quad D'Ns - DN's' = 0,$$

qui représente les deux tangentes communes, comme on peut le vérifier en introduisant l'expression (198) de ω dans l'équation $\omega^2 - 4DD'ss'$, qui se réduit alors au carré du premier membre de (204); et à la conique

$$(205) \quad N'\sigma - N\sigma' = 0,$$

qui représente les deux points de contact et se déduirait directement de $\varphi^2 - 4\tau\tau'$, en tenant compte de (197).

De même, les systèmes de coniques covariantes (189) et contrevariantes (191) se réduisent respectivement à la conique (191).

qui représente le carré de la corde de contact, et à la conique (195), qui représente le carré du point de concours des deux tangentes communes.

La situation de deux coniques bitangentes est ainsi caractérisée par l'évanouissement de l'invariant E, du covariant (198), du contrevariant (197) et du covariant mixte (201).

24. Examinons le cas où les deux coniques s, s' sont osculatrices, c'est-à-dire ont trois de leurs points d'intersection réunis en un seul, le quatrième restant séparé.

Ce cas ne diffère de celui du contact simple, examiné ci-dessus au n° 22, qu'en ce que le côté simple du triangle t , représenté par (177), vient se confondre avec le côté double représenté par (176). Si l'on exprime que dans ces deux équations les coefficients de π, α, α' sont proportionnels, on obtient les deux relations invariantes

$$\frac{II' - DD'}{DD'} = \frac{2(IN' + D'N)}{D'N} = \frac{2(I'N + DN')}{DN'},$$

lesquelles, en vertu de $E = 0$, se réduisent à une seule, savoir

$$(206) \quad IDN'^2 - I'D'N^2 = 0.$$

Mais il faut aussi que les équations (179) et (181) représentent le carré de la même droite; il doit donc en être de même de leur combinaison

$$(M^2 - 4NN')\omega + 2(2DN'^2 - D'MN)s + 2(2D'N^2 - DMN')s' = 0,$$

c'est-à-dire, à cause des relations (172), de l'équation

$$(2DN'^2 - D'MN)s + (2D'N^2 - DMN')s' = 0.$$

Or cette équation représente une conique passant par tous les points communs à s et s' , et ne peut, par suite, représenter le carré de la tangente d'osculation, laquelle ne passe pas par le quatrième point d'intersection de s et s' . On doit donc avoir séparément

$$2DN'^2 - D'MN = 0, \quad 2D'N^2 - DMN' = 0.$$

Ces deux conditions sont satisfaites si $N = N' = 0$, ce qui entraîne $M = 0$. Je dis, de plus, qu'elles ne peuvent être satisfaites

que de cette manière; car l'une des relations (172) donne

$$D'MN = N'(I'N - DN').$$

On devrait donc avoir, si N et N' n'étaient pas nuls,

$$I'N = 3DN', \quad IN' = 3D'N;$$

d'où, multipliant membre à membre,

$$MNN' = 0,$$

ce qui entraîne encore $M = 0$, d'où $N = N' = 0$. La situation spéciale de deux coniques osculatrices est donc caractérisée par deux conditions invariantes, que l'on peut écrire à volonté

$$(207) \quad E = M = 0; \quad E = N = 0; \quad E = N' = 0; \quad M = N = 0, \quad M = N' = 0,$$

et qui entraînent les quatre relations simultanées

$$(208) \quad E = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad N' = 0.$$

Il convient de remarquer que le système de conditions $N = N' = 0$ ne serait pas suffisant; il entraînerait seulement $II'M = 0$, c'est-à-dire $I = I' = 0$, et les deux coniques auraient une situation relative spéciale, mais tout autre que celle que nous discutons.

L'existence des relations (208) rend illusoires toutes les formules du n° 22; il convient donc de se reporter aux syzygies elles-mêmes. Il est d'ailleurs facile de vérifier que les syzygies (76), (13) et (83) deviennent respectivement, en vertu des relations (208),

$$(209) \quad \begin{cases} 27 DD' t \tau = (6 DD' \pi - I' \alpha - I \alpha')^2, \\ 27 t^2 = (3 \omega - I' s - I s')^2, \\ 27 D^2 D'^2 \tau^2 = (3 DD' \varphi - ID' \sigma - I' D \sigma')^2. \end{cases}$$

Par suite, l'équation

$$(210) \quad 6 DD' \pi - I' \alpha - I \alpha' = 0$$

représente la tangente d'osculation (ou son point de contact); l'équation

$$(211) \quad 3 \omega - I' s - I s' = 0$$

représente le carré de la tangente d'osculation, et l'équation

$$(212) \quad 3DD'\varphi - ID'\sigma - I'D\sigma' = 0,$$

le carré du point d'osculation.

La syzygie (142) devient, puisque R et E sont nuls,

$$(213) \quad Q^2 - 4PP' = 8\pi t\tau = \frac{8\pi(6DD'\pi - I'\alpha - I\alpha')^2}{27DD'}.$$

On en conclut qu'à chaque point (ou droite), arbitrairement choisi, est associé le point d'osculation (ou la tangente d'osculation) compté trois fois, et remplaçant, par conséquent, les trois points associés qui étaient distincts dans le cas général, se réduisaient au point de contact compté deux fois et à un autre point lorsque les deux coniques étaient simplement tangentes, et disparaissaient complètement quand elles devenaient bitangentes.

Si l'on prend $\pi_1, \alpha_1, \alpha'_1$ satisfaisant à (210), on sait que $\pi_1\omega - \alpha'_1s - \alpha_1s'$ et $DD'\pi_1\varphi - D'\alpha_1\sigma - D\alpha'_1\sigma'$ représenteront respectivement une conique dégénérée en deux droites se coupant au point d'osculation, et une conique dégénérée en deux points situés en ligne droite avec ce point. Mais, comme ces deux droites (ou ces deux points) forment un ensemble covariant (ou contrevariant) et sont, par suite, associées, l'une des droites (ou l'un des points) devra toujours être la tangente d'osculation (ou le point d'osculation).

Les deux équations ainsi obtenues sont d'ailleurs

$$(214) \quad I\omega - 6DD's + k(I'\omega - 6DD's') = 0,$$

$$(215) \quad I'\varphi - 6D'\sigma + k'(I\varphi - 6D\sigma') = 0,$$

où k, k' sont deux arbitraires.

Si l'on veut que la seconde des droites représentées par (214) soit l'unique corde d'intersection de s et s' , il suffit de prendre $k = -\frac{I}{I'}$, ce qui donne

$$(216) \quad I's - Is' = 0.$$

Si l'on veut qu'elle se confonde avec la première, on doit annuler les coefficients de φ, σ, σ' dans l'équation tangentielle correspondante calculée par la formule (113), ce qui conduit à prendre

$k = \frac{1}{p}$, et fait retomber, comme cela devait être, sur l'équation (210). D'ailleurs,

$$(217) \quad I\omega - 6DD's = 0, \quad I'\omega - 6DD's' = 0$$

représentent évidemment, jointes à la tangente d'osculution, les droites qui joignent le point d'osculution aux points de contact de s et de s' avec leur seconde tangente commune; on en conclut que ces deux droites forment, avec la tangente d'osculution et la corde d'intersection, un faisceau harmonique.

On verrait de même que les équations

$$(218) \quad I'\varphi - 6D'\sigma = 0, \quad I\varphi - 6D\sigma' = 0$$

représentent, joints au point d'osculution, les points où la tangente d'osculution est coupée par les tangentes à s et à s' en leur point d'intersection simple; que

$$(219) \quad ID'\sigma - I'D\sigma' = 0$$

représente, joint au point d'osculution, le point d'intersection des deux tangentes communes à s et s' ; enfin que ces deux points, avec ceux des équations (218), forment, sur la tangente d'osculution, une division harmonique.

25. Nous arrivons enfin au cas où les deux coniques sont sur-oscultatrices, c'est-à-dire ont leurs quatre points d'intersection réunis en un seul.

Il est évident que les conditions invariantes $E=M=N=N'=0$ continuent à être satisfaites. De plus, la conique (216) du numéro précédent doit se réduire à la tangente d'osculution comptée double; l'équation tangentielle correspondante, calculée par la formule (113), doit donc être satisfaite identiquement, ce qui donne la relation

$$II'\varphi - I'^2\sigma - I^2\sigma' = 0,$$

que l'on peut encore écrire

$$(220) \quad 3DD'\varphi - ID'\sigma - I'D\sigma' = 0.$$

L'équation (212), qui représentait le carré du point d'osculution dans le cas des deux coniques oscultatrices, disparaît donc ici,

et le carré du point de surosculation est représenté par

$$(221) \quad ID'\sigma - I'D\sigma' = 0.$$

De même, l'équation ponctuelle correspondant à (221) doit être satisfaite identiquement, ce qui donne la relation

$$(222) \quad 3\omega - I's - Is' = 0.$$

Cette équation représentait, dans le cas du numéro précédent, le carré de la tangente d'osculation; ici elle disparaît, et le carré de la tangente de surosculation a pour équation

$$(223) \quad I's - Is' = 0.$$

Les relations (220), (222) entraînent $\tau^2 = 0$, $t^2 = 0$; par suite, on a aussi $t\tau = 0$, et l'on peut écrire la relation identique entre covariants mixtes,

$$(224) \quad 6DD'\pi - I'\alpha - I\alpha' = 0.$$

La situation spéciale de deux coniques surosculatrices est donc caractérisée par l'évanouissement simultané des invariants M, N, N', E, des covariants t et (222), des contrevariants τ et (220) et du covariant mixte (224).

26. Je mentionnerai, pour terminer, le cas où les invariants I, I' sont nuls à la fois. Alors les syzygies (13), (76), (83) deviennent respectivement

$$(225) \quad \left\{ \begin{array}{l} t^2 = (\omega - s\sqrt[3]{DD'^2} - s'\sqrt[3]{D^2D'}) \\ \quad \times (\omega - \theta s\sqrt[3]{DD'^2} - \theta s'\sqrt[3]{D^2D'}) (\omega - \theta^2 s\sqrt[3]{DD'^2} - \theta^2 s'\sqrt[3]{D^2D'}), \\ t\tau = -(\pi\sqrt[3]{D^2D'^2} + \alpha\sqrt[3]{D'} + \alpha'\sqrt[3]{D}) \\ \quad \times (\pi\sqrt[3]{D^2D'^2} + \theta\alpha\sqrt[3]{D'} + \theta^2\alpha'\sqrt[3]{D}) (\pi\sqrt[3]{D^2D'^2} + \theta^2\alpha\sqrt[3]{D'} + \theta^2\alpha'\sqrt[3]{D}), \\ \tau^2 = DD' \left(\varphi - \sigma\sqrt[3]{\frac{D'}{D}} - \sigma'\sqrt[3]{\frac{D}{D'}} \right) \\ \quad \times \left(\varphi - \theta\sigma\sqrt[3]{\frac{D'}{D}} - \theta^2\sigma'\sqrt[3]{\frac{D}{D'}} \right) \left(\varphi - \theta^2\sigma\sqrt[3]{\frac{D'}{D}} - \theta^2\sigma'\sqrt[3]{\frac{D}{D'}} \right), \end{array} \right.$$

en désignant par θ une des racines cubiques imaginaires de l'unité. Les trois côtés et les trois sommets du triangle t sont ainsi séparés : deux des trois éléments étant toujours imaginaires, et le troisième réel (en supposant, bien entendu, que s et s' aient leurs

coefficients réels). L'intervention dans ces formules des racines cubiques imaginaires de l'unité correspond à ce fait bien connu, que le rapport anharmonique du faisceau joignant les quatre points d'intersection de s et s' à un autre point quelconque soit de s , soit de s' , est équi-anharmonique, c'est-à-dire précisément égal à l'une de ces racines imaginaires.

Par suite de la décomposition en facteurs des expressions de t^2 , $t\tau$, τ^2 , il devient possible d'exprimer séparément, comme dans les cas où $E = 0$, certains couples d'éléments covariants ou contrevariants. Ainsi le système des coniques dégénérées en deux droites qui se coupent au sommet réel de t aura pour équation

$$(226) \quad w + s\sqrt[3]{DD'^2} + k(w + s'\sqrt[3]{D^2D'}) = 0,$$

k étant une indéterminée. Si l'on veut avoir les deux cordes d'intersection réelles, il suffit évidemment de prendre $k = -1$, ce qui donne

$$(227) \quad s\sqrt[3]{D'} - s'\sqrt[3]{D} = 0,$$

et ainsi de suite.

27. Comme résumé de ce travail, on peut dire que le point central, à proprement parler, de la théorie du système de deux coniques est la syzygie (76), qui fournit à la fois les côtés et les sommets du triangle polaire commun (n° 11), et qui conduit directement (n°s 14 et 15) à la connaissance des trois systèmes simplement infinis de coniques covariantes dégénérées en couples de droites, et des trois systèmes de coniques contrevariantes dégénérées en couples de points; les couples communs à deux systèmes se réduisant à deux droites coïncidentes ou à deux points coïncidents et étant fournis par les syzygies (13) et (83). Immédiatement après, au point de vue de l'importance, il convient de placer les syzygies qui permettent de représenter toutes les formations, à une puissance près de t ou de τ , en fonction de trois covariants mixtes linéaires par rapport aux deux séries de variables; de là, notamment pour s , s' , σ , σ' , des formes canoniques nouvelles (n°s 12, 13 et 16), éminemment propres au calcul méthodique des invariants, covariants et contrevariants composés qui correspondent à une condition géométrique donnée. Enfin vient la syzy-

gie (142), dont l'étude fait l'objet des n^{os} 17 à 20, et qui fournit notamment un moyen régulier de former l'équation de tout groupe de points ou de droites définis par une même condition projective, d'ailleurs quelconque; elle synthétise ainsi la solution d'un très grand nombre de problèmes dont chacun exigeait jusqu'ici une méthode particulière. Je laisse à des recherches ultérieures la réponse à une question intéressante que l'on peut se poser à ce sujet : existe-t-il des formules générales analogues pour les ensembles covariants ou contrevariants dont l'élément donné serait, par exemple, au lieu d'un point ou d'une droite, une conique ou même une courbe de degré plus élevé?

Le Mans, 12 décembre 1888.

Formules de quaternions pour la réduction des intégrales multiples les unes dans les autres;

par M. E. CARVALLO.

1. Les intégrales qui se présentent en Physique mathématique sont de trois sortes :

1^o Les intégrales simples le long d'une ligne; par exemple, le travail d'une force dans un certain déplacement de son point d'application;

2^o Les intégrales doubles le long d'une surface; par exemple, les flux (flux de chaleur, flux de force);

3^o Les intégrales triples dans un volume; par exemple, l'évaluation de la masse contenue dans ce volume.

Ces trois espèces d'intégrales rentrent dans les trois types généraux suivants :

$$\int \varphi(\tau) ds, \quad \iint \varphi(\nu) d\tau, \quad \iiint Q. dv.$$

Dans le troisième, dv est l'élément de volume; l'intégration est étendue à une portion déterminée de l'espace; enfin Q est

une quantité quelconque algébrique ⁽¹⁾ ou complexe déterminée en chaque point de l'espace, mais variable avec ce point; en d'autres termes, Q est une fonction du vecteur qui va de l'origine à ce point.

Dans la première formule, τ est l'unité de tangente à la courbe d'intégration, ds l'élément d'arc; dans la seconde, ν est l'unité de normale à la surface d'intégration, $d\sigma$ l'élément de cette surface. Enfin, dans les deux formules, φ est l'indication d'une *fonction linéaire* complexe ou algébrique, le système linéaire ⁽²⁾ qui définit φ étant *variable* avec le point considéré de l'espace; en d'autres termes, ce système linéaire ou, pour mieux dire, cet opérateur φ est fonction du vecteur qui va de l'origine au point considéré.

Nous allons établir deux formules qui permettent de passer des intégrales simples aux intégrales doubles, des intégrales doubles aux intégrales triples, et inversement. Ces formules très générales renferment, comme cas particuliers, celles de Green et celles d'Ampère, qui assimilent l'action d'un courant à un feuillet magnétique : elles peuvent être étendues à l'hyperespace et confondues en une seule relative à un nombre quelconque de signes $\int$.

2. Formule pour passer d'une intégrale double à une intégrale triple, et inversement. — Considérons l'intégrale double

$$\iint \varphi(\nu) d\sigma$$

étendue à la surface fermée (*fig. 1*) S , ν étant l'unité normale *extérieure* à la surface.

Je décompose le volume intérieur en petits parallélépipèdes rectangles, et j'étends l'intégration précédente aux surfaces de tous ces éléments. Chaque face commune à deux éléments entrera deux fois dans l'intégrale; mais les normales extérieures étant de sens contraire pour les deux parallélépipèdes, les éléments cor-

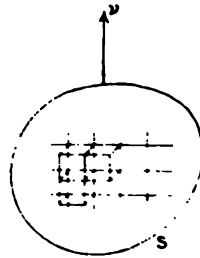
⁽¹⁾ J'emploie ici le mot de *quantité algébrique* par opposition à quantité complexe pour désigner ce que les Anglais appellent *scalar*.

⁽²⁾ Pour la définition des systèmes linéaires, voir le Mémoire de M. Laguerre (*Journal de l'École Polytechnique*, XLII^e Cahier; 1867).

respondants de l'intégrale sont égaux et de signe contraire. Donc ils se détruisent, et il ne reste, en définitive, que l'intégrale étendue à la surface S .

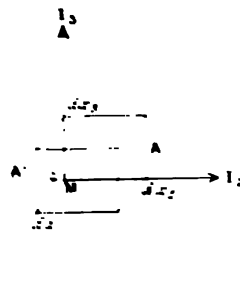
Cela posé, je considère le parallélépipède construit en un

Fig. 1.



point M (fig. 1) sur les trois éléments rectangulaires $I_1 dx_1$, $I_2 dx_2$, $I_3 dx_3$. Les faces A et A' perpendiculaires à I_1 ont pour mesure commune $dx_2 dx_3$; l'unité de normale extérieure est $-I_1$ pour A ; pour A' elle est I_1 . Enfin, si φ est la valeur de l'opérateur φ en M , c'est-à-dire pour l'élément A , la valeur de cet opé-

Fig. 2.



rateur pour A sera $\varphi = \frac{1}{I_1} \frac{\partial}{\partial x_1}$. On aura donc les deux éléments d'intégrale :

Pour A ,

$$- \varphi dx_2 dx_3 = - \frac{1}{I_1} \frac{\partial}{\partial x_1} dx_2 dx_3$$

Pour A' ,

$$\varphi dx_2 dx_3 = \frac{1}{I_1} \frac{\partial}{\partial x_1} dx_2 dx_3$$

En ajoutant et remplaçant $dx_1 dx_2 dx_3$ par dv , il vient, pour l'ensemble des faces A et A',

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} (I_1) dv.$$

On a de même, pour les couples de faces perpendiculaires à I_2 et I_3 , respectivement,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} (I_2) dv, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} (I_3) dv.$$

On a donc, pour la surface complète du parallélépipède considéré, l'élément d'intégrale

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} (I_1) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} (I_2) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} (I_3) \right] dv$$

ou encore

$$\varphi \left(I_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + I_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + I_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) dv = \varphi (\nabla) dv;$$

les dérivations de ∇ portant sur φ .

Si maintenant on se rappelle que la somme de tous ces éléments donne l'intégrale suivant la surface S, on a la formule définitive

$$(1) \quad \int \int \varphi(v) d\tau = \int \int \int \varphi(\nabla) dv.$$

De là cette règle d'une remarquable simplicité :

Une intégrale double le long d'une surface fermée égale une intégrale triple étendue au volume renfermé dans la surface et qui s'obtient en remplaçant v par ∇ dans l'expression à intégrer.

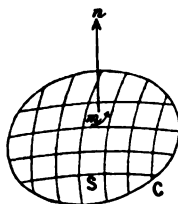
3. Formule pour passer d'une intégrale simple à une intégrale double, et inversement. — Considérons l'intégrale simple

$$\int \varphi(\tau) . ds$$

étendue à la courbe fermée C (*fig. 3*). Par cette courbe je fais passer une surface, que je décompose en petits rectangles, par un réseau de lignes orthogonales, et j'étends l'intégration précédente à tous ces éléments. Pour définir le sens dans lequel on les décrit,

je considère toutes les normales situées d'un même côté de la surface; je supposerai que, sur le contour de chaque rectangle tel que m , on tourne de droite à gauche pour un observateur situé

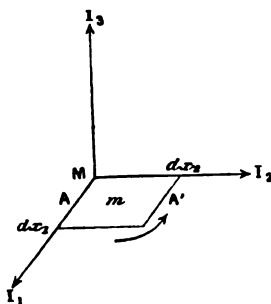
Fig. 3.



suivant la normale mn , les pieds en m et la tête en n . Dès lors, un côté commun à deux rectangles sera décrit deux fois en sens inverse, et il restera seulement l'intégrale suivant la ligne C .

Cela posé, je considère un rectangle m (fig. 4) : je prends pour origine son sommet M ; pour axes, les directions I_1, I_2 des côtés et la normale I_3 au plan de ce rectangle. Les côtés A et A' perpendiculaires à I_2 ont pour mesure dx_1 ; l'unité de tangente dans le sens du mouvement est I_1 pour A ; pour A' elle est $-I_1$. Enfin,

Fig. 4.



si φ est la valeur de l'opérateur en M , c'est-à-dire pour l'élément A , la valeur de cet opérateur pour A' sera $\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2$. On aura donc les éléments d'intégrale :

Pour A ,

$$\varphi(I_1) dx_1;$$

Pour A',

$$\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 \right) (-I_1) dx_1 = -\varphi (I_1) dx_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} (I_1) dx_1 dx_2.$$

En ajoutant et remplaçant $dx_1 dx_2$ par $d\sigma$, il vient, pour l'ensemble des côtés A et A',

$$- \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} (I_1) d\sigma.$$

On a de même, pour l'ensemble des côtés perpendiculaires à I_1 ,

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} (I_2) d\sigma.$$

On a donc, pour le contour complet du rectangle m , l'élément d'intégrale

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} (I_2) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} (I_1) \right] d\sigma$$

ou encore

$$\varphi \left(I_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - I_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) d\sigma.$$

Or on a

$$\nabla = I_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + I_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + I_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

et, pour l'élément m , avec les axes choisis.

$$v = I_3;$$

d'où l'on tire

$$V \cdot \nabla v = I_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - I_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (1).$$

L'élément d'intégrale correspondant au rectangle m s'écrit donc

$$\varphi (V \cdot \nabla v) d\sigma.$$

On a donc, en définitive, la formule

$$(II) \quad \int_C \varphi(z) ds = \int_S \varphi (V \cdot \nabla v) d\sigma.$$

De là cette règle :

(1) Le symbole V est le signe vectoriel des quaternions,

$$V \cdot XY = (x_1 y_1 - x_2 y_2) I_1 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) I_2 + \dots$$

Une intégrale simple suivant une courbe fermée égale une intégrale double étendue à l'aire intérieure d'une surface quelconque passant par cette courbe. Il suffit, pour former cette intégrale double, de remplacer τ par $\nabla \cdot \nabla \tau$ dans l'expression à intégrer.

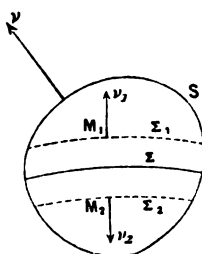
4. *Restriction aux deux théorèmes précédents.* — Les démonstrations de ces deux théorèmes supposent que l'opérateur φ est fini, continu, et admet trois dérivées $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$ déterminées dans tout le champ de l'intégration. Tout cela se résume en disant que $\varphi(\nabla)$ a une valeur déterminée et unique. Si cette condition n'est pas réalisée, il faut apporter dans l'application des formules quelques précautions analogues à celles qu'on rencontre dans la théorie des imaginaires relativement aux points critiques. Sans entrer dans le détail de cette étude, dont les principes sont connus ⁽¹⁾ et qui nous entraînerait trop loin, donnons seulement un exemple.

Considérons l'intégrale double, le long de la surface S (fig. 5),

$$\iint_S \varphi(\nu) d\tau,$$

et supposons que les conditions précédentes soient réalisées dans

Fig. 5.



toute la région de l'espace intérieure à la surface S , sauf sur une surface de discontinuité Σ . Soient

Σ_1 et Σ_2 deux surfaces infiniment voisines de part et d'autre de Σ ;

⁽¹⁾ Voir MAXWELL, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1886-1889.

M_1 et M_2 deux points situés sur ces surfaces et voisins l'un de l'autre;

φ_1 et φ_2 les valeurs de φ en ces points;

ν_1 et ν_2 les normales à Σ_1 et Σ_2 orientées de façon à s'éloigner de Σ .

On aura, $\int \int \int \varphi(\nabla) dv$ étant étendue à la région intérieure à S et extérieure à $\Sigma_1 \Sigma_2$,

$$\int \int_S \varphi(\nu) d\tau = \int \int \int \varphi(\nabla) dv + \int \int_{\Sigma_1} \varphi_1(\nu_1) d\tau + \int \int_{\Sigma_2} \varphi_2(\nu_2) d\tau;$$

et, comme $\nu_2 = -\nu_1$, on aura la formule définitive

$$\int \int_S \varphi(\nu) d\tau = \int \int \int \varphi(\nabla) dv + \int \int_{\Sigma} (\varphi_1 - \varphi_2)(\nu_1) d\tau.$$

§. *Remarque.* — L'analogie des propriétés du symbole ∇ avec celles d'un signe ordinaire de dérivation n'échappe à personne; les deux théorèmes précédents doivent être considérés comme analogues à la formule

$$u = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

où l'on ajoute à la fois dans le deuxième membre un signe $\int$ et un signe de dérivation. Pour mieux faire comprendre cette assimilation, je considère l'intégrale suivant une surface fermée S

$$\int \int \varphi(\nu) d\tau.$$

où je suppose que $\varphi(\nu)$ est une quantité algébrique (non complexe). On a

$$\int \int \varphi(\nu) d\tau = \int \int \int \varphi(\nabla) dv.$$

Soient M et m la plus grande et la plus petite valeur de $\varphi(\nabla)$ dans l'intérieur de S , on aura

$$\int \int \int m dv \leq \int \int \int \varphi(\nabla) dv \leq \int \int \int M dv$$

ou, en désignant par V le volume intérieur à S ,

$$mV \leq \int \int \int \varphi(\nabla) dv \leq MV.$$

Donc on a, μ étant une quantité comprise entre m et M ,

$$\iiint \varphi(\nabla) dv = \mu V.$$

D'ailleurs, si l'on suppose $\varphi(\nabla)$ continu, il ne pourra pas passer de m à M sans prendre toutes les valeurs intermédiaires. Il existe donc un point Γ intérieur à la surface S pour lequel on a

$$\varphi(\Gamma) = \mu,$$

et l'on obtient en définitive la formule

$$\iint \varphi(\gamma) d\sigma = \varphi(\Gamma) \cdot V,$$

analogue à la formule de M. O. Bonnet,

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h),$$

$\varphi(\Gamma)$ étant l'analogue de $f'(x+\theta h)$.

On obtient de même une formule semblable pour l'intégrale suivant un contour fermé.

6. Formules d'intégration par parties. — L'analogie précédente se poursuit d'une façon frappante dans les deux séries d'égalités suivantes : dans la première de chaque couple, les symboles ont leur signification ordinaire; dans la seconde, φ est l'indication d'une fonction linéaire en ∇ ; u_1 et u_2 sont deux quantités algébriques ou complexes, fonctions du vecteur variable, indépendantes. Les dérivations de $\nabla_1, \nabla_2, \nabla$ portent respectivement sur u_1 , sur u_2 et à la fois sur u_1 et u_2 . Enfin les intégrales doubles sont étendues à une surface fermée; les intégrales triples à l'espace intérieur :

$$d(u_1 u_2) = du_1 u_2 + u_1 du_2,$$

$$\varphi(\nabla, u_1, u_2) = \varphi(\nabla_1, u_1, u_2) + \varphi(\nabla_2, u_1, u_2),$$

$$u_1 u_2 = \int du_1 u_2 = \int u_1 du_2,$$

$$\iint \varphi(\gamma, u_1, u_2) d\sigma = \iint \varphi(\nabla_1, u_1, u_2) dv + \iint \varphi(\nabla_2, u_1, u_2) dv,$$

$$\int du_1 u_2 + u_1 u_2 = \int u_1 du_2,$$

$$\iiint \varphi(\nabla_1, u_1, u_2) dv + \iint \varphi(\gamma, u_1, u_2) d\sigma = \iiint \varphi(\nabla_2, u_1, u_2) dv.$$

On écrirait de même les formules relatives à la comparaison des intégrales simples étendues à un contour fermé et à des intégrales doubles. Comme on a obtenu

$$(III) \quad \int \int \int \varphi(\nabla_1, u_1, u_2) dv = \int \int \varphi(v, u_1, u_2) d\tau = \int \int \int \varphi(\nabla_2, u_1, u_2) dv,$$

on trouve également

$$(IV) \quad \int \int \varphi(V, \nabla_1 v, u_1, u_2) d\tau = \int \varphi(\tau, u_1, u_2) ds = \int \int \varphi(V, \nabla_2 v, u_1, u_2) d\sigma.$$

Ces deux formules de la plus haute importance sont, comme on voit, de véritables formules d'intégration par parties. Nous allons maintenant donner quelques applications des formules précédentes.

7. Formules de Green. — Ces formules ne sont que des cas particuliers des précédentes; pour les obtenir, on donne à $\varphi(v)$ les formes qui suivent :

1° Dans la formule (I), on fera

$$\varphi(v) = V_1 S.v \nabla_2 V_2 - V_2 S.v \nabla_1 V_1 \quad (1), \quad = V_2 \left(v_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dots \right) - V_1 \left(v_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \dots \right),$$

V_1 et V_2 étant deux potentiels; on déduit de là

$$\begin{aligned} \varphi(\nabla) &= V_1 S.\nabla \nabla_2 V_2 - V_2 S.\nabla_1 V_1, \\ &= S.\nabla_1 V_1.\nabla_2 V_2 - V_2 \nabla_1^2 V_1 + V_1 \nabla_2^2 V_2 - S.\nabla_1 V_1.\nabla_2 V_2 \end{aligned}$$

ou enfin

$$\varphi(\nabla) = V_1 \nabla_2^2 V_2 - V_2 \nabla_1^2 V_1.$$

La formule (I) s'écrit donc

$$\int \int (V_1 S.v \nabla_2 V_2 - V_2 S.v \nabla_1 V_1) d\tau = \int \int \int (V_1 \nabla_2^2 V_2 - V_2 \nabla_1^2 V_1) dv \quad (2).$$

Cette formule, due à Green, s'écrit avec les notations habituelles

$$\int \int \left(V_2 \frac{\partial V_1}{\partial N} - V_1 \frac{\partial V_2}{\partial N} \right) d\tau = \int \int \int (V_2 \Delta_1 V_1 - V_1 \Delta_2 V_2) dv,$$

(1) Par S , je représente le signe scalar des *Quaternions*

$$(S.X.Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3).$$

(2) MAXWELL, *Electricité et Magnétisme*.

$\frac{\partial V}{\partial N}$ représentant la dérivée de V dans la direction normale à la surface d'intégration et Δ_2 le symbole $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$.

2° Dans la formule (III), on fera

$$\varphi(v) = V_1 S v \cdot \nabla_2 V_2;$$

il vient

$$\iiint S \cdot \nabla_1 V_1 \cdot \nabla_2 V_2 = \iint V_1 \cdot S \cdot v \cdot \nabla_2 V_2 d\sigma - \iiint V_1 \nabla_2^2 V_2 dv^{(1)},$$

formule de Green qu'on écrit d'ordinaire

$$\iiint \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) dv = \iint V_1 \frac{\partial V_2}{\partial N} d\sigma - \iiint V_1 \cdot \Delta_2 V_2 dv^{(1)}$$

3° Pour obtenir une généralisation de cette dernière formule, on fera dans la formule (III),

$$\varphi(v) = V_1 S \cdot v \cdot \varphi(\nabla_2 V_2);$$

on aura

$$\iiint S \cdot \nabla_1 V_1 \cdot \varphi(\nabla_2 V_2) = \iint V_1 S \cdot v \cdot \varphi(\nabla_2 V_2) d\sigma - \iiint V_1 S \cdot \nabla_2 \cdot \varphi(\nabla_2) \cdot V_2 \cdot dv^{(2)}.$$

Sans entrer dans le détail, je citerai encore, comme applications des formules précédentes :

1° L'équilibre des forces normales aux éléments d'une surface fermée et proportionnelles à ces éléments;

2° Les équations d'équilibre des pressions dans un milieu (LAMÉ, *Elasticité*);

3° Le calcul des pressions dans un champ électrique (MAXWELL, *Électricité et Magnétisme*);

4° L'assimilation d'un courant fermé à un feuillet magnétique (AMPÈRE);

5° Les formules sur les flux de chaleur (LAMÉ, *Théorie de la chaleur*).

(¹) MAXWELL, *Electricité et Magnétisme*.

(²) MAXWELL, *Ibid.*

Sur le ds^2 des surfaces réglées; par M. CH. BICHE.

(Séance du 17 avril 1889.)

Je me propose de montrer comment on peut déduire de l'expression de l'arc d'une courbe tracée sur une surface réglée des formules générales, dont je montrerai l'utilité en indiquant des applications.

1. *Notations.* — On peut considérer une surface réglée comme engendrée par une droite qui s'appuie sur une courbe donnée, les cosinus directeurs a, b, c de cette droite étant des fonctions d'un paramètre arbitraire, par exemple de l'arc σ de la courbe directrice. Pour définir la position de la génératrice par rapport à cette courbe, il suffit de donner l'angle φ que le plan tangent à la surface réglée, au point situé sur la directrice, fait avec le plan osculateur et l'angle θ que la génératrice fait avec la directrice. Si l'on appelle $\alpha\beta\gamma, \alpha'\beta'\gamma', \alpha''\beta''\gamma''$ les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale, on a

$$\begin{aligned}\cos\theta &= a\alpha + b\beta + c\gamma, \\ \sin\theta \cos\varphi &= a\alpha' + b\beta' + c\gamma', \\ \sin\theta \sin\varphi &= a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma''.\end{aligned}$$

Un point de la surface peut être défini par deux coordonnées, σ et r , dont la première fixe la génératrice qui passe par le point, en donnant son pied sur la directrice, et la seconde fixe le point sur la génératrice en donnant sa distance au pied. Toute relation entre σ et r définit une courbe tracée sur la surface.

2. *Calcul du ds^2 .* — Les coordonnées cartésiennes des points d'une courbe étant données d'après ce qui précède, en fonction de σ , par

$$X = x + ar, \quad Y = y + br, \quad Z = z + cr,$$

x, y, z désignant les coordonnées du pied de la génératrice, on trouve que l'arc de la courbe est donné par

$$\frac{dS^2}{d\sigma^2} = \left(\frac{dr}{d\sigma} + \cos\theta \right)^2 + H^2 r^2 + 2Lr + \sin^2\theta.$$

J'ai posé, pour abréger,

$$\frac{da^2}{d\sigma^2} + \frac{db^2}{d\sigma^2} + \frac{dc^2}{d\sigma^2} = H^2,$$

$$\alpha \frac{da}{d\sigma} + \beta \frac{db}{d\sigma} + \gamma \frac{dc}{d\sigma} = L.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la directrice so ligne de striction est que $L = 0$. Dans cette hypothèse, la distanc de deux génératrices infiniment voisines est $\sin\theta \cdot d\sigma$, et, comm l'angle a toujours pour expression $H d\sigma$, le paramètre de distri bution K s'exprime par

$$K = \frac{H}{\sin\theta},$$

et l'expression de $\frac{dS^2}{d\sigma^2}$ prend alors la forme réduite

$$\frac{dS^2}{d\sigma^2} = \left(\frac{dr}{d\sigma} + \cos\theta \right)^2 + \sin^2\theta [K^2 r^2 + 1].$$

3. *Conséquences.* — Cette réduction du terme indépendant d la parenthèse en $\frac{dr}{d\sigma}$, à la forme binôme, ne peut se faire que si l directrice est ligne de striction. Mais, comme on peut toujours écrire

$$\frac{dS^2}{d\sigma^2} = \left(\frac{dr}{d\sigma} + \cos\theta \right)^2 + H^2 \left(r + \frac{L}{H^2} \right)^2 + \frac{H^2 \sin^2\theta - L^2}{H^2},$$

on en déduit immédiatement que le r du point central a pour va leur la longueur ρ donnée par

$$(1) \quad \rho = - \frac{L}{H^2};$$

et si l'on remarque que, dans la forme réduite, le quotient de coefficient de r^2 par le terme indépendant est K^2 , on trouve

$$(2) \quad K^2 = \frac{H^2}{H^2 \sin^2\theta - L^2}.$$

Les formules (1) et (2) sont celles qui font l'objet de cette Note

Ce qui précède s'applique aux surfaces développables; car ce surfaces peuvent être considérées comme des cas limites des sur faces gauches, le paramètre de distribution devenant infini. L

ligne de striction est alors l'arête de rebroussement de la développable.

La condition pour qu'une surface réglée passant par une courbe soit développable est donc

$$H^2 \sin^2 \theta - L^2 = 0,$$

et le point où la génératrice touche l'arête de rebroussement est à une distance du pied donnée par

$$\rho = -\frac{\sin^2 \theta}{L}.$$

Si l'on calcule H^2 et L au moyen des courbures ω et π de la directrice et des angles θ et φ , on trouve facilement que ces dernières équations deviennent

$$(3) \quad \sin^2 \theta \left(\cot \theta \sin \varphi + \pi - \frac{d\varphi}{d\sigma} \right) = 0,$$

$$(4) \quad \rho = \frac{\sin \theta}{\frac{d\theta}{d\sigma} + \omega \cos \varphi}.$$

4. Application aux développables passant par une courbe donnée. — Si l'on suppose $\theta = 90^\circ$, on retrouve la théorie classique des développées; si l'on suppose θ constant ou, plus généralement, fonction de σ , l'équation (3) donne une équation de Riccati en $\tan \frac{\varphi}{2}$ (*).

Si l'on suppose φ donné, θ est déterminé immédiatement. En particulier, si l'on suppose φ constant, c'est-à-dire si l'on cherche les développables qui coupent sous un angle constant la développable des tangentes (problème inverse d'un problème traité par M. Molins, dans le *Journal de Liouville*, 1847), θ est donné par

$$\omega \cot \theta \sin \varphi + \pi = 0.$$

Cette équation s'interprète géométriquement de la façon suivante. Les génératrices des développables $\varphi = \text{const.}$ qui passent par un même point de la directrice sont situées sur un cône, dont

(*) Voir une Note de M. L. LEVY, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, novembre 1883.

L'équation rapportée au trièdre fondamental de cette courbe est

$$\pi y^2 - z^2 - \omega x z = 0.$$

Ce cône a pour plan de symétrie le plan rectifiant; les génératrices situées dans ce plan sont la tangente et la droite rectifiante; les sections circulaires sont perpendiculaires à ces deux droites ce qui détermine complètement le cône.

5. *Application aux normales.* — La directrice d'une normale est une trajectoire orthogonale des génératrices. Si l'on prend pour plans de coordonnées le plan tangent et les plans principaux, si l'on appelle R et R' les rayons de courbure principaux et ψ l'angle que la directrice fait avec la section principale de rayon R , on a

$$x = \cos \psi, \quad z = \sin \psi, \quad y = 0;$$

d'autre part, on peut voir que

$$\frac{da}{ds} = -\frac{\cos \psi}{R}, \quad \frac{db}{ds} = -\frac{\sin \psi}{R'}, \quad \frac{dc}{ds} = 0,$$

ce qui donne

$$H^2 = \frac{\cos^2 \psi}{R^2} + \frac{\sin^2 \psi}{R'^2},$$

$$-L = \frac{\cos^2 \psi}{R} - \frac{\sin^2 \psi}{R'};$$

par suite, les formules (1) et (2) deviennent, pour une normale,

$$\tilde{\tau} = \frac{\frac{\cos^2 \psi}{R} - \frac{\sin^2 \psi}{R'}}{\frac{\cos^2 \psi}{R^2} + \frac{\sin^2 \psi}{R'^2}},$$

$$K^2 = \frac{\left(\frac{\cos^2 \psi}{R^2} + \frac{\sin^2 \psi}{R'^2} \right)^2}{\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)^2 \sin^2 \psi \cos^2 \psi}.$$

Ces dernières formules permettent de faire l'étude du pinceau des normales voisines de OZ. En particulier, on peut obtenir la *torsion géodésique* de la façon suivante : si ω et π sont les courbures d'une géodésique, la normale correspondante, qui est formée des normales principales de cette courbe, a, d'après la fo-

mule (2), pour paramètre de distribution

$$K = \frac{\omega^2 + \pi^2}{\pi}.$$

Or, si l'on remarque que l'angle de deux normales principales est $\sqrt{\omega^2 + \pi^2} \times ds$, on voit que

$$\omega^2 + \pi^2 = H^2,$$

et l'on a

$$\pi = \frac{H^2}{K} = \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) \sin \psi \cos \psi,$$

ce qui est, aux notations près, la formule donnée par M. Bertrand.

*Remarques sur les lignes de courbure qui passent
par un ombilic; par M. CH. BICCHE.*

Voici, en résumé, les questions qui font l'objet du Mémoire suivant :

Je discute les considérations théoriques d'où l'on peut déduire l'équation des lignes de courbure pour un ombilic.

Après avoir établi des résultats connus, relatifs à la distribution des lignes de courbure qui passent par un ombilic, lorsque l'équation qui détermine leurs directions est du troisième degré, je discute un raisonnement erroné de Dupin.

Je fais remarquer que, contrairement à une assertion de M. Amiot, il passe toujours au moins deux lignes de courbure réelles par tout ombilic pour lequel l'équation est de degré pair.

Je montre que, si, par un point où toutes les courbures normales sont nulles, il passe trois lignes asymptotiques, les directions de ces lignes alternent avec celles des lignes de courbure.

Enfin je donne la liste des travaux que j'ai pu retrouver, et où il est question des lignes de courbure qui passent par un ombilic.

I.

Équation des lignes de courbure.

1. L'équation qui détermine les directions des lignes de courbure passant par un point d'une surface se réduit à une identité

si le point est un ombilic. Comme l'a fait remarquer Dupin, il ne s'ensuit pas nécessairement que par un ombilic il passe une infinité de lignes de courbure, mais seulement que leur nombre n'est plus 2. Pour lever l'indétermination dans le cas où elle n'est qu'apparente, on différentie l'équation ordinaire; de même que, pour trouver les tangentes en un point multiple d'une courbe $F(x, y) = 0$, on différentie l'équation

$$\frac{dF}{dx} - \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dx} = 0,$$

qui, pour le point considéré, devient une identité. Les auteurs qui, pour justifier cette règle, ont employé des considérations se rapportant directement à la question ont suivi deux voies différentes.

Poisson remarquait que, la plus courte distance Δ des normales en deux points voisins M et M' étant, en général, du premier ordre par rapport à MM' , si M est un point ordinaire, est d'un ordre supérieur pour les lignes de courbure. Si le point M est un ombilic, il y a des directions pour lesquelles Δ est, par rapport à MM' , un infiniment petit d'ordre supérieur à l'ordre obtenu pour les autres directions. Ce sont ces directions particulières que Poisson appelle *directions des lignes de courbure* passant par l'ombilic. Leur équation s'obtient en formant l'expression générale de Δ , et en écrivant que le terme principal est nul.

Cette méthode suppose une généralisation, parfaitement logique d'ailleurs, mais qui comporte, comme toutes les opérations de ce genre, un peu d'arbitraire. Aussi la méthode de Dupin, reprise et précisée par M. Amiot, me paraît-elle plus naturelle. Elle consiste à exprimer qu'une des lignes de courbure d'un point M' voisin de l'ombilic M passe par M . Ce qui revient à former l'équation des lignes de courbure pour le point $M'(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$, le point M ayant pour coordonnées (x, y, z) , et à écrire que l'une des racines de l'équation en $\frac{dy}{dx}$ ainsi obtenue est $\frac{\delta y}{\delta x}$.

2. Les deux méthodes conduisent à la même équation. En effet, supposons, pour plus de simplicité, que l'ombilic soit à l'origine des coordonnées, le plan $z = 0$ étant le plan tangent. Soit



$P(dx, dy, dz)$ un point voisin de l'ombilic O . La plus courte distance des normales en O et P est

$$\Delta = \frac{p dy - q dx}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

L'équation des lignes de courbure pour l'origine des coordonnées, lorsque OZ est la normale, peut s'écrire, en général,

$$(1) \quad dp dy - dq dx = 0.$$

La méthode de Poisson conduit à développer p et q en série, par rapport à dx et dy , et à évaluer à zéro le premier terme du développement de Δ qui n'est pas identiquement nul. Celle de Dupin conduit à différentier l'équation (1). Or la première différentielle de $dp dy - dq dx$, qui n'est pas identiquement nulle, est égale (à un facteur numérique près) au terme en question du développement de Δ .

En particulier, pour les axes considérés, on a, en appelant $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les dérivées troisièmes de z par rapport à x et y ,

$$\left(\beta + \gamma \frac{dy}{dx} \right) \left(\frac{dy^2}{dx^2} - 1 \right) + \left[(\alpha - \gamma) + (\beta - \delta) \frac{dy}{dx} \right] \frac{dy}{dx} = 0.$$

J'appellerai ombilics ordinaires ceux pour lesquels, les dérivées troisièmes n'étant pas toutes nulles, l'équation des lignes de courbure est du troisième degré; ombilics d'ordre supérieur ceux pour lesquels l'équation précédente se réduit à une identité; dans ce cas on différentie de nouveau, ce qui donne une équation de degré plus élevé.

3. Tout ce qui précède s'applique toutes les fois que les dérivées de z ont des valeurs bien déterminées à l'ombilic. Ce qui arrive pour les surfaces algébriques ou, plus généralement, pour les surfaces $F(x, y, z) = 0$, telles que :

1° Au point considéré les trois dérivées $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}$ ne soient pas toutes nulles, ce qui exprime que le point est simple;

2° Les dérivées d'ordre supérieur de F aient des valeurs bien déterminées.

Il est facile de s'en assurer en différentiant $F(x, y, z) = 0$ par

rapport à x et y (z étant fonction de x et y), ce qui donne les équations permettant de calculer les dérivées de z .

II.

Ombilics ordinaires.

4. Supposons d'abord qu'un ombilic ordinaire appartienne à une ligne ombilicale; l'équation des lignes de courbure est, dans tous les cas,

$$(2) \quad \left(\beta + \gamma \frac{dy}{dx} \right) \left(\frac{dy^2}{dx^2} - 1 \right) + \left[(z - \gamma) + (\beta - \delta) \frac{dy}{dx} \right] \frac{dy}{dx} = 0.$$

S'il y a une ligne ombilicale, il y a un point P voisin de O pour lequel les trois équations

$$\begin{aligned} (1 + q^2)r - (1 + p^2)t &= 0, \\ (1 + p^2)s - pqr &= 0, \\ (1 + q^2)s - pqt &= 0, \end{aligned}$$

obtenues en écrivant que la courbure d'une section normale ne dépend pas de sa direction, sont vérifiées. Si l'on développe les premiers membres de ces équations en série, comme ils sont nuls pour le point O, on a, comme premiers termes, des infiniment petits qui sont

$$(z - \gamma)dx + (\beta - \delta)dy$$

pour la première expression, et

$$\beta dx + \gamma dy$$

pour les deux autres. D'après l'hypothèse, ces deux termes doivent être nuls si l'on se déplace sur la direction OP. Cette direction est donnée par la valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui vérifie simultanément les équations

$$\beta + \gamma \frac{dy}{dx} = 0, \quad (z - \gamma) + (\beta - \delta) \frac{dy}{dx} = 0.$$

D'autre part, cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ vérifie l'équation (2), puisque tout le long de la ligne ombilicale l'équation

$$(dx + p dz) dq - (dy + q dz) dp = 0$$

est identiquement vérifiée. Si l'on supprime le facteur correspondant à la ligne ombilicale, l'équation (2) devient

$$\frac{dy^2}{dx^2} - \mu \frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

μ étant une combinaison des dérivées $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; on voit alors que, *si un ombilic ordinaire appartient à une ligne ombilicale, il passe par ce point deux lignes de courbure proprement dites, de directions rectangulaires.* La ligne ombilicale a une direction quelconque par rapport aux lignes de courbure. On peut le vérifier sur l'équation donnée par M. de Saint-Germain, à la fin de sa *Note sur les surfaces du troisième ordre qui ont une ligne d'ombilics*.

5. Dans le cas d'un ombilic ordinaire isolé, les directions des lignes de courbure peuvent affecter toutes sortes de dispositions.

Sur les surfaces du second degré, qui ne sont pas de révolution, il ne passe par chaque ombilic qu'une ligne de courbure réelle : c'est la section principale passant par l'ombilic; les racines imaginaires correspondent aux deux génératrices de la surface, qui sont des droites isotropes. En effet, une surface du second degré, rapportée à un ombilic, a une équation de la forme

$$xz = a(x^2 + y^2) + bz^2 + 2cxz,$$

si l'on prend pour plan des xz le plan principal qui contient l'ombilic. L'équation des lignes de courbure est alors

$$ac \frac{dy}{dx} \left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1 \right) = 0,$$

$ac \neq 0$ si la surface n'est ni un système de deux plans, ni une surface de révolution. Les planches de l'*Application de l'Analyse à la Géométrie*, par Monge, permettent de constater sur l'ellipsoïde ce fait général : une ligne de courbure passant par un ombilic ordinaire y est divisée en deux parties, dont l'une correspond aux courbures minima, l'autre aux courbures maxima.

Il est facile de voir que le cas réalisé pour les surfaces du second ordre n'est pas le seul; car, pour la surface

$$x^2 y^2 = 1,$$

les plans

$$x = y, \quad y = z, \quad x = z,$$

qui sont évidemment des plans de symétrie, coupent la surface suivant des lignes de courbure réelles; ces lignes se croisent à l'ombilic

$$x = y = z = 1,$$

en faisant deux à deux des angles égaux.

6. D'ailleurs l'équation des lignes de courbure, pour un ombilic, peut s'écrire, en général,

$$\gamma \frac{dy^2}{dx^2} + (2\beta - \delta) \frac{dy^2}{dx^2} + (\alpha - 2\gamma) \frac{dy}{dx} - \beta = 0,$$

et l'on peut disposer des valeurs des dérivées $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, de façon que les racines de l'équation aient les valeurs qu'on voudra; il est facile de s'en assurer et de former des exemples. On peut en former à volonté au moyen des surfaces représentées par l'équation

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1}{1.2.3} (2x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma xy^2 + \delta y^3),$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes. Pour toutes ces surfaces, l'ombilic $x = y = z = 0$ est isolé, car M. de Saint-Germain a déterminé toutes les surfaces du troisième degré qui ont une infinité d'ombilics, et les surfaces précédentes ne rentrent pas dans cette catégorie.

Je citerai, comme exemple, la surface

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{m}{1.2.3} [2x^3 + 3xy^2],$$

pour laquelle l'équation des lignes de courbure est $\frac{dy^2}{dx^2} = 0$, et la surface

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{m}{1.2.3} [x^3 + 3xy^2],$$

étudiée par M. Frost, surface pour laquelle l'équation des lignes de courbure est

$$\frac{dy}{dx} \left(\frac{dy^2}{dx^2} - 1 \right) = 0.$$

7. Dupin avait cru pouvoir affirmer que, sur toute surface, pour un ombilic ordinaire isolé, il n'y avait qu'une ligne de courbure réelle. Cette affirmation est détruite par ce qui précède; mais le raisonnement de Dupin étant assez spécieux, je crois qu'il est bon de le discuter pour en montrer le défaut. Dupin considérait les ombilics isolés comme des points doubles d'une ligne ombilicale imaginaire; les directions des tangentes à cette ligne devaient vérifier l'équation des lignes de courbure, qui, par suite, n'avait plus qu'une racine réelle correspondant à une ligne de courbure proprement dite.

Reprenons les équations de condition qui expriment qu'un point est un ombilic. Si l'on écrit que l'équation aux courbures principales a ses racines égales, on a

$$R = [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]^2 + 4(s^2 - rt)(1+p^2+q^2) = 0.$$

L'expression R se trouve aussi sous le radical correspondant à l'équation des lignes de courbure; elle peut se mettre sous forme d'une somme de quantités positives; pour arriver à ce résultat, en conservant la symétrie des formules par rapport aux variables indépendantes x et y ⁽¹⁾, il suffit de considérer R comme un trinôme en s ; on a alors

$$\frac{R}{(1+p^2)(1+q^2)} = \left[2s - pq \left(\frac{r}{1+p^2} + \frac{t}{1+q^2} \right) \right]^2 + (1+p^2+q^2) \left(\frac{r}{1+p^2} - \frac{t}{1+q^2} \right)^2.$$

Je poserai, pour abréger,

$$M = 2s - pq \left(\frac{r}{1+p^2} + \frac{t}{1+q^2} \right), \quad N = \left(\frac{r}{1+p^2} - \frac{t}{1+q^2} \right) \sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Les ombilics d'une surface $F(x, y, z) = 0$ sont donnés par les équations

$$F = 0, \quad M = 0, \quad N = 0;$$

les deux dernières expriment que la courbure normale est la même pour toutes les directions, et que l'équation ordinaire des lignes de courbure est vérifiée pour toutes les directions partant de

⁽¹⁾ M. Souillart a fait remarquer (*Journal de Crelle*, 65, 1866) qu'on pouvait déduire d'un *hessien bordé* des expressions symétriques par rapport aux trois coordonnées.

l'ombilic. Si les ombilics sont isolés, c'est-à-dire si les trois équations sont indépendantes, il y aura bien sur la surface une ligne imaginaire L , intersection de

$$F = 0 \quad \text{et} \quad M^2 + N^2 = 0;$$

le long de cette ligne, l'équation aux courbures principales et l'équation des lignes de courbure ont leurs racines doubles, tandis que, aux ombilics, les trois coefficients de chacune des équations sont tous nuls; ce qui est une condition plus restrictive; de sorte que, en tous les points de la ligne L , l'équation aux lignes de courbure n'est pas identiquement vérifiée; donc la ligne L n'est pas une ligne d'ombilics, et, de plus, elle n'est pas, en général, ligne de courbure.

Autrement, l'équation $M^2 + N^2 = 0$ n'est équivalente au système $M = 0, N = 0$ que si l'on se borne aux solutions réelles; les solutions imaginaires de la première ne conviennent pas aux deux autres; et, précisément dans le raisonnement de Dupin, il s'agissait de solutions imaginaires.

III.

Ombilics d'ordre supérieur.

8. La discussion complète des ombilics d'ordre supérieur a un intérêt très limité, car ces points sont très exceptionnels. Je veux seulement relever à leur égard une assertion erronée de M. Amiot. M. Amiot dit : « Il faut remarquer que, si l'équation des lignes de courbure est du quatrième degré, il peut n'y avoir pas de lignes de courbure passant par l'ombilic », et ceci n'est accompagné d'aucune démonstration. Le cas énoncé serait remarquable, s'il était réalisable; aussi je crois qu'il peut être intéressant de faire voir que, pour un ombilic, l'équation aux lignes de courbure n'a jamais toutes ses racines imaginaires : ce qui revient à dire qu'il n'y a pas d'ombilic où il ne passe pas de ligne de courbure réelle. Le seul cas à discuter est celui pour lequel le degré de l'équation est pair; je raisonnerai dans l'hypothèse où ce degré serait 4 : la méthode est générale.

9. J'appelle A, B, C, D, E les dérivées quatrièmes de z ; lorsque

l'équation du troisième degré se réduit à une identité, la différentiation conduit à

$$D \frac{dy^3}{dx^3} + (3C - E) \frac{dy^2}{dx^2} + 3(B - D) \frac{dy}{dx} + (A - 3C) \frac{dy}{dx} - B = 0,$$

équation qui ne se réduit à une identité que si, dans le développement de z , l'ensemble des termes du quatrième degré est, à un facteur près, $(x^2 + y^2)^2$. Je supposerai ce cas écarté, de façon que l'équation des lignes de courbure soit bien du quatrième degré.

On peut faire en sorte que A, B, C, D, E aient des valeurs données; mais on ne dispose pas entièrement des coefficients de l'équation, car trois d'entre eux ne contiennent que B et D . On ne peut donc plus, comme dans le cas du troisième degré, donner à l'équation en $\frac{dy}{dx}$ des racines prises arbitrairement.

Pour un ombilic de la nature de ceux que je considère, le développement de z en série donne

$$z = \frac{r}{2} (x^2 + y^2) + \varphi(x, y) + R,$$

$\varphi(x, y)$ étant un polynôme du quatrième degré, homogène, et R l'ensemble de termes de degré plus élevé. Pour toutes les surfaces qui ne diffèrent que par R , les dérivées quatrièmes et par suite l'équation des lignes de courbure à l'ombilic sont les mêmes; de sorte qu'il suffit de montrer que, pour la surface

$$z = \frac{r}{2} (x^2 + y^2) + \varphi(x, y),$$

l'équation des lignes de courbure ne peut pas avoir toutes ses racines imaginaires.

10. Coupons cette surface par un plan $z = h$, parallèle au plan tangent et situé du côté de ce plan où se trouvent les points de la surface voisins de l'ombilic; la projection de la section sur le plan tangent a pour équation en coordonnées polaires

$$h = \frac{r}{2} \rho^2 + \rho^4 \varphi(\cos \theta, \sin \theta).$$

L'équation en ρ a deux racines réelles voisines de O, autrement dit, la section présente dans le voisinage de l'origine une boucle fermée réelle qui diffère très peu du cercle

$$\rho = \sqrt{\frac{2h}{r}}.$$

Le rayon vecteur d'un point de cette boucle est variable, si l'on suppose que φ satisfasse à la restriction énoncée plus haut, et d'où résulte que l'équation des lignes de courbure est du quatrième degré. Le rayon vecteur a donc au moins un maximum et un minimum réels. Soit M un point pour lequel il y a un maximum; la normale en ce point rencontre OZ, car elle se projette sur le rayon vecteur: donc OM est la direction d'une ligne de courbure réelle. Pour la surface du quatrième degré considérée, la normale en M rencontre *effectivement* OZ; autrement dit, les lignes de courbure sont planes. Il est d'ailleurs facile de s'en assurer en prenant pour l'un des axes de coordonnées la tangente à l'une de ces lignes. Cela n'aurait pas lieu pour une surface quelconque. La courbe des centres de courbure correspondant à la ligne de courbure considérée aurait simplement un plan osculateur stationnaire au point situé sur la normale à l'ombilic.

Je remarquerai, en terminant, que de ce qui précède résulte le théorème d'Algèbre suivant :

Si $\varphi(x, y)$ est un polynôme homogène de degré $2n$, $y\varphi'_x - x\varphi'_y$ admet toujours au moins deux facteurs réels du premier degré.

IV.

Points d'inflexion totale.

11. Il peut arriver que sur une surface à courbures opposées on ait à la fois en un point

$$r = 0, \quad s = 0, \quad t = 0.$$

En ce point toutes les sections normales ont une courbure nulle; il peut donc être assimilé à un ombilic. M. Amiot a étudié ces points dans un Mémoire couronné par l'Académie de Belgique, en 1846, et les a appelés *points d'inflexion totale*, parce qu'en ces points toutes les courbures changent de sens. M. de Saint-

Germain a montré (*Comptes rendus*, 1885) qu'il y avait des surfaces du troisième degré ayant une infinité de points de cette nature.

L'équation des lignes de courbure et celle des lignes asymptotiques se réduisent à des identités; on a, comme dans le cas des ombilics ordinaires, pour équation des lignes de courbure,

$$\gamma dy^2 + (\alpha\beta - \delta) dx dy^2 + (\alpha - 2\gamma) dx^2 dy - \beta dx^2 = 0.$$

Pour trouver les lignes asymptotiques passant par l'ombilic, on peut écrire que l'une des lignes asymptotiques d'un point voisin passe par le point O considéré, ce qui donne

$$\alpha dx^2 + 3\beta dx dy^2 + 3\gamma dx^2 dy + \delta dy^2 = 0,$$

équation que l'on obtiendrait d'ailleurs en déterminant les directions des lignes qui ont non plus trois, mais quatre points communs avec le plan tangent. Ce plan est alors stationnaire pour les asymptotiques. Celles-ci peuvent être toutes trois réelles; il peut y en avoir d'imaginaires ou de confondues, on le voit, comme pour les lignes de courbure.

Je ferai simplement remarquer que, *comme dans le cas des points ordinaires, les directions des asymptotiques sont séparées par celles des lignes de courbure*. En effet, posons

$$\frac{dx}{\cos\theta} = \frac{dy}{\sin\theta} \quad \text{et} \quad \varphi(\theta) = \alpha \cos^2\theta + 3\beta \cos^2\theta \sin\theta + 3\gamma \cos\theta \sin^2\theta + \delta \sin^2\theta,$$

on voit que $\varphi(\theta) = 0$ est l'équation qui donne les directions des asymptotiques; or on peut remarquer que

$$-\frac{1}{3}\varphi'(\theta) = \gamma \sin^2\theta + (\alpha\beta - \delta) \sin^2\theta \cos\theta + (\alpha - 2\gamma) \sin\theta \cos^2\theta - \beta \cos^2\theta.$$

de sorte que $\varphi'(\theta) = 0$ donne des lignes de courbure. L'application du théorème de Rolle aux équations $\varphi(\theta) = 0$, $\varphi'(\theta) = 0$ justifie la proposition énoncée.

V.

Bibliographie.

MONGE. *Application de l'Analyse à la Géométrie*, §§ XVI et XIX.

DUPIN. *Développements de Géométrie*. Troisième Mémoire, art. IV et V, p. 157 et suiv.

POISSON. *Mémoire sur la courbure des surfaces*, § VIII. (*Journal de Crelle*, t. 8, p. 280-297; réimprimé dans le *Journal de l'École Polytechnique*, XXI^e Cahier, p. 204-227; 1832.)

AMIOT. *Note sur quelques points de la théorie analytique des surfaces*. (*Journal de Mathématiques*, t. XII, p. 129-135; 1847.)

O. BONNET. *Note sur les ombilics des surfaces*. (*Journal de l'École Polytechnique*, XXX^e Cahier, p. 165-170; 1845.)

VIEILLE. *Remarques sur la théorie des lignes de courbure*, etc. (*Journal de Mathématiques*, t. XX, p. 126; 1855.)

CAYLEY. *On differential equations and umbilici*. (*Philosophical Magazine*, t. XXVI, p. 373-379, 441-452; 1863.)

P. FROST. *On the direction of lines of curvature in the neighbourhood of an umbilicus*. (*Quarterly Journal*, t. X, p. 78; 1870.)

CAYLEY. *Note on Mr. Frost paper*. (*Quarterly Journal*, t. X, p. 111-113; 1870.)

R. HOPPE. *Krümmungslinien in den Nabelpunkten von Flächen*. [*Archiv für die Math. und Physik*, t. LXX, p. 289-301. (Analysé dans *Jahrbuch über die Fortschritte der Math.*, p. 669; 1886.)]

DARBOUX. *Sur les lignes de courbure de la surface des ondes*. (*Comptes rendus*, t. XCVII, p. 1133; 19 nov. 1883.)

DE SAINT-GERMAIN. *Sur certaines surfaces du troisième ordre qui ont une infinité d'ombilics*. (*Comptes rendus*, t. C, p. 1246; 14 déc. 1885.)

Remarques sur les transformations isogonales;

par M. M. D'OCAGNE.

(Séance du 17 juillet 1889.)

M. Laisant, généralisant un théorème de Transon, a fait voir ⁽¹⁾ que si, dans une transformation isogonale (c'est-à-dire qui conserve les angles), les centres de courbure de diverses courbes, relatifs à un point où elles se croisent toutes, sont situés sur une conique, les centres de courbure des courbes transformées, répondant à leur point de croisement, sont également situés sur une conique.

Cette proposition est susceptible elle-même d'une importante généralisation. On a, en effet, ce théorème qui se démontre d'ailleurs très aisément en partant de la remarquable formule (7) de la Note citée de M. Laisant :

Dans toute transformation isogonale, la figure formée par les centres de courbure de diverses courbes se croisant en un point, autour de ce point, et la figure formée par les centres de courbure des courbes transformées, autour du point correspondant, sont HOMOGRAPHIQUES.

Profitant de ce que nous sommes sur ce sujet, nous présentons encore une remarque sur une transformation isogonale particulière d'une grande importance, celle de Chasles et de W. Roberts.

On sait que, dans cette transformation, on fait correspondre au point A_1 , dont les coordonnées polaires sont ρ_1 et ω_1 , le point A_n , dont les coordonnées polaires ρ_n et ω_n sont données par

$$\rho_n = \rho_1^n, \quad \omega_n = n\omega_1.$$

Voici sous quelle forme, excessivement simple, on peut mettre, pour cette transformation, la relation entre les rayons de cour-

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société mathématique*, t. XV, p. 39; 1887.

bure en deux points correspondants, relation que nous avons établie ailleurs ⁽¹⁾.

Soient C_1 et C_n les centres de courbure répondant respectivement aux points A_1 et A_n pour une courbe donnée et sa transformée, O étant le pôle de la transformation. D_1 et D_n étant les pieds des perpendiculaires abaissées de C_1 sur OA_1 et de C_n sur OA_n , appelons H le point où la droite $D_1 D_n$ coupe la droite $A_1 A_n$. Dès lors, le théorème que nous avons obtenu consiste en ce qu'on a

$$\frac{HA_1}{HA_n} = \frac{1}{n}.$$

Sur l'application des coordonnées parallèles à la démonstration d'un théorème de Chasles relatif aux surfaces algébriques ; par M. M. D'OCAGNE.

(Séance du 19 février 1890.)

1. Le théorème que nous avons en vue est le suivant :

Le centre des moyennes distances des points de contact d'une surface algébrique avec ses plans tangents parallèles à un plan donné est fixe quel que soit ce plan.

La démonstration analytique de ce théorème par les coordonnées cartésiennes est difficile et compliquée. Elle a été donnée par Liouville dans un Mémoire ⁽²⁾ qui présente un très grand intérêt au point de vue de la théorie de l'élimination dans les équations algébriques, mais qui fait ressortir que le système cartésien ne constitue assurément pas la voie la plus naturelle pour atteindre analytiquement au théorème de Chasles.

⁽¹⁾ *Jornal de Sciencias matematicas e astronomicas*, t. VI, p. 5; 1885.

⁽²⁾ *Journal de Mathématiques de Liouville*, t. VI, p. 345. M. Fourret a fait voir, dans une Communication verbale à la Société, que la démonstration de Liouville pouvait être grandement simplifiée dans le cas du plan. Mais cette simplification qui consiste à montrer qu'on peut substituer à la courbe le système de ses asymptotes, et, par suite, aux points de contact des tangentes les points de rencontre mutuelle des asymptotes, ne subsiste pas pour le cas de l'espace.

Le système qui se présente alors à l'esprit est celui des *coordonnées parallèles* où un plan quelconque est déterminé par les segments u, v, w qu'il détermine sur trois axes parallèles, donnés, à partir d'origines données A, B, C. Et il est très remarquable que c'est à ce système que, dès 1829, Chasles lui-même a recouru pour établir analytiquement son théorème (1).

2. La démonstration de Chasles (un peu alourdie dans le texte original par l'emploi inutile de la formule de Taylor généralisée) peut être réduite à ce qui suit :

L'équation en coordonnées parallèles d'une surface algébrique quelconque peut être écrite sous la forme

$$w^n + (au + bv + c)w^{n-1} + R_{n-2} = 0,$$

R_{n-2} étant un polynôme du degré $n - 2$ en w . Dès lors, si nous donnons à u et v des valeurs déterminées quelconques et que $w_1, w_2, \dots, w_n$ soient les valeurs correspondantes de w données par l'équation précédente, nous avons

$$\sum_{i=1}^{i=n} w_i = -(au + bv + c).$$

Cette équation exprime que, *si d'une droite prise dans le plan des uv on mène les n plans tangents à la surface, le plan P déterminé par cette droite et le centre des moyennes distances des points où ces n plans tangents coupent l'axe des w , passe par un point fixe.*

Si le plan des uv est rejeté à l'infini, le plan P passe évidemment par le centre des moyennes distances des points de contact des n plans tangents, lesquels sont devenus parallèles. Appelons G ce centre des moyennes distances, H le point fixe par lequel, en vertu du théorème précédent, passe constamment le plan P. Si nous considérons les plans tangents dans une position infiniment voisine, pour laquelle G viendrait en G', nous voyons que le mou-

(1) *Correspondance mathématique et physique de Quetelet*, t. VI, p. 81. C'est là que se trouve émise pour la première fois l'idée des coordonnées parallèles, sur laquelle Chasles revient dans son grand Mémoire sur le principe de dualité (p. 635) et qui a été approfondie depuis, principalement par M. Schwegering, par M. Franklin et par nous-même.

vement infiniment petit du plan P revient à une rotation instantanée autour de l'axe mené dans ce plan perpendiculairement à l'élément GG'. Le point H doit donc nécessairement se trouver sur cet axe, et, comme la direction de cet axe peut être prise d'une manière quelconque autour de G, il faut que H coïncide avec G. Ainsi donc, le point G est fixe, et le théorème est démontré.

3. Cette démonstration, que nous avons trouvée avant d'avoir connaissance de la Note de Chasles et qui est d'une forme un peu plus simple que celle de l'illustre géomètre, ne constitue point, quoi qu'en dise celui-ci, une démonstration *directe* de son théorème. En effet, l'éloignement à l'infini du plan des *uv* enlève toute signification à l'équation sur laquelle repose le théorème préliminaire et fait qu'on ne peut en déduire la détermination analytique du point de Chasles, de sorte qu'en réalité, on établit par la marche précédente, au moyen des coordonnées parallèles, un théorème différent de celui de Chasles, pour en déduire ensuite celui-ci à l'aide de considérations géométriques d'ailleurs très faciles.

C'est la démonstration *directe* du théorème de Chasles par les coordonnées parallèles, avec la détermination analytique complète du point de Chasles au moyen de ces coordonnées, qui fait l'objet de la présente Note. On verra que, bien qu'exigeant plus de calcul que la précédente, cette démonstration est, en somme, très simple aussi ; elle fixe, en outre, d'une façon remarquable, la position du point de Chasles dans l'espace, au moyen des coefficients de l'équation de la surface donnée.

4. Donnons-nous donc, dans l'espace, trois axes parallèles quelconques Au, Bv, Cw.

Soit, par rapport à ces axes,

$$(1) \quad F(u, v, w) = 0$$

l'équation, supposée de degré *n*, d'une surface algébrique quelconque. Pour mener à cette surface des plans tangents parallèles entre eux, nous adjoindrons, à l'équation (1) les suivantes,

$$(2) \quad \begin{cases} w - u = s, \\ w - v = t. \end{cases}$$

Soient, pour des valeurs déterminées de s et t , (u_1, v_1, w_1) , (u_2, v_2, w_2) , ..., (u_n, v_n, w_n) les systèmes de solutions des équations (1) et (2). Le point de contact du plan tangent (u_i, v_i, w_i) a pour équation

$$(u - u_i) \frac{\partial w_i}{\partial u_i} + (v - v_i) \frac{\partial w_i}{\partial v_i} - (w - w_i) = 0.$$

Le centre des moyennes distances des n points de contact a donc pour équation

$$(3) \quad Lu + Mv + Nw + P = 0,$$

avec

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\frac{\partial w_i}{\partial u_i}}{\frac{\partial w_i}{\partial u_i} + \frac{\partial w_i}{\partial v_i} - 1}, \quad M = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\frac{\partial w_i}{\partial v_i}}{\frac{\partial w_i}{\partial u_i} + \frac{\partial w_i}{\partial v_i} - 1}, \\ N = - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\frac{\partial w_i}{\partial u_i} + \frac{\partial w_i}{\partial v_i} - 1}, \quad P = - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{u_i \frac{\partial w_i}{\partial u_i} + v_i \frac{\partial w_i}{\partial v_i} - w_i}{\frac{\partial w_i}{\partial u_i} + \frac{\partial w_i}{\partial v_i} - 1}. \end{array} \right.$$

La question d'Algèbre qu'il s'agit de résoudre consiste à faire voir que ces coefficients sont constants. Pour cela, substituons aux variables indépendantes u et v les variables s et t . Nous avons

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s}$$

ou, d'après (2),

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial u} \left(\frac{\partial w}{\partial s} - 1 \right) + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial s};$$

d'où

$$(5) \quad \frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} - 1} = \frac{\partial w}{\partial s}.$$

De même

$$(6) \quad \frac{\frac{\partial w}{\partial v}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} - 1} = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

De (5) et (6), on déduit que

$$(7) \quad \frac{1}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} - 1} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t} - 1.$$

et, en tenant compte de (2), que

$$(8) \quad \frac{u \frac{\partial w}{\partial u} + v \frac{\partial w}{\partial v} - w}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} - 1} = -s \frac{\partial w}{\partial s} - t \frac{\partial w}{\partial t} + w.$$

Transformant les formules (4) au moyen de (5), (6), (7) et (8), en remarquant que s et t ont les mêmes valeurs pour les n plans tangents, on a

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial w_i}{\partial s}, \quad M = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial w_i}{\partial t}, \\ N = \sum_{i=1}^{i=n} \left(1 - \frac{\partial w_i}{\partial s} - \frac{\partial w_i}{\partial t} \right), \quad P = \sum_{i=1}^{i=n} \left(s \frac{\partial w_i}{\partial s} + t \frac{\partial w_i}{\partial t} - w_i \right). \end{array} \right.$$

Or, si l'on remplace, dans (1), u et v par leurs valeurs tirées de (2), on peut mettre le résultat obtenu sous la forme

$$(10) \quad A_n w^n + (A_{n-1}s + B_{n-1}t + C_{n-1})w^{n-1} + R_{n-2} = 0,$$

R_{n-2} étant seulement du degré $n-2$ en w . Dès lors

$$\sum_{i=1}^{i=n} w_i = -\frac{A_{n-1}}{A_n} s - \frac{B_{n-1}}{A_n} t - \frac{C_{n-1}}{A_n};$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial w_i}{\partial s} &= -\frac{A_{n-1}}{A_n}, & \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial w_i}{\partial t} &= -\frac{B_{n-1}}{A_n}, \\ \sum_{i=1}^{i=n} \left(1 - \frac{\partial w_i}{\partial s} - \frac{\partial w_i}{\partial t} \right) &= \frac{A_{n-1}}{A_n} + \frac{B_{n-1}}{A_n} + n, \\ \sum_{i=1}^{i=n} \left(s \frac{\partial w_i}{\partial s} + t \frac{\partial w_i}{\partial t} - w_i \right) &= \frac{C_{n-1}}{A_n}. \end{aligned}$$

Transformant au moyen de ces formules les valeurs (9) de L ,

M, N, P, et portant ces valeurs dans (3), on a, pour équation du point de Chasles,

$$(11) \quad -A_{n-1}u - B_{n-1}v + (A_{n-1} + B_{n-1} + nA_n)w + C_{n-1} = 0,$$

et, comme les coefficients de cette équation sont constants, ce point est fixe.

La démonstration directe du théorème de Chasles est ainsi faite. Mais il est intéressant de la compléter en cherchant à exprimer les coefficients de l'équation (10) au moyen de ceux de l'équation (1) donnée. C'est ce que nous allons faire maintenant, d'abord par un calcul direct, puis par une marche moins élémentaire, mais plus élégante.

5. L'équation (1) peut s'écrire

$$\begin{aligned} a_0 w^n + (a_1 u + b_1 v) w^{n-1} + (a_2 u^2 + b_2 uv + c_2 v^2) w^{n-2} + \dots \\ + a'_0 w^{n-1} + (a'_1 u + b'_1 v) w^{n-2} + \dots \\ + \dots + a_0^{(n)} = 0, \end{aligned}$$

la première ligne contenant l'ensemble homogène des termes de degré n que nous représenterons par $F_n(u, v, w)$, la seconde, l'ensemble homogène des termes de degré $n-1$, ou $F_{n-1}(u, v, w)$, ...

Si maintenant nous remplaçons dans cette équation u et v par $w-s$ et $w-t$ et que nous développons par la formule du binôme, nous trouvons que

$$\begin{aligned} A_n &= a_0 + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2 + c_2) + \dots \\ A_{n-1} &= -[a_1 + (2a_2 + b_2) + (3a_3 + 2b_3 + c_3) + \dots], \\ B_{n-1} &= -[b_1 + (b_2 + 2c_2) + (b_3 + 2c_3 + 3d_3) + \dots], \\ C_{n-1} &= a'_0 + (a'_1 + b'_1) + (a'_2 + b'_2 + c'_2) + \dots, \end{aligned}$$

et nous en déduisons que

$$A_{n-1} + B_{n-1} + nA_n = na_0 + (n-1)(a_1 + b_1) + (n-2)(a_2 + b_2 + c_2) + \dots,$$

Nous pouvons remarquer que les quatre dernières formules peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= -\frac{\partial}{\partial u} F_n(1, 1, 1), \quad B_{n-1} = -\frac{\partial}{\partial v} F_n(1, 1, 1), \quad C_{n-1} = F_{n-1}(1, 1, 1), \\ A_{n-1} + B_{n-1} + nA_n &= \frac{\partial}{\partial w} F_n(1, 1, 1). \end{aligned}$$

Dès lors l'équation (11) du point de Chasles devient

$$(12) \quad u \frac{\partial}{\partial u} F_n(1, 1, 1) + v \frac{\partial}{\partial v} F_n(1, 1, 1) + w \frac{\partial}{\partial w} F_n(1, 1, 1) + F_{n-1}(1, 1, 1) = 0.$$

Le point G représenté par cette équation se définit géométriquement comme suit : *Menons par le point G, à la direction des axes Au, Bv, Cw, une parallèle qui coupe le plan ABC des origines en g :*

1° *Le point g est le barycentre des points A, B, C, respectivement affectés des coefficients*

$$\frac{\partial}{\partial u} F_n(1, 1, 1), \quad \frac{\partial}{\partial v} F_n(1, 1, 1), \quad \frac{\partial}{\partial w} F_n(1, 1, 1).$$

2° *On a*

$$gG = \frac{-F_{n-1}(1, 1, 1)}{\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w}\right) F_n(1, 1, 1)},$$

ou, d'après le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes

$$gG = - \frac{F_{n-1}(1, 1, 1)}{n F_n(1, 1, 1)}.$$

6. Voici maintenant l'autre méthode destinée à faire connaître les coefficients de l'équation (11).

Établissons d'abord un lemme.

Si $F(x, y, \dots)$ est un polynôme de degré n en $x, y, \dots$, la formule de Taylor généralisée donne

$$(13) \quad F(x + x_0 w, y + y_0 w, \dots) = \sum_{p=0}^{p=n} K_p w^p,$$

où, sous forme symbolique,

$$(14) \quad K_p = \frac{1}{p!} \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + \dots \right)^p F(x, y, z).$$

Cette valeur de K_p est développée suivant les puissances de $x_0, y_0, \dots$. Cherchons à la développer suivant les puissances de $x, y, \dots$; pour cela, remarquons que le symbole

$$\left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + \dots \right)^p$$

étant additif, on a, en appelant $F_j(x, y, z)$ l'ensemble homogène

des termes de degré j de $F(x, y, z)$, et observant que pour $j < p$, le résultat de l'opération d'indice p est nul,

$$K_p = \sum_{j=p}^{j=n} \frac{1}{p!} \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + \dots \right)^p F_j(x, y, z).$$

Mais, d'après une propriété connue des fonctions homogènes (propriété des *émanants*),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p!} \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + \dots \right)^p F_j(x, y, z) \\ &= \frac{1}{(j-p)!} \left(x \frac{\partial}{\partial x_0} + y \frac{\partial}{\partial y_0} + \dots \right)^{j-p} F_j(x_0, y_0, z_0); \end{aligned}$$

donc, en remplaçant $j - p$ par i ,

$$(15) \quad K_p = \sum_{i=0}^{i=n-p} \left[\frac{1}{i!} \left(x \frac{\partial}{\partial x_0} + y \frac{\partial}{\partial y_0} + \dots \right)^i F_{p+i}(x_0, y_0, z_0) \right].$$

Notre lemme est établi. Appliquons-le au développement de $F(u - s, v - t, w)$ suivant les puissances de w , les coefficients étant mis sous forme de polynômes en s et t . Ce développement sera donné par les formules (13) et (15), en y faisant

$$\begin{aligned} x &= -s, & y &= -t, & z &= 0, \\ x_0 &= 1, & y_0 &= 1, & z_0 &= 1. \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} K_n &= F_n(1, 1, 1), \\ K_{n-1} &= -s \frac{\partial}{\partial u} F_n(1, 1, 1) - t \frac{\partial}{\partial v} F_n(1, 1, 1) + F_{n-1}(1, 1, 1); \end{aligned}$$

donc, en se référant aux notations de l'équation (10),

$$\begin{aligned} A_n &= F_n(1, 1, 1), & A_{n-1} &= -\frac{\partial}{\partial u} F_n(1, 1, 1), & B_{n-1} &= -\frac{\partial}{\partial v} F_n(1, 1, 1), \\ C_{n-1} &= F_{n-1}(1, 1, 1), \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} A_{n-1} + B_{n-1} + n A_n &= n F_n(1, 1, 1) - \frac{\partial}{\partial u} F_n(1, 1, 1) - \frac{\partial}{\partial v} F_n(1, 1, 1) \\ &= \frac{\partial}{\partial w} F_n(1, 1, 1), \end{aligned}$$

en vertu du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes. Portant ces diverses valeurs dans (11), on retrouve l'équation (12).

7. Si

$$n F_n(1, 1, 1) = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w} \right) F_n(1, 1, 1) = 0,$$

on voit, d'après l'énoncé qui termine le n° 3, que le point g est à l'infini du plan ABC et que la distance Gg est infiniment grande, c'est-à-dire que la surface représentée par l'équation (1) est tangente au plan de l'infini.

Ainsi, lorsque la somme des coefficients des termes du degré le plus élevé est nulle, la surface est tangente au plan de l'infini. On peut, sans difficulté, le voir directement. En particulier, si l'équation est du second degré, la quadrique qu'elle représente est un paraboloides.

8. L'équation (12) du point de Chasles va nous permettre de démontrer le théorème suivant :

Le point de Chasles d'une surface algébrique est le pôle relativement à cette surface du plan de l'infini.

Rappelons d'abord que le plan polaire P d'un point H par rapport à une surface algébrique est le lieu des centres harmoniques relativement à H des points où une droite menée par H rencontre la surface algébrique. Le point H est dit le *pôle* du plan P relativement à la surface.

Supposons que cette surface soit celle que représente l'équation (1). Si l'on rend cette équation homogène par l'introduction d'une variable z , en sorte que

$$F(u, v, w, z) = F_n(u, v, w) + z F_{n-1}(u, v, w) + \dots + z^n F_0(u, v, w),$$

on a, pour l'équation du pôle du plan (u_0, v_0, w_0, z_0) ,

$$u \frac{\partial F}{\partial u_0} + v \frac{\partial F}{\partial v_0} + w \frac{\partial F}{\partial w_0} + z \frac{\partial F}{\partial z_0} = 0.$$

Or nous avons, en posant $\frac{u_0}{w_0} = \lambda$, $\frac{v_0}{w_0} = \mu$, et remarquant que les dérivées partielles de $F_i(u, v, w)$ sont des fonctions homogènes

de degré $i - 1$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u_0} &= w_0^{n-1} \frac{\partial}{\partial u} F_n(\lambda, \mu, 1) + z_0 w_0^{n-2} \frac{\partial}{\partial u} F_{n-1}(\lambda, \mu, 1) + \dots \\ &= w_0^{n-1} \left[\frac{\partial}{\partial u} F_n(\lambda, \mu, 1) + \frac{z_0}{w_0} \frac{\partial}{\partial u} F_{n-1}(\lambda, \mu, 1) + \dots \right].\end{aligned}$$

De même pour $\frac{\partial F}{\partial v_0}$ et $\frac{\partial F}{\partial w_0}$. Quant à $\frac{\partial F}{\partial z_0}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial z_0} &= w_0^{n-1} F_{n-1}(\lambda, \mu, 1) + 2 z_0 w_0^{n-2} F_{n-2}(\lambda, \mu, 1) + \dots \\ &= w_0^{n-1} \left[F_{n-1}(\lambda, \mu, 1) + 2 \frac{z_0}{w_0} F_{n-2}(\lambda, \mu, 1) + \dots \right].\end{aligned}$$

L'équation du pôle du plan (u_0, v_0, w_0) peut donc s'écrire en remettant l'unité à la place de z ,

$$Lu + Mv + Nw + P = 0,$$

avec

$$\begin{aligned}L &= \frac{\partial}{\partial u} F_n(\lambda, \mu, 1) + \frac{1}{w_0} \frac{\partial}{\partial w} F_{n-1}(\lambda, \mu, 1) + \frac{1}{w_0^2} \frac{\partial}{\partial u} F_{n-2}(\lambda, \mu, 1) + \dots, \\ M &= \frac{\partial}{\partial v} F_n(\lambda, \mu, 1) + \frac{1}{w_0} \frac{\partial}{\partial v} F_{n-1}(\lambda, \mu, 1) + \frac{1}{w_0^2} \frac{\partial}{\partial w} F_{n-2}(\lambda, \mu, 1) + \dots, \\ N &= \frac{\partial}{\partial w} F_n(\lambda, \mu, 1) + \frac{1}{w_0} \frac{\partial}{\partial w} F_{n-1}(\lambda, \mu, 1) + \frac{1}{w_0^2} \frac{\partial}{\partial w} F_{n-2}(\lambda, \mu, 1) + \dots; \\ P &= F_{n-1}(\lambda, \mu, 1) + \frac{2}{w_0} F_{n-2}(\lambda, \mu, 1) + \frac{3}{w_0^2} F_{n-3}(\lambda, \mu, 1) + \dots.\end{aligned}$$

Pour le plan de l'infini, on a

$$\frac{1}{w_0} = 0, \quad \lambda = 1, \quad \mu = 1.$$

Les coefficients dont les valeurs viennent d'être écrites deviennent alors

$$\begin{aligned}L &= \frac{\partial}{\partial u} F_n(1, 1, 1), & M &= \frac{\partial}{\partial v} F_n(1, 1, 1), & N &= \frac{\partial}{\partial w} F_n(1, 1, 1), \\ P &= F_{n-1}(1, 1, 1).\end{aligned}$$

On retrouve donc la même équation que celle (12) du point de Chasles, et le théorème sus-énoncé est démontré.

Au moyen d'une transformation homographique, on amène ce théorème à la forme suivante :

Si par une droite quelconque, prise dans un plan π , on

mène les n plans tangents à une surface algébrique de la $n^{\text{ième}}$ classe, le pôle du plan π par rapport au système des points de contact de ces n plans tangents se confond avec le pôle du même plan par rapport à la surface.

En particulier : Le pôle d'un plan par rapport à une surface algébrique se confond avec le pôle du même plan par rapport au système des points de contact des plans tangents à la surface parallèles à ce plan.

Sur le problème du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe ; par M^{lle} NANNY LAGERBORG.

Dans le problème du mouvement d'un corps solide de révolution fixé par un point de son axe, on est ramené à exprimer le temps à l'aide d'une quadrature elliptique. On sait que, dans le cas plus étendu où il existe une fonction de force dépendant uniquement de l'angle θ que fait l'axe du corps avec une droite fixe, on est encore ramené à une quadrature. Dans ce cas, les surfaces de niveau sont des surfaces de révolution autour de la droite fixe. Je me suis proposé de trouver une fonction de force conduisant dans le cas général à des intégrales elliptiques.

L'expression de la force vive est, après un choix convenable des axes de coordonnées,

$$2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2$$

ou, en introduisant les angles d'Euler,

$$p = \sin \varphi \sin \theta \frac{d\psi}{dt} + \cos \varphi \frac{d\theta}{dt},$$

$$q = \cos \varphi \sin \theta \frac{d\psi}{dt} - \sin \varphi \frac{d\theta}{dt},$$

$$r = \frac{dz}{dt} + \cos \theta \frac{d\psi}{dt},$$

$$2T = A \left[\sin^2 \theta \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + C \left[\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + 2 \cos \theta \frac{dz}{dt} \frac{d\psi}{dt} + \cos^2 \theta \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right].$$

Comme la fonction de force est indépendante de ψ et de φ , je peux appliquer la remarque faite par Jacobi, et j'obtiens alors les deux intégrales suivantes

$$(1) \quad A \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} + C \cos^2 \theta \frac{d\psi}{dt} + C \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} = h,$$

$$(2) \quad C \frac{d\varphi}{dt} + C \cos \theta \frac{d\psi}{dt} = Ck,$$

où h et k désignent deux constantes.

On a encore, en désignant par U la fonction de force,

$$(3) \quad 2T = 2(U + H), \quad H = \text{une const.}$$

Par conséquent,

$$A \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} = h - Ck \cos \theta,$$

$$A \sin^2 \theta \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + A \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + Ck^2 = 2(U + H),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{h - Ck \cos \theta}{A \sin^2 \theta},$$

$$A^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2A(U + H) \sin^2 \theta - ACk^2 \sin^2 \theta - (h - Ck \cos \theta)^2,$$

$$(4) \quad t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{A \sin \theta d\theta}{\sqrt{2A(U + H) \sin^2 \theta - ACk^2 \sin^2 \theta - (h - Ck \cos \theta)^2}}.$$

Soit

$$U = \Sigma [L(x^2 + y^2) + Mz^2 + 2Nz]m$$

la fonction de force. Les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes de révolution autour de l'axe des z .

Chaque point du corps est donc soumis à une force constante et à une force qui est proportionnelle à la distance du point à un plan fixe. Les composantes de la force sont, en effet,

$$2Lx, \quad 2Ly, \quad 2Mz + 2N,$$

la force est donc la somme de deux autres, ayant pour composantes

$$0, \quad 0, \quad 2(M - L)z$$

et

$$2Lx, \quad 2Ly, \quad 2Lz + 2N.$$

La seconde passe par un point fixe de l'espace, et peut se dé-

composer en une force passant par le point fixe du corps et en une force constante.

En observant que le corps est de révolution et que les coordonnées du centre de gravité $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$ sont nulles, j'obtiens pour U

$$\begin{aligned} U &= L[(1 - \gamma^2) \Sigma \xi^2 m + (1 - \gamma'^2) \Sigma \eta^2 m + (1 - \gamma''^2) \Sigma \zeta^2 m] \\ &\quad + M(\gamma^2 \Sigma \xi^2 m + \gamma'^2 \Sigma \eta^2 m + \gamma''^2 \Sigma \zeta^2 m) + 2N\gamma''\bar{\zeta} \\ &= L\Sigma(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)m + (M - L)\gamma^2 \Sigma \xi^2 m + (M - L)\gamma'^2 \Sigma \eta^2 m \\ &\quad + (M - L)\gamma''^2 \Sigma \zeta^2 m + 2N\gamma''\bar{\zeta} \\ &= L\Sigma(2\xi^2 + \zeta^2)m + (M - L)\gamma'^2 \Sigma(\zeta^2 - \xi^2)m + (M - L)\Sigma \xi^2 m + 2N\gamma''\bar{\zeta} \\ &= AL + (M - L)(A - C)\gamma'^2 + \frac{MC}{2} + 2N\gamma''\bar{\zeta}. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} \gamma &= \sin \varphi \sin \theta, \\ \gamma' &= \cos \varphi \sin \theta, \\ \gamma'' &= \cos \theta, \end{aligned}$$

$$U = (L - M)(C - A) \cos^2 \theta + 2N\bar{\zeta} \cos \theta + \frac{MC}{2} + AL.$$

Désignons par R le polynôme sous le radical dans l'expression (4). L'équation $R = 0$ admet toujours deux racines réelles. En effet,

$$\begin{aligned} \theta &= 0, & R &= -(h - Ck)^2 < 0 \\ \text{pour} & & & \\ \theta &= \pi, & R &= -(h + Ck)^2 < 0. \end{aligned}$$

Pour la valeur initiale θ_0 , R doit toujours être positif. Nous pouvons supposer que θ soit compris entre 0 et π ,

$$\theta = \theta_0, \quad R > 0.$$

On voit, par conséquent, qu'il existe deux racines réelles comprises entre -1 et $+1$.

Posons $\cos \theta = x$, j'obtiens

$$(5) \quad t = \int_{x_0}^x \frac{-dx}{\sqrt{A'x^4 + B'x^2 + C'x + D}}.$$

Désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les racines du polynôme sous le radical dans (5). Pour ramener le polynôme à la forme normale de M. Weierstrass, je pose

$$x = \frac{x' + b}{x' + d},$$

où b et d sont constantes. J'obtiens alors

$$t = 4k \int_{x_0}^{x'} \frac{dx'}{\sqrt{4x'^3 - g_2 x' - g_3}}.$$

Les constantes b et d sont déterminées par

$$b - \alpha d = 4, \\ \frac{d\delta - b}{\alpha - \delta} + \frac{d\beta - b}{\alpha - \beta} + \frac{d\gamma - b}{\alpha - \gamma} = e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

où e_1, e_2, e_3 sont les trois racines du polynôme $4x^3 - g_2 x - g_3$. J'ai encore posé

$$\frac{1}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)} = k^2.$$

En faisant l'inversion de l'intégrale, on obtient

$$p\left(v - \frac{t}{4k}\right) = x', \quad v = \text{une const.},$$

ou

$$v - \frac{t}{4k} = u, \quad -\frac{dt}{4k} = du,$$

en posant

$$p(u) = x'.$$

Je veux maintenant exprimer ψ et φ en fonction de t ,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{h - Ck \cos \theta}{A \sin^2 \theta} = \frac{h - Ck \cos \theta}{A(1 - \cos^2 \theta)} = \frac{h - Ck x}{A(1 - x^2)}.$$

Les infinis de $\frac{d\psi}{dt}$ sont simples et donnés par

$$\theta = 0, \quad \theta = \pi.$$

En vertu de la relation

$$x = \frac{\alpha x' + b}{x' + d} = \frac{\alpha p(u) + b}{p(u) + d},$$

on obtient les valeurs correspondantes de $p(u)$,

$$p(u_1) = \frac{b - d}{1 - \alpha}, \quad p(u_2) = -\frac{(b + d)}{1 + \alpha}.$$

Or $p(u)$ est une fonction de degré pair; il existe donc les

quatre infinis simples $u_1, -u_1, u_2, -u_2$.

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} d\psi &= -\frac{\frac{1}{4}k}{A} \frac{h[p(u)+d] - Ck[ap(u)+b]\{[p(u)+d]^2 - [ap(u)+b]^2\}}{[p(u)+d]^2 - [ap(u)+b]^2} du \\ &= \left[C_0 + C_1 \frac{\sigma'(u-u_1)}{\sigma(u-u_1)} + C_2 \frac{\sigma'(u-u_2)}{\sigma(u-u_2)} \right. \\ &\quad \left. + \bar{C}_1 \frac{\sigma'(u+u_1)}{\sigma(u+u_1)} + \bar{C}_2 \frac{\sigma'(u+u_2)}{\sigma(u+u_2)} \right] du. \end{aligned} \right.$$

En prenant les résidus, je vois immédiatement que

$$C_1 = -\bar{C}_1, \quad C_2 = -\bar{C}_2.$$

Pour déterminer C_0 , je pose $u = 0$ dans (6).

En intégrant, on trouve

$$\begin{aligned} \psi - \psi_0 &= C_0(u - u_0) + C_1 \log \frac{\sigma(u - u_1) \sigma(u_0 + u_1)}{\sigma(u_0 - u_1) \sigma(u + u_1)} \\ &\quad + C_2 \log \frac{\sigma(u - u_2) \sigma(u_0 + u_2)}{\sigma(u_0 - u_2) \sigma(u + u_2)}. \end{aligned}$$

On tire de (2)

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{kA \sin^2 \theta - (h - Ck \cos \theta) \cos \theta}{A \sin^2 \theta} = \frac{-(Ck + Ak) \cos^2 \theta - h \cos \theta + Ak}{A(1 - \cos^2 \theta)} \\ &= \frac{-(Ck + Ak)[ap(u)+b]^2 - h[ap(u)+b]\{[p(u)+d] + Ak[p(u)+d]^2\}}{A\{[p(u)+d]^2 - [ap(u)+b]^2\}}, \\ \varphi - \varphi_0 &= C_2(u - u_0) + C_1 \log \frac{\sigma(u - u_1) \sigma(u_0 + u_1)}{\sigma(u_0 - u_1) \sigma(u + u_1)} \\ &\quad + C_2 \log \frac{\sigma(u - u_2) \sigma(u_0 + u_2)}{\sigma(u_0 - u_2) \sigma(u + u_2)}, \end{aligned}$$

Enfin, en réunissant mes résultats trouvés, j'obtiens

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{ap(u)+b}{p(u)+d}, & v - \frac{t}{4k} &= u, \\ \cos \theta_0 &= \frac{ap(u_0)+b}{p(u_0)+d}, & u_0 &= v, \\ \psi - \psi_0 &= C_0(u - u_0) + C_1 \log \frac{\sigma(u - u_1) \sigma(u_0 + u_1)}{\sigma(u_0 - u_1) \sigma(u + u_1)} \\ &\quad + C_2 \log \frac{\sigma(u - u_2) \sigma(u_0 + u_2)}{\sigma(u_0 - u_2) \sigma(u + u_2)}, \\ \varphi - \varphi_0 &= C_0(u - u_0) + C_1 \log \frac{\sigma(u - u_1) \sigma(u_0 + u_1)}{\sigma(u_0 - u_1) \sigma(u + u_1)} \\ &\quad + C_2 \log \frac{\sigma(u - u_2) \sigma(u_0 + u_2)}{\sigma(u_0 - u_2) \sigma(u + u_2)}. \end{aligned}$$

Sur la représentation analytique des figures planes, et leur segmentation; par M. C.-A. LAISANT.

1. Lorsqu'on représente, en coordonnées cartésiennes, une courbe plane par une équation $y = f(x)$ ou $\varphi(x, y) = 0$, il y a lieu, pour obtenir tous les points de la courbe, de faire varier x de $-\infty$ à $+\infty$, et de construire les valeurs correspondantes de l'ordonnée y .

Si, pour certaines valeurs de x , comprises par exemple entre deux limites α et β , les valeurs correspondantes de y sont imaginaires, on est dans l'usage de dire qu'il n'y a aucun point de la courbe correspondant à ces valeurs de x . Mais, au point de vue analytique et si l'on veut généraliser entièrement les résultats que fournit l'Algèbre, il est certain que cette interprétation n'est pas complète et ne saurait satisfaire entièrement l'esprit.

J'ai eu occasion de montrer ailleurs (*Théorie et applications des équipollences*, Chap. VIII) que cette apparente discontinuité peut disparaître, et qu'à toute valeur réelle de x , on peut faire correspondre un point de la courbe, qui se complète ainsi par l'adjonction de branches adjointes.

Si en effet nous appelons θ l'angle des axes coordonnés, toute position d'un point M de la courbe, ayant pour coordonnées réelles x et y , est déterminée par l'équipollence

$$(1) \quad OM = x + y\varepsilon^\theta.$$

Il suffit de construire cette valeur pour toutes les valeurs de x , même lorsque y devient imaginaire, pour compléter la courbe comme nous venons de le dire.

Pour abrégér, nous n'en développerons ici aucun exemple, tout en recommandant au lecteur de faire lui-même cette vérification sur quelques cas simples : ellipse $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ pour les valeurs de x supérieures à $+a$ ou inférieures à $-a$; hyperbole $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ pour les valeurs de x comprises entre $-a$ et $+a$; parabole ($y^2 = 2px$) pour les valeurs négatives de x . Ces exercices, pour donner des résultats intéressants, doivent être généralement traités en coordonnées obliques.

2. Lorsque l'équation de la courbe est donnée sous la forme $y=f(x)$, cette valeur de y peut être uniforme ou multiforme, c'est-à-dire comporter une ou plusieurs déterminations. Dans ce dernier cas, rien n'empêche de particulariser, et de représenter seulement une partie de la courbe, en ne choisissant qu'une ou plusieurs des déterminations, et non toutes. Par exemple, en coordonnées rectangulaires, $y=\sqrt{a^2-x^2}$ représente une circonférence, et $y=+\sqrt{a^2-x^2}$ ne représenterait qu'une demi-circonférence seulement (et de même pour $y=-\sqrt{a^2-x^2}$). Mais de telles restrictions sont contraires à l'esprit de généralisation que comporte l'Algèbre, et par conséquent ne semblent guère recommandables.

3. Si l'on prend la représentation d'une courbe en coordonnées polaires $\rho=f(\omega)$, il y a lieu, pour obtenir tous les points réels, et nous ne nous occupons pour l'instant que de ceux-là, de faire varier l'angle polaire ω , variable indépendante, tantôt depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, tantôt d'une circonférence ou d'une fraction de circonférence, tantôt d'un nombre entier, plus ou moins grand, de circonférences.

Il est à remarquer aussi qu'un point quelconque a une infinité d'angles polaires $\omega \pm 2k\pi$, et non pas un seul. De là cette conséquence connue, qu'une même courbe peut être représentée par diverses équations, et aussi qu'une équation donnée peut représenter non pas seulement une courbe, mais une infinité de fois la courbe, quand on la prend dans toute sa généralité. Par exemple, $\rho = \frac{p}{1-e \cos \omega}$ pour $e < 1$ représente une infinité d'ellipses superposées les unes aux autres, et non pas une ellipse seulement.

4. Une remarque pareille s'applique à la représentation des courbes, soit sous forme de deux équations fournissant les valeurs des coordonnées en fonction d'un paramètre arbitraire, soit, plus généralement, sous forme d'équipollences.

Ici, la variable est précisément ce paramètre arbitraire : c'est elle qu'il faut faire passer par toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$ si l'on veut conserver à l'Algèbre la généralité qu'elle doit avoir ; et dès lors le résultat géométrique peut être très différent,

suivant le choix qui aura été fait de ce paramètre, bien que le résultat de l'élimination paraisse le même.

Ainsi, en coordonnées rectangulaires, le système

$$(2) \quad \begin{cases} x = t, \\ y = \sqrt{1-t^2}, \end{cases}$$

ou l'équipollence

$$OM = t \pm i\sqrt{1-t^2}$$

représente la circonférence de centre O et de rayon un, plus l'axe des x (branche adjointe). La fonction y , ou la fonction géométrique OM, est multiforme.

Au contraire, le système

$$(3) \quad \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$$

ou l'équipollence

$$OM = \cos t + i \sin t$$

représente une infinité de circonférences superposées les unes sur les autres et pareilles à celle indiquée ci-dessus, sans aucune branche adjointe ; et la valeur OM est uniforme.

Cependant, le résultat de l'élimination de t est toujours, aussi bien dans le système (2) que dans le système (3),

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Le changement de variable qu'on peut opérer sur le paramètre arbitraire a donc une extrême importance.

Ces conséquences pourraient paraître un peu paradoxales si l'on ne se rappelait qu'en définitive une équipollence $OM = \varphi(t)$ ne représente pas autre chose qu'une transformation de figure, dont l'une, celle parcourue par t , est précisément l'origine des inclinaisons (ou l'axe des x). Quand on remplacera t par une autre variable t_1 , telle que $t = \psi(t_1)$, l'équipollence nouvelle $OM = \varphi[\psi(t_1)] = \varphi_1(t_1)$ pourra donc fort bien ne pas représenter exactement, dans toutes ses parties, la même figure que précédemment, puisque c'est t_1 maintenant, et non plus t , dont l'extrémité doit parcourir l'axe des x , c'est-à-dire le champ des quantités réelles, et que la fonction φ_1 n'est plus la même que φ .

§. Ces remarques, d'une importance extrême pour arriver au

but essentiel que nous poursuivons dans cette Note, méritent d'être appuyées, pour plus de clarté, d'un nouvel exemple. Soit une hyperbole ayant pour centre l'origine, et pour axes, respectivement réel et imaginaire, $2a$ et $2b$.

Elle a pour équation, en coordonnées rectangulaires,

$$(4) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'équipollence de la courbe peut s'écrire

$$(5) \quad OM = at \pm ib\sqrt{t^2 - 1}.$$

Ici, la valeur de OM est double pour chaque valeur de t ; et, si nous faisons varier t de $-\infty$ à -1 , et de $+1$ à $+\infty$, nous obtenons tous les points de la courbe. Entre $t = -1$ et $t = +1$, l'équipollence donne des points sur l'axe des x .

Il semble qu'on peut satisfaire aussi à l'équation de la courbe en posant $t = \text{Chu}$, d'où $\sqrt{b^2 - 1} = \text{Sh}u$, ce qui donne l'équipollence

$$(6) \quad OM = a \text{Chu} + b \text{Sh}u.$$

Or, si nous prenons cette nouvelle équipollence et si nous y faisons varier u de $-\infty$ à $+\infty$, nous n'aurons jamais que des valeurs positives pour Chu , et, par conséquent, nous n'obtiendrons plus que la moitié de la courbe. Toute la branche répondant aux x négatifs sera laissée de côté.

On voit, par ce seul exemple, combien il est indispensable, quand on écrit l'équipollence d'une ligne, de bien se rendre compte de ce que cette équipollence représente. Ce peut être la ligne en question, dépourvue ou munie de branches adjointes ; ou bien cette ligne superposée plusieurs fois ou une infinité de fois à elle-même ; ou enfin, comme on vient de le voir, une partie seulement de la ligne.

6. Les observations précédentes nous permettent d'obtenir très aisément un résultat qui semble avoir un réel intérêt au point de vue philosophique : c'est la possession d'une représentation analytique d'un arc, limité à volonté, d'une courbe donnée ou, si l'on veut, d'un *segment* de cette courbe.

En effet, l'équipollence de la courbe étant écrite sous la forme

$$(7) \quad OM = f(t),$$

considérons un arc ou segment curviligne M_0M_1 , compris dans la représentation analytique fournie par l'équipollence, et tel que OM_0 réponde à la valeur t_0 et OM_1 à t_1 .

Si nous changeons de variable, en remplaçant t par τ , de telle sorte que, lorsque t varie de t_0 à t_1 , τ varie de $-\infty$ à $+\infty$, et, réciproquement, les conditions requises seront satisfaites.

On y arrive, par exemple, en écrivant

$$(8) \quad t = \frac{t_0 + t_1}{2} + \frac{t_1 - t_0}{2} \operatorname{Th} \tau,$$

puisque $\operatorname{Th} \tau$ varie de -1 à $+1$ quand τ varie de $-\infty$ à $+\infty$; ou, plus simplement peut-être, par la formule

$$(9) \quad t = \frac{t_0 + t_1 e^\tau}{1 + e^\tau}.$$

L'équipollence obtenue par la substitution de cette valeur de t dans la relation (7), c'est-à-dire

$$(10) \quad OM = \varphi(\tau),$$

représentera donc l'arc limité M_0M_1 lorsque τ variera de $-\infty$ à $+\infty$.

C'est à ce problème, de la représentation analytique d'une partie d'une courbe, que nous proposons d'appliquer le mot de *segmentation*.

7. Si l'on veut représenter toute la partie d'une courbe, à partir d'un point donné M_0 jusqu'au delà de toute limite, ce qui donnera, suivant les cas, des semi-branches infinies, il faudra que

$$\begin{aligned} &\text{pour } t \text{ variant de } t_0 \text{ à } +\infty, \\ &\tau \text{ varie de } -\infty \text{ à } +\infty, \end{aligned}$$

ou bien que

$$\begin{aligned} &\text{pour } t \text{ variant de } -\infty \text{ à } t_0, \\ &\tau \text{ varie de } -\infty \text{ à } +\infty. \end{aligned}$$

On obtiendra ces deux résultats, respectivement, par les rela-

tions

$$(11) \quad t = t_0 + e^\tau,$$

$$(12) \quad t = t_0 - e^{-\tau}.$$

8. *Équipollence d'un segment de droite.* — Soit AB un segment rectiligne donné. L'équipollence de la droite indéfinie peut être supposée écrite

$$OM = OA + t \cdot AB,$$

si bien que A correspond à $t = 0$, et B à $t = 1$.

La formule (9) nous donnera donc $t = \frac{e^\tau}{1 + e^\tau}$, et l'équipollence du segment AB sera

$$(13) \quad OM = \frac{OA + e^\tau OB}{1 + e^\tau}.$$

9. *Équipollence d'une semi-droite.* — La semi-droite AX, partant de A dans la direction AB, a pour équipollence

$$(14) \quad OM = OA + e^\tau \cdot AB.$$

La semi-droite AX', de sens contraire, est représentée par

$$(15) \quad OM = OA - e^{-\tau} AB.$$

C'est ce que les formules (11) et (12) font ressortir immédiatement.

10. *Équipollence d'une figure polygonale.* — Connaissant les équipollences de plusieurs segments de droites, on obtiendra l'équipollence du système en les multipliant les unes par les autres, après avoir rendu le second membre nul. La fonction OM qui détermine un point de la figure devient alors multi-forme.

Ainsi, l'équipollence d'un angle ABC dont les côtés BA, BC sont limités sera

$$(16) \quad \left(OM - \frac{OA + e^\tau OB}{1 + e^\tau} \right) \left(OM - \frac{OC + e^\tau \cdot OB}{1 + e^\tau} \right) = 0;$$

on peut l'écrire aussi, en prenant le sommet B pour origine,

$$BM^2 - \frac{BA + BC}{1 + e^\tau} BM + \frac{BA \cdot BC}{(1 + e^\tau)^2} = 0.$$

On formerait de même l'équipollence d'un triangle, d'un polygone, avec ou sans ses diagonales, enfin d'une figure quelconque comprenant des segments de droites.

11. *Équipollence d'un quadrant.* — Nous aurons l'équipollence du premier quadrant, par exemple, de la circonférence de centre O et de rayon a , en écrivant

$$OM = a \varepsilon^t$$

et en faisant dans la formule (9) $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne, par substitution dans l'équipollence ci-dessus,

$$(17) \quad OM = a \varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\tau}}{1+e^{\tau}}.$$

Les deuxième, troisième et quatrième quadrants auraient respectivement pour équipollences

$$OM = ia \varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\tau}}{1+e^{\tau}},$$

$$OM = -a \varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\tau}}{1+e^{\tau}},$$

$$OM = -ia \varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\tau}}{1+e^{\tau}}.$$

12. *Équipollence d'une rosace.* — Nous appelons ici rosace, en général, la figure obtenue en faisant tourner une figure F_1 autour d'un centre O, d'un angle $\frac{2\pi}{n}$, puis encore d'un angle égal, et ainsi de suite, et en considérant l'ensemble des n figures $F_1, F_2, \dots, F_n$ ainsi obtenues.

Si

$$OM = f(\tau) = T$$

est l'équipollence de la figure F_1 , celles des figures $F_2, F_3, \dots, F_n$ seront

$$OM = T \varepsilon^{\frac{2\pi}{n}},$$

$$OM = T \varepsilon^{\frac{4\pi}{n}},$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$OM = T \varepsilon^{\frac{2(n-1)\pi}{n}}.$$

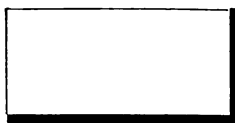
Or, les coefficients de T étant justement les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, il s'ensuit que nous aurons, en faisant le produit de toutes ces équipollences,

$$(18) \quad (OM)^n - T^n = 0.$$

13. Ces exemples nous paraissent suffisants pour bien faire comprendre l'esprit de la méthode représentative que nous proposons. Cette méthode permet, étant donnée une figure plane, aussi compliquée que l'on voudra et composée de lignes, d'imaginer et de construire une équipollence qui représentera exactement toutes les parties de ce dessin, à l'exclusion de toute autre.

Il y a plus; si dans un dessin il se trouve des lignes de forces différentes, notre notation permet encore de faire ressortir cette circonstance, avec toutes les nuances qu'on désirera. Il suffit de considérer comme traits du premier ordre (ou les plus fins) ceux qui sont parcourus une seule fois; du second ordre, ceux qui sont parcourus deux fois; et ainsi de suite. Alors toute équipollence $OM - T = 0$ d'une figure tracée avec un trait d'ordre p donnera lieu, dans l'équipollence finale, au facteur $(OM - T)^p$.

Comme exemple d'une extrême simplicité, nous représenterons la figure rectangulaire ci-contre, figurant une planchette éclairée



par un rayon oblique venant d'en haut et à gauche.

Si a est la base et b la hauteur du rectangle, nous pourrions écrire (8)

$$\left(OM - \frac{ae^{\tau}}{1 + e^{\tau}}\right)^2 \left(OM - a - \frac{ibe^{\tau}}{1 + e^{\tau}}\right)^2 \left(OM - ib - \frac{a}{1 + e^{\tau}}\right) \left(OM - \frac{ib}{1 + e^{\tau}}\right) = 0.$$

Il serait également possible, et c'est par cette remarque que nous terminerons, d'étendre sans plus de difficulté ces résultats à l'espace, en prenant l'équipollence d'une ligne sous la forme

$$OM = f(t).$$

OM représentant ici un vecteur, et en suivant une marche exactement pareille à celle que nous avons indiquée.

Par exemple, les coordonnées de A et de B étant x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 l'équipollence du segment AB pourra s'écrire

$$OM = \frac{(x_1 + y_1 e^{\tau})OD_1 + (x_2 + y_2 e^{\tau})OD_2 + (x_3 + y_3 e^{\tau})OD_3}{1 + e^{\tau}},$$

OD_1, OD_2, OD_3 étant trois lignes de longueur égale à l'unité dirigées respectivement suivant les axes coordonnés.

Sur l'oscillation de la vitesse angulaire dans le mouvement d'un corps solide libre ; par M. G. KOENIGS.

Soit un ellipsoïde d'axes $2a > 2b > 2c$, que nous faisons rouler sur un plan P situé à la distance h de son centre, tandis que ce centre lui-même reste fixe ; supposons, de plus, qu'à chaque instant la vitesse angulaire soit proportionnelle au diamètre $2R$ de l'ellipsoïde qui passe par le point M où il est actuellement tangent au plan. C'est la loi de Poinso.

Pour que le mouvement que nous considérons soit effectivement celui d'un corps solide, il faut et il suffit que l'ellipsoïde puisse être un ellipsoïde d'inertie, c'est-à-dire que l'on ait

$$(I) \quad \frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

On sait qu'une des conséquences de cette inégalité, c'est la non-existence des points d'inflexion dans l'herpolhodie.

On peut faire rouler des ellipsoïdes, de sorte que l'herpolhodie présente des points d'inflexion ; mais ces ellipsoïdes ne sauraient, dans ce cas, vérifier l'inégalité I, ils ne sauraient être des ellipsoïdes d'inertie.

Une autre conséquence de l'inégalité I a trait à la variation de la rotation instantanée autour du diamètre du point de contact.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{h^2}$$

les équations de la polhodie, $2R$ le diamètre du point de contact,

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

On tire de ces équations

$$\begin{aligned} \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{a^4} x^2 &= \frac{b^2 c^2}{h^2} - (b^2 + c^2) + R^2, \\ - \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{b^4} y^2 &= \frac{a^2 c^2}{h^2} - (a^2 + c^2) + R^2, \\ \frac{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}{c^4} z^2 &= \frac{a^2 b^2}{h^2} - (a^2 + b^2) + R^2; \end{aligned}$$

d'où, eu égard à ce que $a > b > c$,

$$\frac{b^2 c^2}{h^2} - (b^2 + c^2) + R^2 > 0.$$

$$\frac{a^2 c^2}{h^2} - (a^2 + c^2) + R^2 < 0.$$

$$\frac{a^2 b^2}{h^2} - (a^2 + b^2) + R^2 > 0.$$

Il est clair que h^2 est compris entre a^2 et c^2 .

Distinguons deux cas,

$$h^2 > b^2 \quad \text{et} \quad h^2 < b^2.$$

$h^2 > b^2$. — Les trois inégalités ci-dessus se réduisent à ces deux, qui entraînent la troisième,

$$R'^2 < R^2 < R''^2,$$

où

$$R'^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{h^2},$$

$$R''^2 = a^2 + c^2 - \frac{a^2 c^2}{h^2}.$$

Si au contraire $h^2 < b^2$, les trois inégalités se réduisent à celles-ci

$$S^2 < R^2 < R'^2.$$

ou

$$S'^2 = b^2 + c^2 - \frac{b^2 c^2}{h^2}.$$

On voit que (R', R'') dans le premier cas, et (S', R'') dans le second sont les limites de R . Le rapport ρ de la plus petite valeur de la vitesse angulaire à la plus grande sera donc, d'après la loi du mouvement,

$$\rho = \frac{R'}{R''} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{S'}{R''}$$

suivant le cas.

Discutons ces deux formules.

On a

$$\frac{R'}{R''} = \frac{a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{h^2}}{a^2 + c^2 - \frac{a^2 c^2}{h^2}} = 1 - \frac{\frac{b^2 - c^2}{a^2} - c^2}{\frac{a^2}{h^2} - 1}.$$

On observe que h^2 est, dans le premier cas, compris entre a^2 et b^2 ; donc $\frac{a^2}{h^2} - 1$ est compris entre 0 et $\frac{a^2 - b^2}{b^2}$, $\frac{a^2}{h^2} - c^2$ est

compris entre $+\infty$ et $\frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} - c^2$, et, finalement, $\frac{R'}{R''}$ est compris entre 1 et $\frac{b^4}{a^2 b^2 - c^2(a^2 - b^2)}$.

Donc, on a, dans le premier cas,

$$1 > \rho^2 > \frac{b^4}{a^2 b^2 - c^2(a^2 - b^2)}.$$

Dans le second cas, $h^2 < b^2$, h^2 est compris entre b^2 et c^2

$$\frac{S'}{R''} = \frac{b^2 + c^2 - \frac{b^2 c^2}{h^2}}{a^2 + c^2 - \frac{a^2 c^2}{h^2}};$$

$\frac{S'}{R''}$ est compris entre les valeurs limites que l'on obtient en faisant $h^2 = b^2$ et $h^2 = c^2$, c'est-à-dire entre 1 et $\frac{b^4}{a^2 b^2 - c^2(a^2 - b^2)}$.

Ainsi l'on a, dans tous les cas,

$$1 > \rho^2 > \frac{b^4}{a^2 b^2 - c^2(a^2 - b^2)}.$$

Dans tous les cas, la limite $\frac{b^4}{a^2b^2 - c^2(a^2 - b^2)}$ peut être atteinte, ou plutôt approchée d'aussi près qu'on le voudra; il suffira de choisir h^2 très voisin de b^2 .

Maintenant, cette limite peut être généralement rendue aussi petite qu'on le voudra; il suffira, a étant fixé, par exemple, de prendre b et c suffisamment petits. Voilà ce qui se passera si l'on fait rouler un ellipsoïde qu'on pourra choisir arbitrairement.

Dans ce cas, le rapport de la plus petite rotation à la plus grande pourra être *aussi petit qu'on le voudra*; et, par suite, dans le cours d'une révolution de l'ellipsoïde, la variation de la vitesse angulaire pourra être très considérable.

Mais, si l'on se borne à faire rouler des *ellipsoïdes d'inertie*, il n'en est plus de même. Il y a lieu de tenir compte de l'inégalité

$$(I) \quad \frac{1}{c^2} < \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2},$$

et la limite

$$\frac{b^4}{a^2b^2 - c^2(a^2 - b^2)}$$

ne peut plus être aussi petite que l'on veut.

On a, en effet, en vertu de I,

$$c^2 > \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2},$$

d'où

$$a^2b^2 - c^2(a^2 - b^2) < a^2b^2 - \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}(a^2 - b^2) = \frac{2a^2b^4}{a^2 + b^2},$$

d'où

$$\frac{b^4}{a^2b^2 - c^2(a^2 - b^2)} > \frac{a^2 + b^2}{2a^2}.$$

On a donc

$$1 > \rho^2 > \frac{b^4}{a^2b^2 - c^2(a^2 - b^2)} > \frac{a^2 + b^2}{2a^2},$$

et cette limite elle-même peut être obtenue si l'on prend justement

$$c^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

(auquel cas le corps se réduit à une plaque plane située dans le plan $z = 0$).

Mais on a aussi

$$\frac{a^2 + b^2}{2a^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} > \frac{1}{2}.$$

On a ainsi toujours

$$1 > \rho^2 > \frac{1}{2},$$

ce qui prouve que ρ est compris entre 1 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou, approximativement, $\frac{7}{10}$.

On voit donc que la vitesse angulaire varie entre des limites très étroites, et que sa variation maximum n'atteint pas les $\frac{3}{10}$ ou le tiers de sa valeur maximum.

On observera même que la limite $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ne peut être atteinte que si b , et par suite c , sont nuls. Mais on peut approcher de cette limite aussi près qu'on le veut, en prenant des corps dont l'ellipsoïde d'inertie ait un grand axe extrêmement allongé, et en imprimant un mouvement initial, tel que le plan sur lequel roule l'ellipsoïde soit à une distance de son centre très voisine de son demi-axe moyen.

Ces considérations ont trouvé une application dans un appareil que nous avons fait construire et qui a pour objet la représentation du mouvement d'un corps solide.

NOTE. — J'ai publié en 1888, dans le *Bulletin*, un théorème concernant la surface de Steiner. J'ai appris depuis que M. Lie avait déjà démontré ce théorème dans un Recueil norvégien, trop peu connu chez nous, *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*, publié à Christiana depuis 1876, Recueil qui contient de nombreux écrits de l'illustre géomètre norvégien, consacrés soit à des portions variées de Géométrie, soit surtout à la théorie des équations différentielles et de leurs transformations.

G. K.

Remarques sur la méthode des périmètres pour calculer le nombre π ; par M. MAURICE FOUCHÉ.

La méthode des périmètres repose, comme on sait, sur la formule qui fait connaître le périmètre d'un polygone régulier inscrit

de $2n$ côtés quand on connaît celui du polygone régulier de n côtés inscrit dans la même circonférence. Dans la plupart des Ouvrages de Géométrie, on ne fait pas observer que les radicaux superposés qui figurent dans cette formule peuvent être séparés. Cependant cette circonstance conduit à des formules plus simples et plus symétriques que celles qui sont communément enseignées. Du reste, au lieu de séparer les radicaux de la formule classique, il est préférable d'obtenir directement la formule définitive par la méthode suivante.

Je désignerai en général par c_n^k le côté du polygone régulier de n côtés et d'espèce k inscrit dans un cercle de rayon r . A l'aide du triangle rectangle qui a pour hypoténuse le diamètre et pour hauteur $\frac{1}{2}c_n^k$, on obtient immédiatement

$$(c_{2n}^k)^2 + (c_{2n}^{n-k})^2 = 4r^2,$$

$$c_{2n}^k \cdot c_{2n}^{n-k} = rc_n^k,$$

d'où

$$c_{2n}^{n-k} = \frac{1}{2} (\sqrt{4r^2 + 2rc_n^k} + \sqrt{4r^2 - 2rc_n^k}),$$

et

$$c_{2n}^k = \frac{1}{2} (\sqrt{4r^2 + 2rc_n^k} - \sqrt{4r^2 - 2rc_n^k}).$$

Pour passer au périmètre p , il suffira de multiplier les deux membres par $2n$. Nous nous bornerons aux polygones de première espèce, et nous trouverons, en supprimant l'indice k ,

$$p_{2n} = \sqrt{2nr} (\sqrt{2nr + p_n} - \sqrt{2nr - p_n}).$$

Pour le périmètre du polygone circonscrit, on aura, a désignant l'apothème,

$$\frac{p_n}{p_n} = \frac{r}{a_n} = \frac{2r}{\sqrt{4r^2 - c_n^2}} = \frac{2nr}{\sqrt{4n^2r^2 - p_n^2}}.$$

Le radical qui figure dans cette formule est le produit des deux précédents.

Si l'on suppose $r = 1$, les formules deviennent

$$(1) \quad p_n = p_n \frac{2n}{\sqrt{4n^2 - p_n^2}},$$

$$(2) \quad p_{2n} = \sqrt{2n} (\sqrt{2n + p_n} - \sqrt{2n - p_n}).$$

Ces formules peuvent encore être notablement simplifiées ; la relation (2) peut s'écrire

$$p_{2n} = \frac{2p_n}{\sqrt{1 + \frac{p_n}{2n}} + \sqrt{1 - \frac{p_n}{2n}}}.$$

Si alors on pose

$$\alpha_n = \sqrt{1 + \frac{p_n}{2n}}, \quad \beta_n = \sqrt{1 - \frac{p_n}{2n}},$$

on aura

$$(3) \quad \frac{1}{p_n} = \frac{1}{p_n} \alpha_n \beta_n,$$

$$(4) \quad \frac{1}{p_{2n}} = \frac{1}{p_n} \frac{\alpha_n + \beta_n}{2},$$

d'où résulte la suite des calculs.

On peut aussi se proposer de calculer α_{2n} et β_{2n} en fonction de α_n et β_n . On aura

$$\alpha_{2n} = \sqrt{1 + \frac{p_{2n}}{4n}}, \quad \beta_{2n} = \sqrt{1 - \frac{p_{2n}}{4n}},$$

ou, d'après (4),

$$\alpha_{2n} = \sqrt{1 + \frac{p_n}{2(\alpha_n + \beta_n)n}}, \quad \beta_{2n} = \sqrt{1 - \frac{p_n}{2(\alpha_n + \beta_n)n}}.$$

Mais, d'après les valeurs de α et β ,

$$\frac{p_n}{2n} = \frac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{2}.$$

Donc

$$\alpha_{2n} = \sqrt{1 + \frac{\alpha_n - \beta_n}{2}}, \quad \beta_{2n} = \sqrt{1 - \frac{\alpha_n - \beta_n}{2}}.$$

Il résulte de la formule (4), où le premier membre tend vers $\frac{1}{2\pi}$, que

$$\frac{1}{2\pi} = \lim \frac{1}{p_n} \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \frac{\alpha_{2n} + \beta_{2n}}{2} \frac{\alpha_{4n} + \beta_{4n}}{2} \dots,$$

ce qui permet de trouver une infinité de développements de π en produits infinis. Si, par exemple, on part du diamètre

$$n = 2, \quad p_2 = 4, \quad \alpha_2 = \sqrt{2}, \quad \beta_2 = 0,$$

on arrivera au théorème suivant :

Considérons une suite de nombres commençant par 0 et $\sqrt{2}$,

et tels que chaque groupe de deux se calcule au moyen du groupe précédent par les formules

$$\alpha' = \sqrt{1 + \frac{\alpha - \beta}{2}}, \quad \beta' = \sqrt{1 - \frac{\alpha - \beta}{2}};$$

le produit des inverses des moyennes arithmétiques des nombres de chaque groupe tendra vers $\frac{\pi}{2}$. Si l'on fait le calcul, on retrouve, après quelques transformations faciles, la formule connue

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{2} \dots \sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \dots$$

Sur la surface d'un polygone régulier.

A propos des polygones réguliers, je ferai observer la formule suivante, qui paraît peu connue et qui donne la surface d'un polygone régulier de n côtés en fonction du côté du polygone régulier de n côtés d'espèce double. Il suffit, pour l'obtenir, de prendre pour hauteur du triangle élémentaire celle qui tombe sur l'un des rayons et qui est égale à $\frac{1}{2} c_n^{2k}$, si k est l'espèce du polygone considéré. On trouve ainsi immédiatement

$$S_n^k = \frac{1}{4} n r c_n^{2k}.$$

Note sur le cercle de Joachimstahl; par M. BÉGIN.

Si d'un point P l'on mène les quatre normales à une ellipse et que l'on considère l'intersection des quatre cercles de Joachimstahl avec l'hyperbole équilatère qui passe par les pieds de ces normales, on obtient, en dehors des pieds de ces quatre normales, quatre autres points, situés sur une ellipse de forme invariable, ayant son centre au point P, et ses axes parallèles à ceux de l'ellipse donnée.

Soient x, y les coordonnées du point P, et

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation de l'ellipse.

Un point quelconque de l'hyperbole équilatère peut être représenté par les équations

$$x = \frac{a^2 \alpha}{a^2 + t},$$

$$y = \frac{b^2 \beta}{b^2 + t}.$$

Les pieds des normales sont déterminés par

$$(1) \quad \frac{a^2 \alpha^2}{(a^2 + t)^2} + \frac{b^2 \beta^2}{(b^2 + t)^2} - 1 = \frac{-f(t)}{(a^2 + t)^2 (b^2 + t)^2} = 0.$$

Désignons par t_1, t_2, t_3, t_4 les quatre racines de cette équation, par A_1, A_2, A_3, A_4 les points correspondants, et par θ , la valeur de t relative au quatrième point d'intersection B_1 du cercle passant par A_2, A_3, A_4 . Le coefficient angulaire de la droite $A_1 B_1$ doit être l'inverse de celui de $A_3 A_4$; en effet, ces deux droites sont également inclinées sur les axes de l'hyperbole, puisqu'elles joignent quatre points situés sur une circonférence. Nous avons donc la condition

$$\frac{b^4 \beta^2}{a^4 \alpha^2} \frac{(a^2 + t_2)(a^2 + t_3)(a^2 + t_4)(a^2 + \theta_1)}{(b^2 + t_2)(b^2 + t_3)(b^2 + t_4)(b^2 + \theta_1)} = 1$$

ou

$$\frac{b^4 \beta^2}{a^4 \alpha^2} \frac{f(-a^2)}{f(-b^2)} \frac{(b^2 + t_1)(a^2 + \theta_1)}{(a^2 + t_1)(b^2 + \theta_1)} = 1,$$

en tenant compte de l'équation (1).

Or

$$f(-a^2) = -a^2 \alpha^2 c^4,$$

$$f(-b^2) = -b^2 \beta^2 c^4;$$

θ est donc donné en fonction de t par

$$\frac{b^2(a^2 + \theta)}{a^2 + t} = \frac{a^2(b^2 + \theta)}{b^2 + t} = -\theta,$$

d'où

$$\frac{1}{a^2 + t} = \frac{1}{b^2} \left(\frac{a^2}{a^2 + \theta} - 1 \right),$$

$$\frac{1}{b^2 + t} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{b^2}{b^2 + \theta} - 1 \right).$$

et, en transportant ces valeurs dans (1), on obtient

$$\frac{\alpha^2 x^2}{b^4} \left(\frac{\alpha^2}{a^2 + \theta} - 1 \right)^2 + \frac{b^2 \beta^2}{a^4} \left(\frac{b^2}{b^2 + \theta} - 1 \right)^2 - 1 = 0.$$

Cette équation donne les quatre valeurs de θ relatives aux points B_1, B_2, B_3, B_4 . On voit qu'ils sont situés sur l'ellipse

$$\frac{\alpha^2 x^2}{b^4} \left(\frac{x}{a} - 1 \right)^2 + \frac{b^2 \beta^2}{a^4} \left(\frac{y}{\beta} - 1 \right)^2 = 1,$$

ayant son centre au point $P(x, \beta)$ et ayant pour demi-axes $\frac{b^2}{a}$ et $\frac{a^2}{b}$.

Expression du produit des coefficients du binôme ;
par M. C.-A. LAISANT.

Les coefficients du développement $(1+x)^n$ sont, à l'exception des deux extrêmes, $c_0 = 1$, $c_n = 1$, représentés par les expressions

$$\frac{n!}{1!(n-1)!} \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdots \frac{n!}{(n-1)!1!}.$$

Le produit de tous les coefficients de ce développement est donc

$$P_n = \frac{(n!)^{n-1}}{[1!2!\dots(n-1)!]^2}.$$

Le numérateur peut s'écrire

$$2^{n-1}, 3^{n-1}, 4^{n-1}, \dots, (n-1)^{n-1}, n^{n-1},$$

et le dénominateur

$$2^{2n-2}, 3^{2n-6}, 4^{2n-8}, \dots, (n-1)^2.$$

Par conséquent,

$$P_n = 2^{-n+3}, 3^{-n+5}, 4^{-n+7}, \dots, (n-1)^{n-3}, n^{n-1},$$

ou, en groupant les termes qui ont des exposants égaux et de signes contraires,

$$P_n = \left(\frac{n}{1}\right)^{n-1} \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-3} \left(\frac{n-2}{3}\right)^{n-5} \dots$$

Si n est pair, le dernier facteur a pour exposant l'unité et est égal à $\frac{\frac{n}{2} + 1}{\frac{n}{2}}$; si n est impair, ce dernier facteur, égal à l'unité, a pour exposant zéro.

Dans ce dernier cas, il est évident que P_n est un carré.

Par exemple, le produit des coefficients de $(1+n)^6$, ou 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 est égal à $\left(\frac{6}{1}\right)^5 \left(\frac{5}{2}\right)^3 \left(\frac{4}{3}\right)$.

Le produit des coefficients 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1 de $(1+n)^7$ est

$$\left(\frac{7}{1}\right)^6 \left(\frac{6}{2}\right)^4 \left(\frac{5}{3}\right)^2.$$

Il résulte de l'expression même de P_n que l'on a, pour le rapport des deux produits se rapportant à des puissances consécutives,

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

Propriété des surfaces algébriques; par M. C.-A. LAISANT.

(Séance du 4 décembre 1889.)

Dans l'une des dernières séances de la Société mathématique, M. Fouret, après avoir donné une démonstration fort simple d'un beau théorème sur l'élimination dû à Liouville, en a déduit, à l'aide de considérations empruntées à la Mécanique, une propriété générale de toutes les courbes algébriques, dont M. Humbert avait fait antérieurement l'objet d'une Communication, et que l'on peut énoncer ainsi :

Le lieu des points tels que la somme des carrés des normales menées de chacun de ces points à une courbe algébrique soit constante est une conique.

Lorsqu'on fait varier la somme donnée, les coniques obtenues restent concentriques et homothétiques.

Le centre commun de toutes ces coniques est un point remarquable du plan de la courbe; il jouit de cette propriété, que la somme des carrés des normales qu'on peut mener de ce point à la courbe est minimum.

Une propriété tout à fait semblable a, paraît-il, été établie par M. Humbert pour les surfaces algébriques, au moyen d'artifices ingénieux qui évitent les calculs très compliqués auxquels la question semble au premier abord devoir conduire.

Le but de la présente Note est de démontrer cette remarquable propriété des surfaces algébriques par un procédé purement analytique, sans recourir à aucune considération étrangère à la question elle-même.

Pour y parvenir, je rappellerai tout d'abord la proposition suivante, relative à la théorie de l'élimination :

Si l'on a, outre plusieurs inconnues, en nombre quelconque $x, y, z, t, u, \dots$, plusieurs équations, en nombre inférieur à celui des inconnues,

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z, t, u, \dots) &= 0, \\ f_2(x, y, z, t, u, \dots) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ f_p(x, y, z, t, u, \dots) &= 0, \end{aligned}$$

et si l'on suppose que les degrés de ces équations, par rapport à l'ENSEMBLE des inconnues (et non pas seulement à telles ou telles d'entre ces inconnues) soient respectivement $n_1, n_2, \dots, n_p$, le degré de l'équation finale, par rapport à l'ensemble des inconnues restantes, lorsqu'on éliminera $p - 1$ des inconnues, sera au plus égal à $n_1 n_2 \dots n_p$ ⁽¹⁾.

Cette propriété admise, arrivons à la question géométrique que nous avons en vue. Soit

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface algébrique.

Considérons un point M, dont les coordonnées soient α, β, γ ,

(1) M. Fourret a donné, il y a quelques années, dans le *Bulletin*, une démonstration de ce théorème basée sur le principe de correspondance (t. II. p. 127).

et menons par ce point les normales à la surface. On voit que les points d'incidence de ces normales seront donnés par les intersections communes de la surface (1) et des surfaces représentées par les équations

$$(2) \quad \frac{f'_x}{x-\alpha} = \frac{f'_y}{y-\beta}, \quad \frac{f'_x}{x-\alpha} = \frac{f'_z}{z-\gamma}.$$

Si l'on met ces équations (2) sous forme entière, il est visible qu'elles sont du même degré n que la surface (1), soit, en général, par rapport à chacune des lettres x, y, z , soit par rapport à l'ensemble des lettres $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$.

Si donc, entre ces trois équations (1), (2), nous éliminons y et z , par exemple, l'équation résultante, de degré n^3 en x , sera également de degré n^3 par rapport à l'ensemble des lettres x, α, β, γ , d'après la propriété énoncée ci-dessus. Nous pouvons, en conséquence, l'écrire

$$(3) \quad x^{n^3} + F_1(\alpha, \beta, \gamma)x^{n^3-1} + F_2(\alpha, \beta, \gamma)x^{n^3-2} + \dots = 0,$$

$F_1, F_2, \dots$ représentant des fonctions de α, β, γ dont le degré est égal à l'indice.

De même, l'élimination de z, x , puis de x, y , nous donnerait

$$(4) \quad y^{n^3} + G_1(\alpha, \beta, \gamma)y^{n^3-1} + G_2(\alpha, \beta, \gamma)y^{n^3-2} + \dots = 0,$$

$$(5) \quad z^{n^3} + H_1(\alpha, \beta, \gamma)z^{n^3-1} + H_2(\alpha, \beta, \gamma)z^{n^3-2} + \dots = 0.$$

Ces trois équations résolues donneraient les coordonnées des points d'incidence des n^3 normales issues du point M.

La somme k^2 des carrés des distances de M à ces n^3 points d'incidence est

$$\Sigma[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2]$$

ou

$$n^3(x^2 + y^2 + z^2) - 2\alpha \Sigma x - 2\beta \Sigma y - 2\gamma \Sigma z + \Sigma x^2 + \Sigma y^2 + \Sigma z^2.$$

Or les équations (3), (4), (5) nous montrent qu'on a

$$\Sigma x = -F_1(\alpha, \beta, \gamma), \quad \Sigma y = -G_1(\alpha, \beta, \gamma), \quad \Sigma z = -H_1(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$\Sigma x^2 = F_2(\alpha, \beta, \gamma) - 2\alpha F_1(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$\Sigma y^2 = G_2(\alpha, \beta, \gamma) - 2\beta G_1(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$\Sigma z^2 = H_2(\alpha, \beta, \gamma) - 2\gamma H_1(\alpha, \beta, \gamma).$$

L'équation du lieu du point M est donc

$$(6) \left\{ \begin{aligned} n^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2\alpha F_1(\alpha, \beta, \gamma) + 2\beta G_1(\alpha, \beta, \gamma) \\ + 2\gamma H_1(\alpha, \beta, \gamma) + J_2(\alpha, \beta, \gamma) + L_2(\alpha, \beta, \gamma) + P_2(\alpha, \beta, \gamma) = k^2. \end{aligned} \right.$$

Le lieu cherché est donc une surface du second ordre. Lorsqu'on fait varier k^2 , le centre reste invariable, de même que les directions et les rapports mutuels des axes.

Si nous écrivons l'équation de cette surface sous la forme

$$(7) \quad S_2(\alpha, \beta, \gamma) = k^2,$$

et si $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ représentent les coordonnées du centre, il est clair que le minimum de la somme des carrés des normales, qui correspond précisément à ce centre, est

$$S_2(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0).$$

Ainsi se trouve établie, par une analyse bien simple, la proposition suivante, relative aux surfaces algébriques :

Le lieu des points tels que la somme des carrés des normales menées de chacun de ces points à une surface algébrique soit constante est une surface du second ordre.

Lorsqu'on fait varier la somme donnée, les surfaces du second ordre obtenues restent concentriques et homothétiques.

Le centre commun de toutes ces surfaces jouit de cette propriété, que la somme des carrés des normales qu'on peut mener de ce point à la surface algébrique est minimum.

Il serait intéressant d'étudier les particularités diminuant le nombre n^3 des normales qu'on peut mener à la surface d'un point quelconque. J'ai voulu me borner, dans cette Note, à l'examen de la propriété générale.

Nature des racines de l'équation du quatrième degré;
par M. FÉLIX LUCAS.

Prenons l'équation du quatrième degré sous la forme

$$(1) \quad az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 3dz + e = 0.$$

En identifiant son premier membre avec celui de l'équation

$$(2) \quad a(z^2 + 2mz + n)(z^2 + 2pz + q) = 0$$

et posant

$$(3) \quad n + q - 2mp = 6\lambda,$$

on obtient les cinq équations

$$(4) \quad \begin{cases} m + p = \frac{2b}{a}, & mp = \frac{c}{a} - \lambda, \\ n + q = 2\left(\frac{c}{a} + \lambda\right), & nq = \frac{c}{a}, \\ mq + np = \frac{2d}{a}, \end{cases}$$

entre lesquelles on peut éliminer facilement les auxiliaires m, n, p, q . On trouve ainsi la résolvante du troisième degré en λ , à laquelle on peut donner l'une ou l'autre des formes suivantes

$$(5) \quad \begin{vmatrix} a & b & c + 2a\lambda \\ b & c - a\lambda & d \\ c + 2a\lambda & d & c \end{vmatrix} = 0,$$

$$(5') \quad 4a^3\lambda^3 - a(ae - 4bd + 3c^2)\lambda + \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0.$$

Posons, pour simplifier les écritures qui vont suivre,

$$(6) \quad \begin{cases} 4a^2P = -(ae - 4bd + 3c^2), \\ 4a^2Q = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3. \end{cases}$$

L'équation résolvante deviendra

$$(7) \quad \lambda^3 + P\lambda + Q = 0.$$

Elle admet trois racines λ' , λ'' , λ''' , au moyen desquelles on peut former les six rapports

$$(8) \quad \frac{\lambda'}{\lambda''}, \quad \frac{\lambda''}{\lambda'}, \quad \frac{\lambda''}{\lambda'''}, \quad \frac{\lambda'''}{\lambda''}, \quad \frac{\lambda'''}{\lambda'}, \quad \frac{\lambda'}{\lambda'''},$$

et qui satisfont à la relation

$$(9) \quad \lambda' + \lambda'' + \lambda''' = 0.$$

Si l'on désigne un quelconque des six rapports (le premier, par exemple) par r , le système de ces rapports peut s'écrire

$$(10) \quad r, \quad \frac{1}{r}, \quad -\frac{1}{1+r}, \quad -(1+r), \quad -\frac{1+r}{r}, \quad -\frac{r}{1+r}.$$

Leur produit est égal à 1, et leur somme est égale à -3 . Ce système de rapports n'est pas modifié si l'on change r soit en $\frac{1}{r}$, soit en $-(1+r)$; il en résulte que les six rapports sont les racines de l'équation

$$(11) \quad r^6 + 3r^5 + (H+3)r^4 + (2H+1)r^3 + (H+3)r^2 + 3r + 1 = 0,$$

qui peut ainsi s'écrire sous les deux formes suivantes :

$$(11 \text{ bis}) \quad [r(1+r)]^3 + H[r(1+r)]^2 + 3[r(1+r)] + 1 = 0,$$

$$(11 \text{ ter}) \quad (r^2 + r + 1)^3 + (H-3)r^2(1+r)^2 = 0,$$

et dans laquelle entre un paramètre H à déterminer. Or l'équation (11 bis) donne

$$(12) \quad H = \lambda' \lambda'' \lambda''' \left(\frac{1}{\lambda'^3} + \frac{1}{\lambda''^3} + \frac{1}{\lambda'''^3} \right).$$

On a, d'autre part, par l'équation (7), en tenant compte de (9),

$$(13) \quad \frac{P^3}{Q^2} = \lambda' \lambda'' \lambda''' \left(\frac{1}{\lambda'} + \frac{1}{\lambda''} + \frac{1}{\lambda'''} \right)^3 = H - 3.$$

Cela posé, désignons par z_1, z_2, z_3, z_4 les racines de l'équation (1); nous aurons, d'après les formules (2) et (3), pour valeurs des trois racines de la résolvante,

$$(14) \quad \begin{cases} 4\lambda' = z_1 z_3 + z_2 z_4 - 6 \frac{c}{a}, \\ 4\lambda'' = z_1 z_4 + z_2 z_3 - 6 \frac{c}{a}, \\ 4\lambda''' = z_1 z_2 + z_3 z_4 - 6 \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Les six rapports anharmoniques des racines de l'équation (1) peuvent s'exprimer très simplement au moyen de ces trois racines. Il est, de plus, à remarquer que ces six valeurs correspondent une à une avec celles des six rapports (8); on a, par exemple, en regard de

$$r = \frac{\lambda'}{\lambda''}$$

le rapport anharmonique

$$\rho = \frac{\lambda' - \lambda'''}{\lambda'' - \lambda'''} = \frac{2r + 1}{r + 2}.$$

La corrélation des r et des ρ s'exprime par l'équation homographique

$$(15) \quad \rho r + 2\rho - 2r - 1 = 0.$$

La formule (13) et l'équation (11 *ter*) donnent

$$(16) \quad \frac{P^3}{Q^2} = - \frac{(r^2 + r + 1)^2}{r^2(1 + r)^2};$$

en remplaçant r par $\frac{2\rho - 1}{2 - \rho}$, on trouve

$$(17) \quad \frac{P^3}{Q^2} = -27 \frac{(\rho^2 - \rho + 1)^2}{(\rho + 1)^2(\rho - 2)^2(2\rho - 1)^2}.$$

On sait que le rapport anharmonique de quatre quantités z ne change pas si l'on remplace ces quantités par d'autres ayant avec elles la relation homographique

$$(18) \quad \alpha z z' + \beta z + \gamma z' + \delta = 0;$$

s'il s'agit des quatre racines de l'équation (1), leur transformation peut s'obtenir en remplaçant z par sa valeur en z' dans le premier membre de l'équation, et multipliant ensuite par $(\alpha z' + \beta)^4$ pour ramener à la forme entière. Le résultat serait le même si, dans la forme

$$(19) \quad \alpha z^4 + 4b z^3 \zeta + 6c z^2 \zeta^2 + 4d z \zeta^3 + e \zeta^4,$$

on remplaçait z par $-(\gamma \zeta + \delta)$ et ζ par $\alpha \zeta + \beta$, en faisant ensuite $\zeta = 1$; il en résulte que les rapports anharmoniques ρ sont des invariants absolus de la forme (19); il en est de même, par conséquent, de l'expression $\frac{P^3}{Q^2}$ et des rapports r des racines de l'équation résolvante.

Les six valeurs d'un rapport anharmonique

$$(20) \quad \rho, \frac{1}{\rho}, \frac{1}{1-\rho}, 1-\rho, \frac{\rho}{\rho-1}, \frac{\rho-1}{\rho}$$

sont toutes réelles ou toutes imaginaires : la condition de leur réalité est la même que celle de la réalité des r et, par conséquent, que celle de la réalité des λ (si Q n'est pas nul). Lorsque l'équation donnée (1) du quatrième degré a ses coefficients réels, la condition de réalité des rapports anharmoniques de ses quatre racines est

$$(21) \quad 4P^3 + 27Q^2 < 0.$$

Or, pour que les rapports anharmoniques des quatre affixes z_1, z_2, z_3, z_4 soient réels, il faut et il suffit que les points racines correspondants soient en ligne droite ou soient les sommets d'un quadrilatère inscriptible dans une circonférence.

Cela posé, admettons que les quatre racines de l'équation (1) soient inégales. Si elles sont toutes réelles, elles déterminent quatre points en ligne droite sur l'axe des x ; si elles sont toutes imaginaires (conjuguées deux à deux), elles forment un trapèze isoscèle inscriptible dans une circonférence; dans les deux cas leurs rapports anharmoniques sont réels; par conséquent l'inégalité

$$(21) \quad 4P^3 + 27Q^2 < 0$$

indique que les racines de l'équation (1) sont toutes réelles ou toutes imaginaires.

Inversement, l'inégalité

$$(22) \quad 4P^3 + 27Q^2 > 0$$

doit indiquer que l'équation a deux racines réelles et deux imaginaires; dans ce cas, en effet, les quatre racines déterminent les sommets d'un quadrilatère qui n'est pas, en général, inscriptible dans une circonférence. Ce quadrilatère devient inscriptible s'il est birectangle; les rapports anharmoniques ρ ainsi que les rapports r deviennent alors réels, bien que deux racines de l'équation λ restent imaginaires en vertu de l'inégalité (22). Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que l'équation en λ ait une

racine nulle; on a donc $Q = 0$ et $P > 0$: les quatre racines z_1, z_2, z_3, z_4 forment alors deux couples harmoniques.

L'égalité

$$(23) \quad 4P^3 + 27Q^2 = 0$$

représente la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation en λ ait deux racines égales; les formules (14) indiquent que c'est également la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation donnée (1) ait deux racines égales.

Sur une simplification à un calcul de Lamé relatif à un changement de variable; par M. MAURICE FOUCHÉ.

Dans son travail sur les coordonnées elliptiques, Lamé s'est trouvé conduit à traiter le problème général suivant :

Si l'on remplace les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point de l'espace par les coordonnées curvilignes ρ, ρ_1, ρ_2 définies au moyen des trois équations

$$(1) \quad \begin{cases} f(x, y, z) = \rho, \\ f_1(x, y, z) = \rho_1, \\ f_2(x, y, z) = \rho_2, \end{cases}$$

qui représentent trois surfaces orthogonales, et si V est une fonction quelconque de x, y, z , on propose d'exprimer la quantité

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2},$$

au moyen des dérivées par rapport à ρ, ρ_1, ρ_2 des trois quantités h, h_1, h_2 définies par les équations

$$(2) \quad \begin{cases} h^2 = \left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2, \\ h_1^2 = \left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_1}{dz}\right)^2, \\ h_2^2 = \left(\frac{d\rho_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dz}\right)^2. \end{cases}$$

La solution qu'il en donne, et qui se trouve reproduite dans le *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand, exige une série de calculs un peu longs. Je suis parvenu au même résultat d'une manière beaucoup plus rapide, qu'il m'a paru intéressant de faire connaître, d'autant plus que cette question, dans le cas particulier où les trois surfaces ρ , ρ_1 , ρ_2 sont des quadriques homofocales, a fait partie du concours d'agrégation il y a quelques années (1883).

Je rappellerai d'abord les principaux points de la méthode de Lamé.

1° Si l'on différentie l'équation

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{d\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{dV}{d\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} + \frac{dV}{d\rho_2} \frac{d\rho_2}{dx},$$

et les équations analogues relatives à $\frac{dV}{dy}$ et $\frac{dV}{dz}$, on voit facilement que ΔV se met sous la forme

$$\Delta V = h^2 \frac{d^2 V}{d\rho^2} + h_1^2 \frac{d^2 V}{d\rho_1^2} + h_2^2 \frac{d^2 V}{d\rho_2^2} + \frac{dV}{d\rho} \Delta \rho + \frac{dV}{d\rho_1} \Delta \rho_1 + \frac{dV}{d\rho_2} \Delta \rho_2,$$

de sorte qu'il suffit de calculer les expressions $\Delta \rho$, $\Delta \rho_1$, $\Delta \rho_2$.

2° Pour y arriver, on commence par chercher entre $\frac{d\rho}{dx}$, $\frac{d\rho}{dy}$, ... et $\frac{dx}{d\rho}$, $\frac{dy}{d\rho}$, ... des relations qu'on obtient en différentiant totalement les équations (1) et en tenant compte de ce que les surfaces sont orthogonales. On arrive ainsi aux équations

$$(3) \quad h^2 \frac{dx}{d\rho} = \frac{d\rho}{dx}, \quad h^2 \frac{dy}{d\rho} = \frac{d\rho}{dy}, \quad h^2 \frac{dz}{d\rho} = \frac{d\rho}{dz}$$

et deux autres analogues.

3° Si maintenant on différentie successivement les équations qui expriment que les surfaces sont orthogonales, savoir

$$\frac{d\rho}{dx} \frac{d\rho_1}{dx} + \frac{d\rho}{dy} \frac{d\rho_1}{dy} + \frac{d\rho}{dz} \frac{d\rho_1}{dz} = 0$$

et deux autres analogues, par rapport à x , y , z , et si l'on remplace dans les équations résultantes les dérivées $\frac{d\rho}{dx}$, ... par leurs valeurs

tirées de (3), on obtient le résultat remarquable

$$(4) \quad h^2 \frac{d \frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho} = -h_1^2 \frac{d \frac{d\rho}{dx}}{d\rho_1},$$

avec huit autres équations qui procèdent de celles-ci par les permutations des indices ou des lettres x, y, z .

4° C'est à partir de ce point que la méthode que je propose commence à différer de celle de Lamé. Lamé formait des équations linéaires contenant les trois inconnues $\Delta\rho, \Delta\rho_1, \Delta\rho_2$: je vais calculer directement chacune d'elles. Si l'on considère $\frac{d\rho}{dx}$ comme une fonction de ρ, ρ_1, ρ_2 , on aura

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} = \frac{d \frac{d\rho}{dx}}{d\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{d \frac{d\rho}{dx}}{d\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} + \frac{d \frac{d\rho}{dx}}{d\rho_2} \frac{d\rho_2}{dx}$$

ou, d'après (4),

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} = \frac{d\rho}{dx} \frac{d \frac{d\rho}{dx}}{d\rho} - \frac{h^2}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dx} \frac{d \frac{d\rho}{dx}}{d\rho} - \frac{h^2}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dx} \frac{d \frac{d\rho}{dx}}{d\rho}.$$

On aura deux équations analogues donnant $\frac{d^2\rho}{dy^2}$ et $\frac{d^2\rho}{dz^2}$; en ajoutant ces trois équations, on a immédiatement

$$\Delta\rho = \frac{1}{2} \frac{dh^2}{d\rho} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{h_1^2} \frac{dh_1^2}{d\rho} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{h_2^2} \frac{dh_2^2}{d\rho},$$

ce qui est le résultat cherché. On le met facilement sous la forme habituelle. On a successivement

$$\Delta\rho = h^2 \left(\frac{1}{h} \frac{dh}{d\rho} - \frac{1}{h_1} \frac{dh_1}{d\rho} - \frac{1}{h_2} \frac{dh_2}{d\rho} \right),$$

$$\Delta\rho = h^2 \frac{d}{d\rho} (\log h - \log h_1 - \log h_2)$$

et enfin

$$\Delta\rho = h^2 \frac{d \log \frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho}.$$

On aurait de même

$$\Delta \rho_1 = h_1^2 \frac{d \log \frac{h_1}{h_2 h}}{d \rho_1},$$

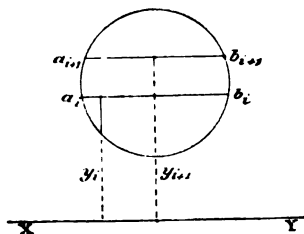
$$\Delta \rho_2 = h_2^2 \frac{d \log \frac{h_2}{h h_1}}{d \rho_2},$$

qui sont bien les formules de Lamé.

Méthode d'approximation pour calculer le moment d'inertie et la position du centre de gravité d'une aire plane ; par M. BÉGHIN.

On emploie généralement, pour faire ces calculs, les formules de Thomas Simpson, dont l'application est assez pénible, à cause des nombreuses multiplications qu'elles nécessitent ; néanmoins, comme elles supposent le même mode de division, elles peuvent présenter des avantages, lorsque la courbe proposée n'est pas tracée.

Mais, lorsque la courbe est tracée, ce qui est le cas général, et que par conséquent la mesure des segments déterminés par des



parallèles à l'axe des moments ne présente aucune difficulté, on peut opérer beaucoup plus simplement.

L'aire proposée étant supposée partagée par des parallèles à l'axe XY, considérons deux parallèles consécutives $a_i b_i$ et $a_{i+1} b_{i+1}$.

Posons

$$\begin{aligned} a_i b_i &= x_i, \\ a_{i+1} b_{i+1} &= x_{i+1}, \end{aligned}$$

et désignons par y_i et y_{i+1} leurs distances à XY.

Si nous assimilons la bande $a_i b_i a_{i+1} b_{i+1}$ à un trapèze, son moment d'inertie sera compris entre ceux des deux rectangles qui ont pour bases, l'un x_i et l'autre x_{i+1} , et pour hauteur $(y_{i+1} - y_i)$. Étendons à chacun d'eux l'intégrale double

$$\iint y^2 dx dy;$$

nous trouvons

$$\frac{1}{3} (y_{i+1}^3 - y_i^3) x_i$$

et

$$\frac{1}{3} (y_{i+1}^3 - y_i^3) x_{i+1},$$

Le moment d'inertie du trapèze $a_i b_i a_{i+1} b_{i+1}$, qui est compris entre ces deux valeurs, est sensiblement égal à

$$\frac{1}{3} (y_{i+1}^3 - y_i^3) \frac{x_i + x_{i+1}}{2},$$

et nous aurons, pour le moment cherché,

$$I = \frac{1}{3} \sum_0^n (y_{i+1}^3 - y_i^3) \frac{x_{i+1} + x_i}{2}.$$

Assujettissons maintenant le mode de division à être tel que les ordonnées successives soient les racines cubiques de nombres en progression arithmétique de raison Δ ; nous aurons

$$I = \frac{\Delta}{3} \sum \frac{x_{i+1} + x_i}{2} = \frac{\Delta}{3} \left(\frac{x_0 + x_n}{2} + x_1 + \dots + x_{n-1} \right).$$

Une méthode analogue peut évidemment s'appliquer aux centres de gravité; U désignant l'aire de la courbe proposée, H la distance de son centre de gravité à l'axe des moments, nous avons

$$UH = \iint y dx dy,$$

et, pour le trapèze $a_i b_i a_{i+1} b_{i+1}$,

$$\frac{1}{2} (y_{i+1}^2 - y_i^2) \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

On prendra pour ordonnées successives les racines carrées
nombres en progression arithmétique, et l'on aura

$$UH = \frac{\Delta}{2} \left(\frac{x_0 + x_n}{2} + x_1 + \dots + x_{n-1} \right).$$

Il est essentiel de remarquer que chacune de ces deux éche
peut être faite une fois pour toutes sur du papier à calquer
l'on applique sur le dessin. Dès lors ce calcul ne présente
plus de difficultés que celui d'une aire plane.

Sur une propriété d'une classe de courbes algébriques,
par M. WEILL.

Étant données trois courbes $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ayant pour équations

$$y^m = Ax^p,$$

$$y^m = Bx^p,$$

$$y^m = Cx^p.$$

un triangle ABC se déplace de manière que ses sommets soi
situés sur la première, les côtés AB et BC étant respectivem
tangents aux deux autres, l'enveloppe du côté AC est une q
trième courbe ω_1 faisant partie du même système; de plus
d'un point A' de ω_1 on mène une tangente A'C' à ω_1 , puis
point C' une tangente C'B' à ω_3 , la droite A'B' sera tangente à
en d'autres termes, on peut intervertir les sommets.

Ce théorème, d'une démonstration facile, se généralise im
diatement pour une ligne polygonale d'un nombre quelconque
sommets, et il présente une analogie complète avec le théori
de Poncelet relatif à une ligne polygonale inscrite dans une
nique et dont les côtés sont tangents à d'autres coniques fais
partie, avec la première, d'un même faisceau linéaire.

Rayon de courbure d'une conique ; par M. A. MANNHEIM.

(Séance du 7 mai 1890.)

Dans une intéressante Communication, qu'il a faite à l'Académie des Sciences dans la séance du 14 avril 1890, M. Fouret est revenu sur ce problème :

Déterminer le rayon de courbure en un point d'une conique dont on connaît la tangente en ce point et trois autres points.

Les curieuses applications qu'il a faites de la solution de cette question en montrent l'intérêt. Ce n'est qu'incidemment, et à propos d'une de ses applications, que j'ai donné jadis une formule (1) résolvant le même problème. Je vais faire connaître aujourd'hui la marche que j'avais suivie pour y arriver. Je déduirai de ma formule celle de M. Fouret et une construction extrêmement simple.

Soient (*fig. 1*) m, a, b, c les points donnés de la conique C et mt la tangente en m à cette conique. Désignons par s et t les points de rencontre de cette tangente avec ba et bc . Appelons u le point de rencontre de ab et de mc .

Menons $s't'$ parallèlement à st et à une distance infiniment petite de cette droite.

En vertu du théorème de Carnot appliqué à la conique C coupée par les côtés du triangle $s'hu$, on a

$$s'e.s'l.hm.hc.ub.ua = s'a.s'b.uc.um.hl.he.$$

Par les points infiniment voisins e, m, l faisons passer une circonférence de cercle qui est alors le cercle osculateur de C pour le point m .

Désignons par i le point où cette circonférence rencontre mc , on a

$$he.hl = hm.hi.$$

Tenant compte de cette égalité et supposant que la droite $s't'$

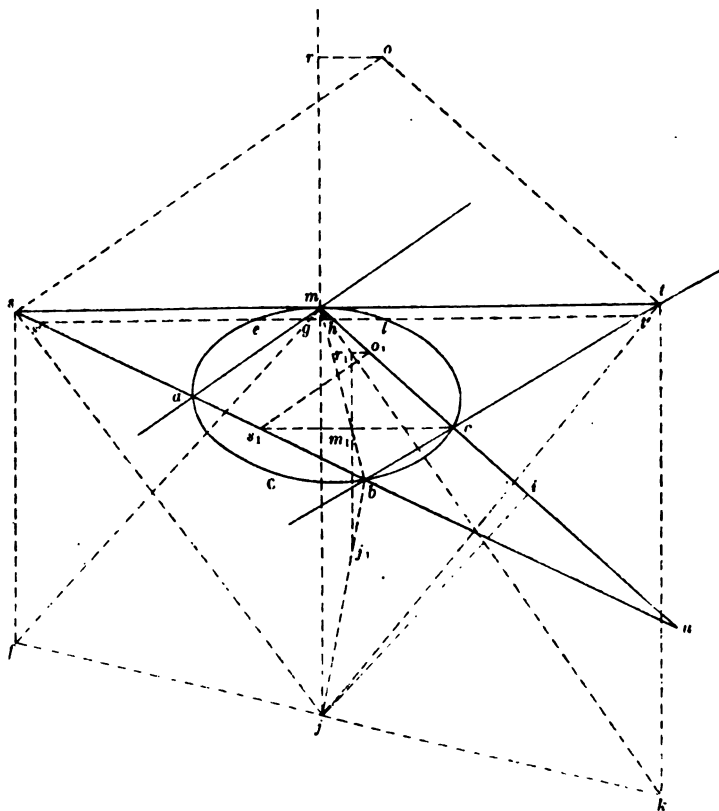
(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.* Séance du 15 mars 1875.

soit confondue avec st , la relation précédente devient

$$(1) \quad \overline{sm}^2 . mc . ub . ua = sa . sb . uc . um . mi.$$

Le même triangle $s'hu$ rencontre l'ensemble des droites am, bc

Fig. 1.



et donne, en vertu du théorème de Carnot,

$$s'g . s't' . hm . hc . ub . ua = s'a . s'b . uc . um . hg . ht'.$$

Remplaçant $\frac{hm}{hg}$ par $\frac{\sin sma}{\sin amc}$, et supposant que la droite $s't'$ soit confondue avec st , cette dernière relation devient

$$(2) \quad sm . st \sin sma . mc . ub . ua = sa . sb . uc . um \sin amc . mt.$$

Divisant terme à terme la relation (1) par la relation (2), il vient

$$\frac{1}{mi} = \frac{st}{sm \cdot mt} \frac{\sin amt}{\sin amc}.$$

Appelons ρ le rayon de courbure de C en m, on a

$$mi = 2\rho \sin cmt,$$

portant cette valeur dans la relation précédente, on obtient

$$(3) \quad \frac{1}{2\rho} = \frac{st}{sm \cdot mt} \frac{\sin amt \sin cmt}{\sin amc},$$

que l'on peut écrire

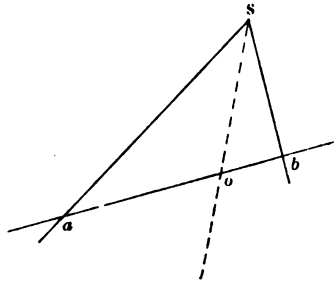
$$(4) \quad 2\rho = \frac{\frac{1}{\tan cmt} - \frac{1}{\tan amt}}{\frac{1}{sm} + \frac{1}{mt}}.$$

C'est la relation que j'ai donnée en 1875.

Il est facile de transformer cette expression de 2ρ en faisant usage du théorème suivant, que j'ai souvent appliqué et que je considère comme primordial.

On donne (fig. 2) un angle de sommet s et un point o ; on

Fig. 2.



mène de ce point une transversale quelconque qui rencontre les côtés de l'angle aux points a et b, quelle que soit cette transversale, on a

$$\left(\frac{1}{ao} + \frac{1}{ob} \right) \frac{1}{\sin .bos} = \text{const. } (1).$$

(1) Voir mon *Cours de Géométrie descriptive*, 2^e édition, p. 177.

Prenons (*fig. 1*) l'angle abc coupé par les deux transversales st et mu , on a

$$\left(\frac{1}{sm} + \frac{1}{mt}\right) \frac{1}{\sin bmt} = \left(\frac{1}{mc} - \frac{1}{mu}\right) \frac{1}{\sin bmc},$$

ou

$$\frac{1}{sm} + \frac{1}{mt} = \left(\frac{1}{mc} - \frac{1}{mu}\right) \frac{\sin bmt}{\sin bmc}.$$

Portons cette valeur dans la relation (4) et rétablissons les sinus au lieu des tangentes, on a

$$2\rho = \frac{\sin amc \sin bmc}{\sin amt \sin bmt \sin cmt \left(\frac{1}{mc} - \frac{1}{mu}\right)},$$

qui n'est autre que la relation de M. Fouret et d'où il a déduit pour ρ différentes expressions remarquables par leur symétrie.

Construisons 2ρ . Pour cela reprenons la relation (3), que l'on peut écrire

$$2\rho \cdot st = \frac{sm}{\sin cmt} \times \frac{mt}{\sin amt} \sin amc.$$

Élevons au point m la perpendiculaire mf à mc . Cette droite coupe au point f la perpendiculaire sf à st . On a

$$mf = \frac{sm}{\sin mfs} = \frac{sm}{\sin cmt}.$$

De même, en élevant respectivement à ma et mt les perpendiculaires mk et tk , on a

$$mk = \frac{mt}{\sin amt}.$$

La relation précédente peut alors s'écrire

$$2\rho \cdot st = mf \cdot mk \sin amc = mf \cdot mk \sin fmk,$$

puisque les angles amc , fmk sont supplémentaires.

Le deuxième membre de cette égalité donne le double de l'aire du triangle fmk . Comme ce triangle est équivalent à sjt dont le double de l'aire est égal à $st \times mj$, on a alors

$$2\rho \cdot st = st \cdot mj,$$

ainsi

$$2\rho = mj.$$

Il suffit donc de mener la droite fk pour avoir à sa rencontre avec la normale en m à C le point j qui est l'extrémité du segment mj , dont la longueur est double de celle du rayon de courbure de C en m .

De là résulte cette propriété : *quelle que soit la position des points a, b, c sur C , les droites telles que fk passent par le même point j .*

Voici comment on peut arriver à une autre construction de 2ρ :

Par les points s et t menons respectivement des parallèles à am et cm ; soit o le point de rencontre de ces droites ; on a

$$st = \frac{\sin sot \cdot ot}{\sin tso} = \frac{\sin amc \cdot ot}{\sin amt}.$$

Mais, en abaissant du point o la perpendiculaire or sur mj , on a

$$mr = ot \sin mto = ot \sin cmt,$$

donc

$$st = \frac{\sin amc \cdot mr}{\sin amt \cdot \sin cmt}.$$

Portant cette valeur de st dans la relation (3), on obtient

$$sm \cdot mt = 2\rho \cdot mr.$$

Ainsi les points j, s, r, t appartiennent à une même circonférence de cercle.

D'après cela, le point j est sur la perpendiculaire abaissée du point s sur la droite qui joint le point m au milieu du segment rt .

Cette construction, appliquée au cas où l'on donne le point m d'une hyperbole, la tangente en ce point, un second point o et les directions asymptotiques ma, mc fait retrouver la construction donnée par M. Fouret (1).

Comme cela arrive souvent, une construction obtenue pour un cas particulier conduit à une construction générale ; c'est, en effet, la construction donnée par M. Fouret pour une hyperbole qui m'a suggéré cette seconde construction de 2ρ pour une conique quelconque.

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Séance du 21 avril 1890.

Comme les points s et t peuvent être trop éloignés, on effectue alors la seconde construction de 2^o en employant une figure semblable à celle qu'il faudrait tracer.

Par le point c on mène la parallèle cs_1 à la tangente donnée mt . Du point s_1 on mène s_1o_1 parallèlement à am . On obtient m_1 à la rencontre de bm et de cs_1 et r_1 au pied de la perpendiculaire abaissée de o_1 sur la parallèle m_1r_1 à mr . Au moyen des points s_1 , r_1 , c et m_1 , on détermine j_1 , comme précédemment on a construit j à l'aide des points s , r , t , m : la droite bj_1 rencontre la normale en m à C au point j .

Le point b est ici, en effet, le centre de similitude de deux figures homothétiques.

Il est inutile de faire remarquer que la relation (3) peut donner lieu à des constructions très diverses du point j et que le rapprochement de ces constructions peut conduire à des propriétés géométriques nouvelles.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 6 NOVEMBRE 1889.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ.

Élection : M. Martin, présenté par MM. André et G. Humbert, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. F. Lucas : *Sur les racines de l'équation du quatrième degré.*

M. Fourret : *Sur un mode de génération de la surface de Steiner.*

SÉANCE DU 20 NOVEMBRE 1889.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ.

Élection : M. Saraz, présenté par MM. D. André et Fouché, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Fouché : *Sur une simplification à un calcul de Lamé, relatif à un changement de variables.*

M. Fourret : *Sur diverses applications d'un théorème de Liouville.*

M. Laisant : *Sur quelques propriétés des coefficients du binôme et du développement de $(x + y + z)^m$.*

SÉANCE DU 4 DÉCEMBRE 1889.

PRÉSIDENCE DE M. D. ANDRÉ.

Communications :

M. Bioche : *Sur la réalité des racines de l'équation*
 $x\varphi'_y - y\varphi'_x = 0$.

M. Laisant : *Sur les coefficients du binôme.*

M. Fouret : *Sur diverses applications d'un théorème de Liouville.*

M. Laisant : *Sur une propriété des normales menées d'un point à une surface algébrique.*

SÉANCE DU 18 DÉCEMBRE 1889.

PRÉSIDENCE DE M. LAISANT.

Communications :

M. Fouché : *Sur la méthode des périmètres pour le calcul de π .*

M. Laisant : *Sur une intégrale trigonométrique.*

SÉANCE DU 8 JANVIER 1890.

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPIILLIÈRE.

La Société procède au renouvellement de son Bureau.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur un théorème de Chasles relatif aux courbes algébriques.*

M. Fouret présente des observations sur le même sujet.

M. Fouret : *Sur les cotangentes des angles formés par les tangentes de deux courbes algébriques en leurs points communs.*

M. Kœnigs : *Sur l'oscillation de la vitesse angulaire dans le mouvement d'un corps solide.*

SÉANCE DU 22 JANVIER 1890.

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur l'enveloppe des droites polaires des points d'une droite par rapport à une courbe algébrique.*

M. Bioche : *Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches.*

M. Félix Lucas : *Sur les cercles tangents à trois cercles donnés.*

M. Poincaré : *Sur les fonctions de genre zéro.*

M. Béghin : *Sur le calcul approché des moments d'inertie.*

M. Laisant : *Sur la représentation analytique des figures planes.*

SÉANCE DU 3 FÉVRIER 1890.

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Élections : M^{lle} Lagerborg; MM. Kopp et Bjerkneess, présentés par MM. Haton de la Goupillière et Poincaré, sont élus à l'unanimité.

Communications :

M. Béghin : *Sur le cercle de Joachimstahl.*

M. d'Ocagne : *Sur l'application des coordonnées parallèles à l'étude des courbes algébriques.*

M. Kœnigs : *Sur les transformations infinitésimales qui conservent les aires et sur un paradoxe géométrique.*

M^{lle} Lagerborg : *Sur un nouveau cas d'intégration du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.*

M. Kopp : *Sur la variation des intégrales doubles.*

SÉANCE DU 19 FÉVRIER 1890.

PRÉSIDENTE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur un théorème de Chasles.*

M. Bioche : *Sur les lignes de courbure des surfaces gauches possédant une propriété donnée.*

M. Raffy : *Sur certaines surfaces, rapportées aux paramètres des lignes asymptotiques.*

SÉANCE DU 5 MARS 1890.

PRÉSIDENTE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Bioche : *Sur les surfaces réglées qui passent par une courbe donnée.*

M. Fouret : *Sur la méthode d'approximation de Newton.*

M. Carvallo : *Sur l'extension de la méthode de Gräffe pour la résolution numérique des équations.*

M. Lucas : *Sur la résolution électrique des équations. Sur les polygones inscrits à une conique.*

SÉANCE DU 19 MARS 1890.

PRÉSIDENTE DE M. LAISANT.

Communications :

M. Béghin : *Sur les courbes anallagmatiques.*

M. Raffy : *Sur les surfaces réglées dont l'élément linéaire appartient au type de Liouville.*

M. Kopp : *Sur l'équation aux dérivées partielles*

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

SÉANCE DU 2 AVRIL 1890.

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Communications :

M. Fouret : *Sur la généralisation de certains théorèmes fondamentaux relatifs aux coniques.*

SÉANCE DU 16 AVRIL 1890.

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Communication :

M. de Presle : *Sur le développement en série du quotient de deux séries ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable.*

M. Fouret : *Sur la détermination du centre de courbure d'une classe de courbes, comprenant les courbes triangulaires symétriques, les paraboles et hyperboles des divers ordres.*

SÉANCE DU 7 MAI 1890.

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Communications :

M. Fouret : *Sur un théorème de M. Jamet relatif aux courbes triangulaires symétriques.*

M. Kopp : *Sur l'équation*

$$A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F \left(z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y \right)$$

M. Laisant : *Sur quelques formules relatives aux fonctions hyperboliques.*

M. Fouret présente de la part de M. Mannheim : *Une construction du centre de courbure en un point d'une conique, quand on connaît la tangente en ce point et trois autres points de la courbe.*

SÉANCE DU 21 MAI 1890.

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Élections : MM. Zaremba, docteur ès sciences, présenté par MM. Darboux et Raffy; Gebbia et Gerbaldi, professeurs à l'Université de Palerme, présentés par MM. Guccia et G. Humbert, sont élus à l'unanimité.

Communications :

M. Fouret : *Sur une Note insérée aux Comptes rendus, et une généralisation d'un théorème de M. Humbert.*

M. Humbert : *Sur certaines aires ellipsoïdales.*

M. F. Lucas : *Sur les points communs à deux coniques.*

M. Carvallo présente, de la part de M. Antomari : *Une détermination analytique des axes de la section plane d'une quadrique.*

SÉANCE DU 4 JUIN 1890.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. F. Lucas : *Sur l'intersection de deux coniques.*

M. Fouret : *Sur la Communication précédente.*

M. Laisant : *Sur les fonctions réciproques.*

M. Fouret : *Sur les surfaces tétraédrales.*

M. d'Ocagne : *Sur l'application des coordonnées parallèles à l'étude des courbes algébriques.*

SÉANCE DU 18 JUIN 1890.

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPIILLIÈRE.

Communications :

M. André : *Sur la continuité des racines d'une équation algébrique.*

M. Béghin : *Sur la différence d'ordre n d'une fonction.*

M. d'Ocagne : *Sur certaines applications des nombres k_m^p .*

M. André : *Sur la Communication précédente.*

M. F. Lucas : *Sur les cordes communes à trois quadriques.*

M. André : *Sur des produits qui tendent vers zéro, sans qu'il en soit de même pour aucun de leurs facteurs.*

SÉANCE DU 2 JUILLET 1890.

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPIILLIÈRE.

Communications :

M. Lemoine : *Sur un système de deux triangles qu'il nomme orthologiques.*

M. Laisant : *Sur les formules d'interprétation de Lagrange et de Cauchy.*

M. d'Ocagne : *Sur une courbe définie par sa loi de rectification.*

M. Lemoine : *Sur la mesure de la simplicité des constructions géométriques.*

SÉANCE DU 16 JUILLET 1890.

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Communications :

M. Vicaire : *Sur le théorème d'Yvon Villarceau relatif au tore.*

M. d'Ocagne : *Sur la rectification d'une classe de courbes.*

M. Kopp : *Sur le maximum ou le minimum d'une intégrale double, dans le cas d'une surface présentant des lignes de discontinuité.*



TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XVIII.

	Pages
État de la Société mathématique de France au commencement de l'année 1890.....	v
Essai de théorie complète du système de deux formes ternaires quadratiques; par M. R. PERRIN.....	1
Formules de quaternions pour la réduction des intégrales multiples les unes dans les autres; par M. E. CARVALLO.....	80
Sur le ds^2 des surfaces réglées; par M. CH. BIOCHE.....	91
Remarques sur les lignes de courbure qui passent par un ombilic; par M. CH. BIOCHE.....	95
Remarques sur les transformations isogonales; par M. M. D'OCAGNE.....	107
Sur l'application des coordonnées parallèles à la démonstration d'un théorème de Chasles relatif aux surfaces algébriques; par M. M. D'OCAGNE...	108
Sur le problème du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe; par M ^{lle} NANNY LAGERBERG.....	118
Sur la représentation analytique des figures planes, et leur segmentation; par M. C.-A. LAISANT.....	123
Sur l'oscillation de la vitesse angulaire dans le mouvement d'un corps solide libre; par M. G. KÆNIGS.....	131
Remarques sur la méthode des périmètres pour calculer le nombre π ; par M. MAURICE FOUCHÉ, agrégé de l'Université, professeur à Sainte-Barbe...	135
Note sur le cercle de Joachimstahl; par M. BÉGHIN.....	138
Expression du produit des coefficients du binôme; par M. C.-A. LAISANT.....	140
Propriété des surfaces algébriques; par M. C.-A. LAISANT.....	141
Nature des racines de l'équation du quatrième degré; par M. FÉLIX LUCAS.....	145
Sur une simplification à un calcul de Lamé relatif à un changement de variable; par M. MAURICE FOUCHÉ.....	149
Méthode d'approximation pour calculer le moment d'inertie et la position du centre de gravité d'une aire plane; par M. BÉGHIN.....	152
Sur une propriété d'une classe de courbes algébriques; par M. WEILL.....	154
Rayon de courbure d'une conique; par M. A. MANNHEIM.....	155
Extraits des Procès-Verbaux des Séances.....	161

FIN DE LA TABLE DU TOME XVIII.

PARIS. --- IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS. QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

(Reconnue d'utilité publique par décret en date du 11 février 1883).

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME DIX-NEUVIÈME.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

—
1891

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

17021. Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quel des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,
PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME DIX-NEUVIÈME. — ANNÉE 1890-91.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS. 7.
—
1891



LISTE
DES
PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
DEPUIS SA FONDATION.

	MM.
1873	CHASLES.
1874	LAFON DE LADÉBAT.
1875	BIENAYMÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.
1877	MANNHEIM.
1878	DARBOUX.
1879	O. BONNET.
1880	JORDAN.
1881	LACERRE.
1882	HALPHEN.
1883	ROUCHÉ.
1884	PICARD.
1885	APPELL.
1886	POINCARÉ.
1887	FOURET.
1888	LAISANT.
1889	ANDRÉ.
1890	HATON DE LA GOUILLIÈRE.
1891	COLLIGNON.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

BENOIST, docteur en droit.
BIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé).
BIOCHE, professeur de Mathématiques.
BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut.
BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé).
BROCARD, chef de bataillon du Génie.
CANET, ingénieur civil.
CHASLES, membre de l'Institut (décédé).
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier.
FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique.
GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-éditeur.
HALPHEN, membre de l'Institut (décédé).
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut.
HERMITE, membre de l'Institut.
HIRST, directeur des études de l'École navale de Greenwich.
JORDAN, membre de l'Institut.
LAFFON DE LADÉBAT, vice-amiral (décédé).
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique.
MERCEREAU, licencié ès sciences mathématiques.
PEROTT (Joseph).
PERRIN, ingénieur en chef des Mines.
POINCARÉ, membre de l'Institut.
POLIGNAC (prince C. DE).
RAFFY, maître de Conférences à la Faculté des Sciences.
SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald.
TANNERY (Paul), directeur des manufactures de l'État.
TARRY, receveur des Contributions diverses.
TCHÉBICHEFF, membre de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg.
VIELLARD, manufacturier (décédé).

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1891 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau	{	MM. BERTRAND. CREMONA. DARBOUX. HERMITE. TCHÉBICHEFF.
Président		MM. COLLIGNON.
Vice-Présidents	{	DE COMBEROUSSE. HUMBERT. PICQUET. VICAIRE.
Secrétaires	{	KOENIGS. RAFFY.
Vice-Secrétaires	{	CARVALLO. L. LÉVY.
Archiviste		D'OCAGNE
Tresorier		CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil ⁽²⁾	{	ANDRÉ, 1893. APPELL, 1894. FOURET, 1893. GOURSAT, 1892. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, 1894. JORDAN, 1892. LAISANT, 1892. MANNHEIM, 1894. PICARD, 1894. POINCARÉ, 1893. DÉ PRESLES, 1892. ROUCHÉ, 1893.

⁽¹⁾ MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

⁽²⁾ La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission.

1872. **ACHARD**, directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 bis, à Paris.
1887. **ALBEGGIANI** (M.-L.), professeur à l'Université, Salita Banditore, 4, à **Palerme (Italie)**.
1881. **AMIGUES**, professeur au lycée, boulevard du Musée, 66, à **Marseille (Bouches-du-Rhône)**.
1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès Sciences, rue Gay-Lussac, 17, à **Paris**.
1890. **ANTOMARI**, professeur de Mathématiques, rue Vavin, 5, à **Paris**.
1879. **APPELL**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Le Verrier, 6, à **Paris**.
1884. **ARNAUD**, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Nice (**Alpes-Maritimes**).
1872. **ARON** (Henri), banquier, rue du Quatre-Septembre, 18, à **Paris**.
1881. **ASTOR**, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard de Bonne, à **Grenoble (Isère)**.
1882. **AUTONNE**, ingénieur des Ponts et Chaussées, place d'Helvétie, 7, à **Lyon (Rhône)**.
1888. **BAPST** (Germain), faubourg Saint-Honoré, 215, à **Paris**.
1886. **BARBERENA**, ingénieur topographe, à San-Salvador.
1889. **BEGHIN** (Maurice), boulevard Saint-Germain, 63, à **Paris**.
1874. **BENOIST** (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, 3, à **Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loire)**, S. P. ⁽¹⁾.
1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (**Haute-Saône**).
1873. **BERTRAND** (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, membre de l'Académie française, rue de Tournon, 4, à **Paris**.
1887. **BEYENS** (Ignacio), capitaine du Génie, Santa Inés, 5, à **Cadix (Espagne)**.
1872. **BIENAYMÉ** (Arthur), directeur des constructions navales, au Ministère de la Marine, à **Paris**.
1888. **BIOCHE**, professeur au Lycée Michelet, rue de Madame, 34, à **Paris**, S. P.
1875. **BISCHOFFSHEIM**, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à **Paris**, S. P.
1890. **BJERKNES**, au Laboratoire de Physique, à Bonn (**Allemagne**).
1881. **BONCOMPAGNI** (le prince Balthasar), palais Piombino, place Colonna, à **Rome (Italie)**.
1873. **BOULANGER**, professeur de Mathématiques, rue Constantine, 101, à **Mustapha inférieure (Algérie)**.
1886. **BRAULT** (A.), boulevard de Toulouse, 362, à **Bordeaux (Gironde)**.
1874. **BRIOSCHI**, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École Polytechnique, à **Milan (Italie)**.
1872. **BRISSE** (Ch.), professeur à l'École Centrale, rue Vauquelin, 15, à **Paris**.
1873. **BROCARD**, chef de bataillon du Génie, à **Valence (Drôme)**.
1886. **BRUNEL**, professeur à la Faculté des Sciences, à **Bordeaux (Gironde)**.
1888. **CANET** (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie à la Société des Forges de la Méditerranée, avenue de Malakoff, 91, à **Paris**, S. P.
1885. **CARON**, professeur de Géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 82, à **Paris**.
1887. **CARVALLO**, examinateur à l'École Polytechnique, villa Saïd, 19, **Passy-Paris**.
1884. **CASEY** (John), professeur à l'Université catholique de Dublin, **Stephens Green, 86, à Dublin (Grande-Bretagne)**.
1887. **CASPARY**, professeur au Collège Humboldt, à **Berlin (Allemagne)**.
1873. **CATALAN**, professeur émérite à l'Université, 21, rue des Éburons, à **Liège (Belgique)**.
1887. **CERRUTI**, professeur à l'Université, à **Rome (Italie)**.
1888. **CHAILAN** (Edouard), rue Berthollet, 14, à **Paris**.

(¹) Les initiales S. P. désignent les Sociétaires perpétuels.

Date
de
l'admission.

1881. **CHEMIN**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, avenue de l'Alma, 12, à Paris.
1884. **CHRYSTAL**, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
1873. **CIVIALE**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.
1875. **CLAUDE-LAFONTAINE**, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris, S. P.
1872. **COLLIGNON**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
1890. **COLOT**, au château du Seuil, à Cérons (Gironde).
1875. **COMBEROUSSE** (DE), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale, rue Saint-Lazare, 94, à Paris.
1872. **COURCELLES**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
1884. **CRAIG** (Thomas), professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1877. **CREMONA**, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome (Italie).
1880. **CRETIN**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1872. **DARBOUX**, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
1885. **DAUTHEVILLE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1881. **DEFFORGES**, chef de bataillon d'infanterie, attaché à l'Etat-major du Ministre de la Guerre, boulevard Latour-Maubourg, 41, à Paris.
1882. **DELANVOY**, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
1885. **DENARTRES**, professeur à la Faculté des Sciences, à Lille (Nord).
1883. **DERUYTS**, docteur ès sciences, chargé de Cours à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1872. **DEWULF**, général commandant le Génie de la 15^e région, boulevard Rabuteau, 2, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1882. **DREYFUS** (Camille), député, rue de l'Université, 195, à Paris.
1886. **DUNCAN**, assistant à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1872. **DURRANDE**, doyen de la Faculté des Sciences, à Poitiers (Vienne).
1885. **DYCK** (Walther), professeur au Polytechnicum, à Munich (Bavière).
1881. **ESCARY**, professeur au Lycée, à Constantine (Algérie).
1873. **FABRE**, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard des Batignolles, 84, à Paris.
1888. **FABRY**, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1885. **FERRAZ**, professeur au Lycée, à Toulouse (Haute-Garonne).
1885. **FIELDS** (John), professeur à Hamilton (Canada).
1881. **FLOQUET**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 17, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1872. **FLYE SAINTE-MARIE**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 12, à Paris.
1889. **FOUCHÉ**, professeur de Mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris.
1872. **FOURET**, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris, S. P.
1872. **GARIEL**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, agrégé de la Faculté de Médecine, rue Joffroy, 39, à Paris.
1872. **GAUTHIER-VILLARS**, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
1890. **GEBBIA**, professeur à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. **GENTY**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Oran (Algérie).

Date
de
l'admission.

1889. **GEORGIAN**.
1890. **GERBALDI**, professeur à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. **GERONO**, ancien professeur de Mathématiques, rue Hallé, 32 et 34, à Paris.
1872. **GOFFART**, rue Nollet, 57, Paris.
1881. **GOUSAT**, maître de Conférences à l'École Normale supérieure, boulevard Raspail, 216, à Paris.
1872. **GRAINDORGE**, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
1881. **GRUEY**, directeur de l'Observatoire, à Besançon (Doubs).
1880. **GUCCIA** (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Italie).
1881. **GUNTHER** (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. **GUYOU**, capitaine de frégate, rue de l'Université, 13, à Paris.
1873. **HAAG**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 1, à Paris.
1882. **HADICH**, directeur de l'École des mines, à Lima (Pérou).
1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des Mines, directeur de l'École des Mines, boulevard Saint-Michel, 60, à Paris, S. P.
1872. **HENRY**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Privas (Ardèche).
1882. **HENRY** (Charles), bibliothécaire à la Sorbonne, 2, rue Jean-de-Beauvais, à Paris.
1873. **HERMITE**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris, S. P.
1875. **HIRST**, Athenæum Club, Londres (Angleterre), S. P.
1879. **HOLST** (Elling), stipendiat de l'Université, Pilestrade, 49, à Christiania (Norvège).
1872. **HOUBIGANT**, chef de bataillon du Génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
1872. **HUGO** (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
1880. **HUMBERT**, ingénieur des Mines, répétiteur à l'École Polytechnique, 16, boulevard Malesherbes, à Paris.
1887. **IBRAHIM EFFENDI**, professeur de Mathématiques à l'École impériale civile de Médecine, à Constantinople (Turquie).
1881. **IMBER**, professeur à l'École Colbert, rue Château-Landon, 27, à Paris.
1887. **ISSALY** (l'abbé), boulevard de Caudéran, 365, à Bordeaux (Gironde).
1873. **JANIN**, chef d'escadron au 17^e régiment d'Artillerie, à la Fère (Aisne).
1872. **JAVARY**, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris.
1889. **JONQUIÈRE** (Alfred), Docteur en Philosophie, rue Fédérale, 10, à Berne (Suisse).
1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varenne, 48, à Paris, S. P.
1872. **JOUFFRET**, lieutenant-colonel d'Artillerie, à Bourges (Cher).
1875. **JUNG**, professeur à l'Institut technique supérieur, via Principe Umberto, 7, à Milan (Italie).
1880. **KENIGS**, maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard de Port-Royal, 72, à Paris.
1890. **KOBB** (Gustaf), Gothembourg (Suède).
1882. **KRONECKER** (Dr Léopold), professeur à l'Université, Bellevuestrasse, 13, à Berlin (Allemagne).
1881. **LACOR**, professeur de Mathématiques, 10, rue Stanislas, à Paris.
1890. **LAGERBORG** (M^{lle}), à Helsingfors (Finlande).

Date
de
l'admission.

1873. LAISANT, député, docteur ès sciences, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris.
1875. LAQUIÈRE, administrateur de la commune mixte de Palestro (département d'Alger).
1873. LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
1881. LAVEISSIÈRE, rue de la Verrerie, 58, à Paris.
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, directeur des études à l'école Monge, boulevard Malesherbes, 141, à Paris.
1872. LEMOINE (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Littré, 5, à Paris.
1879. LE PAIGE, professeur à l'Université, rue des Anges, 21, à Liège (Belgique).
1882. LE PONT, rue Saint-Jacques, 247, à Paris.
1872. LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1882. LÉVY (Léon), ingénieur en chef des Mines, rue de Logelbach, 9, à Paris.
1882. LÉVY (Lucien), examinateur à l'École Polytechnique, rue de Condé, 29, à Paris.
1872. LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur au Collège de France, boulevard Saint-Germain, 258, à Paris.
1875. LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1873. LIGUINE, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
1877. LINDEMANN, professeur à l'Université, Fragheimer-Pulverplatz, 5, à Kœnigsberg (Allemagne).
1886. LIQUILLE, ingénieur des poudres, répétiteur à l'École Polytechnique, rue des Écoles, 6 bis, à Paris.
1880. LORIV, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Honoré, 186, à Paris.
1872. LUCAS (Édouard), professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne, rue Boutarel, 1, à Paris.
1888. LUCAS (Félix), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, avenue du Trocadéro, 19, à Paris.
1886. LYON, docteur ès sciences mathématiques, au bureau de M. le Baron de Gunsbourg, à Saint-Petersbourg (Russie).
1882. MACÉ DE LÉPINAY, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, boulevard Saint-Michel, 14, à Paris.
1872. MALEYX, professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 44, à Paris.
1875. MALLOIZEL, professeur de Mathématiques, rue de l'Estrapade, 17, à Paris.
1872. MANNHEIM, colonel d'Artillerie, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
1872. MARSILLY (le général de), rue Chante-Pinot, à Auxerre (Yonne).
1884. MARTIN (Artemas), U. S. Coast and geodesic Survey Office, Washington D. C. (Etats-Unis d'Amérique).
1880. MARTIN, ancien élève de l'École polytechnique, professeur de Mathématiques, rue Lhomond, 60, à Paris.
1890. MASSIEU, inspecteur général des Mines, avenue d'Antin, 18, à Paris.
1886. MAXIMOVITCH (Vladimir), professeur à l'Université, rue Timoficoska, 8, à Kiew (Russie).
1889. MENDIZABAL TAMBORÉL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, 1^{er} de Cora, n° 1 1/2, Orizaba (Mexique).
1884. MERCEREAU, licencié ès Sciences, boulevard Saint-Michel, 121, à Paris, S. P.
1873. MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1872. MOUTARD, inspecteur général des Mines, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1888. MUKHOPADHYAY (Asutosh), professeur de Mathématiques, Russa Road, 77, North Bhowanipore, à Calcutta (Inde).

Date
de
l'admission.

1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Selessin, 6, à Liège (Belgique).
1882. **OCAGNE** (b'), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1873. **OVIDIO** (Enrico b'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1888. **PAPELIER** (Georges), professeur de Mathématiques spéciales au lycée, quai Barre-
tin, 22, à Orléans (Loiret).
1884. **PARAF**, maître de Conférences à la Faculté des Sciences, rue du Faubourg-Stanis-
las, 59, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1872. **PARMENTIER** (le général), rue du Cirque, 5, à Paris.
1872. **PARRAN**, ingénieur en chef des Mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris.
1882. **PATURET**, ancien élève de l'École Polytechnique, à Valegnat, par Bellenaves (Allier).
1881. **PAUTONNIER** (l'abbé), professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs,
19, à Paris.
1881. **PELLET**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Blatin, 51, à Clermont-Ferrand
(Puy-de-Dôme).
1883. **PELLETREAU**, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Constantine (Algérie).
1874. **PERCIN**, chef d'escadron d'Artillerie, commandant le 4^e bataillon de forteresse, à Ver-
dun (Meuse).
1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts), S. P.
1873. **PERRIN**, ingénieur en chef des Mines, rue Erpell, 5, au Mans (Sarthe), S. P.
1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1873. **PHILIPPON**, secrétaire de la Faculté des Sciences, à la Sorbonne, à Paris.
1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de
la Sorbonne, 2, à Paris.
1872. **PICQUET**, chef de bataillon du Génie, examinateur d'admission à l'École Polytech-
nique, rue Bara, 9, à Paris.
1882. **POINCARÉ**, membre de l'Institut, ingénieur des Mines, professeur à la Faculté des
Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris, S. P.
1882. **POKORNY** (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohême).
1872. **POLIGNAC** (prince C. DE), 6, cité Odier, rue Washington, à Paris, S. P.
1877. **POUSSET**, professeur au lycée, à Poitiers (Vienne).
1877. **PRESLE** (DE), sous-intendant militaire en retraite, rue Monge, 82, à Paris.
1872. **PUTZ** (le général), rue Saint-Méry, 98, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
1872. **RADAU**, rue de Tournon, 12, à Paris.
1883. **RAFFY**, maître de Conférences à la Faculté des Sciences, boulevard Saint-Michel, 99,
à Paris.
1873. **RANCY** (DE), administrateur de la Compagnie d'assurances *le Soleil*, rue For-
tuny, 5, à Paris.
1874. **REINACH** (baron DE), banquier, rue de la Bourse, 4, à Paris.
1872. **RIBACOUR**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Philippeville (Algérie).
1881. **RIBOT**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon (Côte-
d'Or).
1888. **ROBIN** (Gustave), docteur ès sciences mathématiques, rue Chanoinesse, 2, à Paris.
1872. **RODET**, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, 63, à Paris.
1872. **ROUART**, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.
1872. **ROUCHÉ** (Eugène), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, examinateur des
élèves à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
1885. **ROUQUET**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, place de l'École-d'Artille-
rie, 2, à Toulouse (Haute-Garonne).

Date
de
l'admission.

1872. ROUSSELIN, professeur au lycée Fontanes, rue du Rocher, 35, à Paris.
1888. RUSSO (Giovanni), professeur, Discesa Case Arse, 2, Catanzaro (Italie).
1881. SAINT-PAUL (DUCCO DE), sous-directeur d'Artillerie à l'Arsenal de Toulouse (Haute-Garonne).
1889. SARAZ, professeur de Mathématiques, 60, rue Monsieur-le-Prince, Paris.
1872. SARRAU, membre de l'Institut, ingénieur en chef des Poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mandé (Seine).
1872. SARTIAUX, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, chef adjoint de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. SAUVAGE, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. SCHLEGEL (Dr Victor), à Hagen (Allemagne).
1881. SCHOUTE, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1876. SCHUBERT, professeur, Steindamm, 107, à Hambourg (Allemagne).
1877. SÉGUY, avenue des Gobelins, 28, à Paris.
1882. SÉLIVANOFF (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 102, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
1883. SIMART, lieutenant de vaisseau, répétiteur à l'Ecole Polytechnique, examinateur d'admission à l'École navale, rue Miroménil, 70, à Paris.
1881. STARKOFF (Alexis), professeur à l'École de Commerce, Deribasowskaja, 6, à Odessa (Russie).
1879. STEPHANOS (Dr Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
1886. STIELTJES, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Fleurance-Montplaisir, 4, à Toulouse (Haute-Garonne).
1873. STUONICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
1872. SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norwège), S. P.
1872. TANNERY (Paul), directeur des Manufactures de l'État, rue de Penthhièvre, 38, Paris. S. P.
1875. TANNERY (Jules), sous-directeur de l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
1882. TARRY (Gaston), receveur des Contributions diverses, rue Clauzel, à Alger (Algérie), S. P.
1882. TCHÉBICHEFF, membre de l'Académie des Sciences, à Saint-Petersbourg (Russie), S. P.
1872. TERRIER, professeur de Mathématiques, rue de Condé, 15, à Paris.
1872. TISSERAND, membre de l'Institut, avenue de l'Observatoire, 5, à Paris.
1873. TISSOT, ancien examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1872. TRESCA, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
1872. VACQUANT, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
1884. VANDAME, ancien officier d'Artillerie, rue de la Vignette, 65, à Lille (Nord).
1880. VÁNEČEK (J.-S.), professeur au lycée, à Kralové Hradec (Autriche).
1885. VÁNEČEK (M.-M.), professeur, à Kralové Hradec (Autriche).
1890. VASCHY, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique, avenue Bosquet, 68, à Paris.
1876. VICAIRÉ, ingénieur en chef des Mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
1888. VITO VOLTERRA, professeur à l'Université de Pise (Italie).
1880. WALCKENAEER, ingénieur des Mines, 9, rue Bayard, à Paris.
1879. WEILL, professeur au collège Chaptal et à l'école Monge, 19, rue Thiers, au Vésinet (Seine-et-Oise).

Date
de
l'admission.

1873. WEYR (Dr Edouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
1872. WEYR (Dr Émile), professeur à l'Université, Hauptstrasse, 109, à Vienne, III (Autriche).
1882. WILSON, avenue d'Iéna, 2, à Paris.
1878. WORMS DE ROMILLY, ingénieur en chef des Mines, rue Balzac, 7, à Paris.
1882. ZABOUDSKY, capitaine de l'Artillerie russe, professeur à l'École d'Artillerie, à Saint-Petersbourg (Russie).
1890. ZARENBA, docteur ès sciences mathématiques, rue d'Ulm, 34, à Paris.
1881. ZEUTHEN, professeur à l'Université, Citadelsvej, 9, à Copenhague (Danemark).
-

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik</i> (rédac- teur Dr Hoppe, Prinzenstrasse, 69. S. W.)	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathe- matik</i> (rédacteur M. Lampe).	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Ma- thematik</i> (rédacteurs MM. Kronecker et Weierstrass).	Allemagne.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics</i> , publié par l'Université John Hopkins (rédacteur M. Thomas Craig).	États-Unis d'Amérique.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bo- logne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab</i> chez M. Gammenneyer, libraire, Carl Johans Gade, 33, à Christiania.	Norvège.
Coimbre.....	<i>Jornal de Sciencias matematicas e astrono- micas</i> (rédacteur M. Gomes Teixeira).	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik</i> (rédacteurs MM. Foldberg et Juel).	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Ecole Polytechnique de Delft.	Hollande.
Dresde.....	<i>Zeitschrift für Mathematik und Physik</i> (ré- dacteur Dr Oscar Schlömilch).	Allemagne.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne
Gand.....	<i>Mathesis</i> (rédacteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).	Belgique.
Goettingue.....	Société Royale des Sciences de Goettingue.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen</i> (rédacteur M. Félix Klein, à Goettingue).	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Russie.
Kharkoff.....	Société mathématique de Kharkoff.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.

Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis d'Amérique.
Odessa.....	Société mathématique d'Odessa.	Russie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences, à Paris.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques</i> (rédacteurs MM. Darboux et J. Tannery).	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique</i> .	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques élémentaires</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques spéciales</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	France.
Paris.....	Institut des Actuaire français.	France.
Palerme.....	<i>Circolo matematico (Rendiconti del)</i> .	Italie.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Prague.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pěstování matematiky a fysiky</i> (rédacteur M. Edouard Weyr).	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Prague.	Autriche.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincci</i> .	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm.....	<i>Acta Mathematica</i> (rédact. M. Mittag-Leffler).	Suède.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse</i> .	France.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Venise.....	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik</i> , (rédact. MM. Escherich et Weyr).	Autriche.
Zurich.....	Société des Sciences naturelles de Zurich.	Suisse.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur les surfaces développables; par M. GUSTAF KOBÉ.

Dans ses travaux sur les équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre, M. Picard a donné une méthode pour reconnaître s'il existe une infinité d'intégrales régulières passant par un contour donné. L'emploi de cette méthode peut être étendu, avec quelques restrictions, aux équations non linéaires. Je veux l'appliquer à une équation non linéaire très simple, savoir

$$rt - s^2 = 0,$$

l'équation bien connue des surfaces développables.

Soit z une intégrale régulière de cette équation passant par un contour fermé donné C , et soit

$$z + \zeta$$

une autre intégrale régulière passant par le même contour. Considérons l'intégrale double

$$\iint \zeta [\varphi(z + \zeta) - \varphi(\zeta)] dx dy$$
$$\varphi(z) = rt - s^2,$$

l'intégration étant étendue à tous les points de l'aire limitée par la projection sur le plan des xy du contour C .

Cette intégrale double est évidemment nulle. Nous aurons ainsi

$$(1) \quad \iint \zeta [\varphi(z + \zeta) - \varphi(z)] dx dy = 0.$$

Il s'agit maintenant de voir si l'équation peut être vérifiée pour des valeurs de ζ qui ne soient pas identiquement nulles. Pour des valeurs de ζ très petites, il suffit de considérer les termes linéaires de la différence

$$\varphi(z + \zeta) - \varphi(z).$$

L'intégrale double (1) deviendra alors

$$(2) \quad \iint \zeta \left(t \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + r \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) dx dy.$$

En intégrant par parties, on aura

$$\begin{aligned} \iint t \zeta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} dx dy &= \int_C t \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} dy - \iint \left[t \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial t}{\partial x} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] dx dy \\ &= \int_C \left[t \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial t}{\partial x} \zeta^2 \right] dy - \iint \left[t \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \zeta^2 \right] dx dy \end{aligned}$$

mais, comme z s'annule au bord du contour C, l'intégrale simple disparaît. On trouve de la même manière

$$\begin{aligned} \iint r \zeta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} dx dy &= - \iint \left[r \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \zeta^2 \right] dx dy \\ - \iint 2s \zeta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} dx dy &= - \iint \left(-2s \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} \zeta^2 \right) dx dy \end{aligned}$$

et, par conséquent, l'intégrale (2) a pour expression

$$- \iint \left[t \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + r \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 - 2s \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} \right) \zeta^2 \right] dx dy.$$

Or on a

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} = 0.$$

Alors l'intégrale (2) deviendra

$$- \iint \left[t \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + r \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 - 2s \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] dx dy.$$

On voit immédiatement que le déterminant de la forme quadratique sous le signe $\int$ est nul en vertu de l'équation

$$rt - s^2 = 0.$$

Par conséquent, la forme quadratique se réduit à un seul carré, qui peut être écrit de deux manières, ou bien

$$\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial \zeta}{\partial y} - s \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2$$

ou bien

$$\frac{1}{t} \left(t \frac{\partial \zeta}{\partial x} - s \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2.$$

Mais pour que l'intégrale double (2) soit nulle, il faut que la forme quadratique soit nulle. Ainsi l'on a

$$r \frac{\partial \zeta}{\partial y} - s \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0,$$

ou

$$t \frac{\partial \zeta}{\partial x} - s \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0.$$

On voit que chacune de ces équations sera vérifiée, si l'on pose

$$\zeta = f \left(k \frac{\partial z}{\partial x} + k_1 \frac{\partial z}{\partial y} \right);$$

ζ doit s'annuler au bord du contour C. On aura ainsi, sur le contour C,

$$0 = f \left(k \frac{\partial z}{\partial x} + k_1 \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Mais, pour toute surface développable, on a

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Par conséquent, sur le contour C, on aura

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \text{const.}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \text{const.},$$

ce qui est impossible, si le contour n'est pas une ligne droite. Ainsi, il ne peut pas exister deux intégrales régulières et infiniment voisines de l'équation

$$rt - s^2 = 0,$$

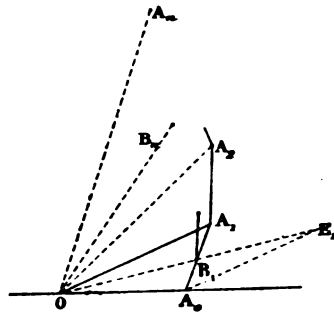
qui passent par le même contour fermé C. On pourrait aussi énoncer ce résultat de la manière suivante : « Par un contour fermé C il ne passe jamais deux surfaces développables, qui n'aient pas de points singuliers et qui soient infiniment voisines l'une de l'autre. »

Propriété géométrique des coefficients du binôme ;

par M. C.-A. LAISANT.

On sait qu'on appelle *myosotis* la figure formée par une série de triangles directement semblables OA_0A_1 , OA_1A_2 , ... accolés successivement les uns aux autres. Nous appellerons le premier de ces triangles OA_0A_1 *base* du myosotis.

Soit un myosotis $OA_0A_1 \dots A_n$ composé de n triangles. Appli-



quons aux sommets $A_0, A_1, \dots, A_n$ des masses proportionnelles aux coefficients $1 = C_0, C_1, \dots, C_n = 1$ du développement de $(x+1)^n$; et proposons-nous de trouver le barycentre de ce système.

Si nous prenons OA_0 pour unité, et si nous posons $OA_1 = \lambda$, nous avons $OA_2 = \lambda^2$, $OA_3 = \lambda^3$, ..., $OA_n = \lambda^n$, et, par conséquent, le barycentre cherché K est donné par

$$\begin{aligned} OK = k &= \frac{C_0 + C_1\lambda + C_2\lambda^2 + \dots + C_n\lambda^n}{C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_n} \\ &= \frac{(1+\lambda)^n}{2^n} = \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^n = B^n = OB_1^n, \end{aligned}$$

en désignant par B_1 le milieu de A_0A_1 .

Si donc nous construisons le myosotis $OA_0B_1B_2 \dots B_n$, de base OA_0B_1 , le sommet B_n sera le barycentre cherché.

Il est évident, d'après cela, que l'angle B_nOA_0 est égal à n fois l'angle B_1OA_0 . Quand le triangle de base OA_0A_1 est isocèle, tous les points $A_0, A_1, \dots$ sont sur une même circonférence; et alors OB_n est la bissectrice de A_nOA_0 .

Quand le triangle OA_0B_1 est isoscèle, le barycentre est sur la circonférence de centre O et de rayon OA_0 .

Si l'on prolonge les droites $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$, de telle sorte qu'on ait $OD_1 = C_1 OA_1 = \dots, OD_n = C_n OA_n = OA_n$, il sera aisé de trouver le centre des moyennes distances L des points $A_0, D_1, D_2, \dots, D_{n-1}, A_n$. En effet, on aura

$$(n+1)L = C_0 A + C_1 A^2 + \dots + C_n A^n = (1+A)^n.$$

Si nous prolongeons OB_1 en $OE_1 = 2OB_1$ et si nous construisons le myosotis de base OA_0E_1 , c'est-à-dire $OA_0E_1E_2 \dots E_n$, on aura, par conséquent, $OL = \frac{OE_n}{n+1}$.

Si, enfin, nous construisons $OF_1 = \frac{OA_1}{C_1}, OF_2 = \frac{OA_2}{C_2}, \dots, OF_n = \frac{OA_n}{C_n} = OA_n$, et, si nous appliquons en $A_0, F_1, F_2, \dots, A_n$, des masses proportionnelles aux carrés des coefficients $C_0^2, C_1^2, \dots, C_n^2$, le barycentre G de ce système sera donné par la relation

$$\frac{(2n)!}{n!n!} OG = (1+A)^n = OE_n, \quad OG = \frac{n!n!}{(2n)!} OV.$$

On peut remarquer que $OE_n = 2^n OB_n$.

Sur la rectification approximative d'un arc de courbe;
par M. A.-E. PELLET.

1. Sur la tangente en un point M d'une courbe, prenons des longueurs égales de part et d'autre du point M , ML, ML' ; puis sur la normale au point M et du côté du centre de courbure, une longueur égale à trois fois le rayon de courbure MC ; joignons le point C aux points L et L' ; soient P et P' les points de rencontre de $LC, L'C$ avec la courbe; la différence de l'arc PP' et de la ligne LL' est un infiniment petit du 5^e ordre.

En effet, soit

$$y = ax^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \dots$$

l'équation de la courbe. Son arc, compté à partir du point M ,

aura pour longueur

$$S = x + 2a^2 \frac{x^3}{3} + 3aa_1 \frac{x^5}{2} + (9a_1^2 + 16aa_2 - 4a^4) \frac{x^7}{10} + \dots$$

La ligne ML' est égale à

$$\frac{x}{1 - \frac{2ay}{3}} = x + \frac{2a^2}{3} x^3 + \frac{2aa_1}{3} x^5 + \left(\frac{2aa_2}{3} + \frac{4a^4}{9} \right) x^7 + \dots$$

et enfin la différence d de l'arc PL' et de la droite LL' est égale à

$$d = \frac{81a_1^2 + 84aa_2 - 76a^4}{45} x^5 + \dots$$

d est une fonction impaire de x .

2. Pour la conique $y = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, il vient

$$y = Ax^2 + 2BAx^3 + (B^2A + CA^2)x^4 + \dots$$

et

$$d = \frac{660B^2A^2 + 84CA^3 - 76A^4}{45} x^5 + \dots$$

Cherchons les points pour lesquels cette différence est un infiniment petit du septième ordre. Il faut qu'on ait

$$165B^2 + 21CA - 19A^2 = 0.$$

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation de la conique rapportée à son centre et à ses axes, on a

$$B^2 - AC = \frac{-1}{a^2b^2}, \quad A + C = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

et la relation précédente devient

$$205A^2 - 186 \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} A + \frac{165}{a^2b^2} = 0.$$

Les points cherchés sont à l'intersection de la conique avec le diamètre conjugué de l'axe nouveau des x ; ρ^2 étant le carré de leur distance au centre, on a par le théorème d'Apollonius

$$\frac{1}{\Lambda} + \rho^2 = a^2 + b^2;$$

d'où, pour l'équation en ρ^2 ,

$$165\rho^4 - 144(\alpha^2 + b^2)\rho^2 + 205\alpha^2 b^2 - 21(\alpha^2 + b^2)^2 = 0.$$

Pour une ellipse $\alpha^2 > b^2 > 0$, les valeurs de ρ^2 comprises entre α^2 et b^2 seules donneront des points réels. Pour $\rho^2 = b^2$, le premier membre de l'équation prend la valeur $(19b^2 - 21\alpha^2)\alpha^2$, quantité négative; pour $\rho^2 = \alpha^2$, $(19\alpha^2 - 21b^2)b^2$; il faut qu'elle soit positive pour qu'il y ait une racine comprise entre b^2 et α^2 .

Pour l'hyperbole $\alpha^2 > 0$, $b^2 = -b'^2$, b' étant réel, les racines de l'équation en ρ^2 sont de signes contraires; et la racine positive est supérieure à α^2 , puisque pour $\rho^2 = \alpha^2$, le premier membre de l'équation devient $-(19\alpha^2 + 21b'^2)b'^2$, quantité négative.

Pour la parabole

$$(x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2 = 2p(x \cos \varphi - y \sin \varphi),$$

on a $B^2 = AC$; la relation devient

$$186C - 19A = 0,$$

ou, par rapport à l'angle φ ,

$$186 \cos^2 \varphi - 19 \sin^2 \varphi = 0.$$

On a donc toujours deux points pour lesquels la différence d est un infiniment petit du septième ordre.

3. Soit

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} + z_3 + \dots$$

l'équation d'une surface en un point ordinaire. L'élément dS de cette surface a pour valeur $dx dy$ multiplié par

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = 1 + \frac{x^2}{2R_1^2} + \frac{y^2}{2R_2^2} + \left(\frac{R_1}{x z_{3x}} + \frac{R_2}{y z_{3y}} \right) + \dots$$

Prenons sur la normale, à cette surface, un point situé à une distance $\mathfrak{A}$ de l'origine et joignons-le au point x, y de la surface; la ligne obtenue perce le plan tangent au point dont les coordonnées sont

$$X = \frac{\mathfrak{A}x}{\mathfrak{A} - z}, \quad Y = \frac{\mathfrak{A}y}{\mathfrak{A} - z}.$$

La projection conique de l'élément de la surface aura pour va-

leur

$$ds = \left| \begin{array}{cc} X'_x & X'_y \\ Y'_x & Y'_y \end{array} \right| dx dy = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{z}_1 + 2\mathfrak{z}_2 + \dots + (i-1)\mathfrak{z}_i + \dots}{\mathfrak{A} \left(1 - \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{A}}\right)^2}$$

ou

$$d\tau = 1 + \frac{4\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{A}} + \frac{5\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{A}} + \dots$$

La différence $dS - d\tau$ est égale à $D dx dy$,

$$D = \frac{x^2}{2R_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{4}{\mathfrak{A}} \right) + \frac{y^2}{2R_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{4}{\mathfrak{A}} \right) + \frac{xz'_{1x}}{R_1} + \frac{yz'_{2y}}{R_2} - \frac{5\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{A}} + \dots$$

Pour un ombilic $R_1 = R_2$, et si l'on fait $\mathfrak{A} = 4 R_1$, il vient

$$D = \frac{7}{4} \frac{\mathfrak{z}_2}{R_1} + \dots$$

à cause de la relation

$$x z'_{1x} + y z'_{2y} = 3\mathfrak{z}_2.$$

Pour un point parabolique $\frac{1}{R_1} = 0$, et si l'on fait $\mathfrak{A} = 4 R_1$, il vient

$$D = \frac{4x z'_{1x} - 5\mathfrak{z}_2}{4 R_1} + \dots$$

Dans l'intégrale double $\iint D dx dy$ étendue à tous les points de l'aire située dans une courbe fermée symétrique par rapport à l'origine, un cercle, par exemple, de rayon r , les termes de degré impair de D disparaissent, et, dans le cas où l'origine est un ombilic ou un point parabolique, cette intégrale ou la différence $S - \tau$ est un infiniment petit du sixième ordre par rapport à r .

Détermination directe de l'intégrale

$$\int (\cos mx)^p (\cos m'x)^{p'} \dots (\sin nx)^q (\sin n'x)^{q'} \dots dx;$$

par M. C.-A. LAISANT.

Au dernier Congrès (1889) de l'Association française pour l'avancement des Sciences, j'ai communiqué une Note dans laquelle se trouve directement déterminée l'intégrale

$$\int \cos^p x \sin^q x dx,$$

sans avoir recours à l'abaissement successif des degrés p et q .

Il est possible de généraliser beaucoup plus la méthode indiquée, et de l'appliquer à la détermination de l'intégrale

$$f(\cos mx)^p (\cos m'x)^{p'} \dots (\sin nx)^q (\sin n'x)^{q'} \dots dx,$$

les nombres $m, m', \dots, p, p', \dots, n, n', \dots, q, q', \dots$ étant supposés entiers et positifs.

Soient

$$\begin{aligned} mp + m'p' + \dots + nq + n'q' + \dots &= M, \\ p + p' + \dots + q + q' + \dots &= P, \\ q + q' + \dots &= Q. \end{aligned}$$

Posons $\varepsilon^{\pm x} = z$. En remplaçant les cosinus et les sinus par leurs valeurs sous forme exponentielle, en vertu des formules connues $\cos u = \frac{\varepsilon^u + \varepsilon^{-u}}{2}$, $\sin u = \frac{\varepsilon^u - \varepsilon^{-u}}{2i}$, on aura, pour la fonction $F(x)$ qui figure sous le signe f ,

$$\frac{1}{2^P i^Q \varepsilon^{\pm Mx}} (z^m + 1)^p (z^{m'} + 1)^{p'} \dots (z^n - 1)^q (z^{n'} - 1)^{q'} \dots$$

Soit

$$(\zeta) \quad \left\{ \begin{aligned} &(z^m + 1)^p (z^{m'} + 1)^{p'} \dots (z^n - 1)^q (z^{n'} - 1)^{q'} \dots \\ &= A_0 z^M + A_1 z^{M-1} + \dots + A_{M-1} z + A_M. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients $A_0, A_1, \dots, A_M$ de ce développement fini seront par conséquent déterminés uniquement par des multiplications algébriques.

Si Q est pair, il est très aisé de reconnaître qu'on a $A_0 = A_M$, $A_1 = A_{M-1}, \dots$.

Si Q est impair, on a $A_0 = -A_M$, $A_1 = -A_{M-1}, \dots$.

Si M est pair, il y aura, dans le développement, un terme central ; mais le coefficient $A_{\frac{M}{2}}$ de ce terme s'annule pour Q impair, puisqu'il faut qu'on ait $A_{\frac{M}{2}} = -A_{\frac{M}{2}}$.

Si M est impair, il n'y aura pas de terme central.

Cela posé, nous considérerons les quatre cas suivants :

1. Q pair, M pair ;
2. Q pair, M impair ;

3. Q impair, M pair ;

4. Q impair, M impair.

Et nous aurons, respectivement, en rétablissant maintenant ε^{2x} à la place de z ,

$$\begin{aligned} 1. \quad F(x) &= \frac{1}{2^p(-1)^{\frac{Q}{2}} \varepsilon^{Mx}} \{ A_0(\varepsilon^{2Mx} + 1) + A_1[\varepsilon^{(2M-2)x} + \varepsilon^{2x}] + \dots + A_{\frac{M}{2}} \varepsilon^{Mx} \} \\ &= \frac{1}{2^{p-1}(-1)^{\frac{Q}{2}}} \left[A_0 \cos Mx + A_1 \cos(M-2)x + \dots \right. \\ &\quad \left. + A_{\frac{M}{2}-1} \cos 2x + A_{\frac{M}{2}} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad F(x) &= \frac{1}{2^p(-1)^{\frac{Q}{2}} \varepsilon^{Mx}} \{ A_0(\varepsilon^{2Mx} + 1) + A_1[\varepsilon^{(2M-2)x} + \varepsilon^{2x}] + \dots \\ &\quad + A_{\frac{M}{2}-1}[\varepsilon^{(M+1)x} + \varepsilon^{(M-1)x}] \} \\ &= \frac{1}{2^{p-1}(-1)^{\frac{Q}{2}}} \left[A_0 \cos Mx + A_1 \cos(M-2)x + \dots \right. \\ &\quad \left. + A_{\frac{M}{2}-2} \cos 3x + A_{\frac{M}{2}-1} \cos x \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad F(x) &= \frac{1}{2^p i Q \varepsilon^{Mx}} \{ A_0(\varepsilon^{2Mx} - 1) + A_1[\varepsilon^{(2M-2)x} - \varepsilon^{2x}] + \dots \\ &\quad + A_{\frac{M}{2}-1}[\varepsilon^{(M+1)x} - \varepsilon^{(M-1)x}] \} \\ &= \frac{1}{2^{p-1}(-1)^{\frac{Q-1}{2}}} \left[A_0 \sin Mx + A_1 \sin(M-2)x + \dots \right. \\ &\quad \left. + A_{\frac{M}{2}-1} \sin 2x \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad F(x) &= \frac{1}{2^p i Q \varepsilon^{Mx}} \{ A_0(\varepsilon^{2Mx} - 1) + A_1[\varepsilon^{(2M-2)x} - \varepsilon^{2x}] + \dots \\ &\quad + A_{\frac{M}{2}-1}[\varepsilon^{(M+1)x} - \varepsilon^{(M-1)x}] \} \\ &= \frac{1}{2^{p-1}(-1)^{\frac{Q-1}{2}}} \left[A_0 \sin Mx + A_1 \sin(M-2)x + \dots \right. \\ &\quad \left. + A_{\frac{M}{2}-2} \sin 3x + A_{\frac{M}{2}-1} \sin x \right]. \end{aligned}$$

L'intégration $I = \int F(x) dx$ peut donc se faire immédiatement, grâce à cette décomposition, et nous donne, dans les quatre cas

considérés,

$$I_1 = \frac{1}{2^{p-1}(-1)^{\frac{q}{2}}} \left[\frac{A_0}{M} \sin Mx + \frac{A_1}{M-2} \sin(M-2)x + \dots \right. \\ \left. + \frac{A_{\frac{M}{2}-1}}{2} \sin 2x + \frac{A_{\frac{M}{2}}}{2} \right] + c,$$

$$I_2 = \frac{1}{2^{p-1}(-1)^{\frac{q}{2}}} \left[\frac{A_0}{M} \sin Mx + \frac{A_1}{M-2} \sin(M-2)x + \dots \right. \\ \left. + \frac{A_{\frac{M}{2}-3}}{3} \sin 3x + \frac{A_{\frac{M}{2}-1}}{2} \sin x \right] + c,$$

$$I_3 = \frac{1}{2^{p-1}(-1)^{\frac{q+1}{2}}} \left[\frac{A_0}{M} \cos Mx + \frac{A_1}{M-2} \cos(M-2)x + \dots \right. \\ \left. + \frac{A_{\frac{M}{2}-1}}{2} \cos 2x \right] + c,$$

$$I_4 = \frac{1}{2^{p-1}(-1)^{\frac{q+1}{2}}} \left[\frac{A_0}{M} \cos Mx + \frac{A_1}{M-2} \cos(M-2)x + \dots \right. \\ \left. + \frac{A_{\frac{M}{2}-3}}{3} \cos 3x + \frac{A_{\frac{M}{2}-1}}{2} \cos x \right] + c.$$

Au moyen de ces formules, on peut donc écrire immédiatement l'intégrale, après avoir préalablement effectué le développement (ζ) ci-dessus, qui donne les coefficients $A_0, A_1, \dots$.

On aurait très aisément, par les transformations habituelles, des formules analogues répondant aux fonctions hyperboliques Ch et Sh.

Sur les fonctions sphériques; par M. F. CASPARY.

Dans une lettre que M. Hermite a bien voulu m'adresser, l'illustre géomètre, en généralisant la formule élégante de M. Bel-

trami

$$(x^2 - 1) \frac{dP_n}{dx} = \frac{n(n+1)}{2n+1} (P_{n+1} - P_{n-1}),$$

a établi la relation importante

$$(x^2 - 1)^v \frac{d^v P_n}{dx^v} = A P_{n+v} + A_1 P_{n+v-1} + \dots + A_v P_{n-v},$$

et a exprimé, au moyen d'une formule de Jacobi, les coefficients $A, A_1, \dots, A_v$ sous la forme d'intégrales définies (1).

Je me propose, dans cette Note, de généraliser les formules de Jacobi, de M. Beltrami et de M. Hermite, de déduire les valeurs numériques des coefficients $A, A_1, \dots, A_v$ et d'établir, d'une façon tout à fait élémentaire, quelques autres formules qui me paraissent non sans intérêt pour la théorie des fonctions sphériques.

1. Les fonctions sphériques de première espèce, que je désigne par $P_r(x)$ ou plus simplement encore par P_r , sont les coefficients de α^r ($r = 1, 2, \dots$) dans la série

$$(I) \quad T = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \alpha P_1 + \alpha^2 P_2 + \dots + \alpha^n P_n + \dots$$

On tire de cette définition, en différentiant par rapport à α et à x (2),

$$(II) \quad \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial \alpha} = (x - \alpha) T,$$

$$(III) \quad \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha T,$$

ou

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2) \frac{\partial T}{\partial \alpha} = (x - \alpha) T,$$

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha T.$$

En égalant dans les deux membres de la première formule les coefficients de α^n et, dans les deux membres de la deuxième formule, les coefficients de α^{n+1} , on obtient

$$(1) \quad (n+1)P_{n+1} - (2n+1)\alpha P_n + nP_{n-1} = 0,$$

$$(2) \quad P'_{n+1} - 2\alpha P'_n + P'_{n-1} = P_n.$$

(1) Voir HERMITE, *Sur les polynômes de Legendre* (*Journal de M. Kronecker*), t. CVII, p. 80.

(2) Voir *Journal de M. Kronecker*, t. CVII, p. 137.

où

$$P'_r = \frac{dP_r}{dx}.$$

Si l'on différentie la formule (1) par rapport à x , et si l'on élimine successivement P'_n , P'_{n-1} , P'_{n+1} , on trouve

$$(3) \quad P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1)P_n,$$

$$(4) \quad P'_{n+1} - xP'_n = (n+1)P_n,$$

$$(5) \quad xP'_n - P'_{n-1} = nP_n;$$

et en différentiant ces formules $(\nu-1)$ fois par rapport à x , on a

$$(6) \quad P^{(\nu)}_{n+1} - P^{(\nu)}_{n-1} = (2n+1)P^{(\nu)}_n,$$

$$(7) \quad P^{(\nu)}_{n+1} - xP^{(\nu)}_n = (n+\nu)P^{(\nu-1)}_n,$$

$$(8) \quad xP^{(\nu)}_n - P^{(\nu)}_{n-1} = (n-\nu+1)P^{(\nu-1)}_n,$$

où

$$P^{(\nu)}_n = \frac{d^\nu P_n}{dx^\nu} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n).$$

Les formules (7) et (8) fournissent encore les relations

$$(9) \quad (n-\nu+1)P^{(\nu)}_{n+1} - (2n+1)xP^{(\nu)}_n + (n+\nu)P^{(\nu)}_{n-1} = 0,$$

$$(10) \quad P^{(\nu)}_{n+1} - 2xP^{(\nu)}_n + P^{(\nu)}_{n-1} = (2\nu-1)P^{(\nu-1)}_n,$$

dont la dernière découle aussi de la formule

$$\frac{1}{T^2} \frac{\partial^\nu T}{\partial x^\nu} = (2\nu-1)x \frac{\partial^{\nu-1} T}{\partial x^{\nu-1}},$$

qui est elle-même la conséquence immédiate de la relation

$$(IV) \quad \frac{\partial^\nu T}{\partial x^\nu} = 1.3.5 \dots (2\nu-1) \alpha^\nu T^{\nu+1}.$$

2. D'après la formule (II), on a

$$(x-\alpha) \frac{\partial T}{\partial x} = (x-\alpha)^2 T^2;$$

et comme on a aussi identiquement

$$(x-\alpha)^2 = x^2 - 1 + (1 - 2\alpha x + \alpha^2) = (x^2 - 1) + \frac{1}{T^2},$$

on obtient

$$(x-\alpha) \frac{\partial T}{\partial x} = (x^2 - 1) T^2 + T,$$

ou, d'après la formule (III),

$$(x^2 - 1) \frac{\partial T}{\partial x} = x(x - x) \frac{\partial T}{\partial x} - x T.$$

En égalant, dans les deux membres de cette formule, les coefficients de x^n , on trouve

$$(11) \quad (x^2 - 1)P'_n = n(xP_n - P_{n-1})$$

et, à cause de la formule (1), on en déduit aussi les relations

$$(12) \quad (x^2 - 1)P'_n = (n + 1)(P_{n+1} - xP_n),$$

$$(13) \quad (x^2 - 1)P'_n = \frac{n(n + 1)}{2n + 1} (P_{n+1} - P_{n-1}),$$

dont la dernière est celle de M. Beltrami.

Si l'on différentie cette formule, on en tire, au moyen de la formule (3), l'équation différentielle bien connue

$$(14) \quad \frac{d(x^2 - 1)P'_n}{dx} = n(n + 1)P_n,$$

à laquelle on peut aussi donner la forme

$$(x^2 - 1)P''_n + 2xP'_n = n(n + 1)P_n.$$

Par différentiation, on en tire immédiatement

$$(x^2 - 1)P''_n^{(\mu+2)} + 2(\mu + 1)xP'_n^{(\mu+1)} = [n(n + 1) - \mu(\mu + 1)]P_n^{(\mu)},$$

et en multipliant par $(x^2 - 1)^\mu$, on a

$$(x^2 - 1)^{\mu+1}P''_n^{(\mu+2)} + 2(\mu + 1)x(x^2 - 1)^\mu P'_n^{(\mu+1)} = (n - \mu)(n + \mu + 1)(x^2 - 1)^\mu P_n^{(\mu)}$$

ou

$$(15) \quad \frac{d(x^2 - 1)^{\mu+1}P'_n^{(\mu+1)}}{dx} = (n - \mu)(n + \mu + 1)(x^2 - 1)^\mu P_n^{(\mu)}$$

et, par conséquent, plus généralement,

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^{\lambda+1}(x^2 - 1)^{\mu+1}P_n^{(\mu+1)}}{dx^{\lambda+1}} \\ = (n - \mu) \dots (n - \mu + \lambda)(n + \mu - \lambda + 1) \dots (n + \mu + 1)(x^2 - 1)^{\mu-\lambda} P_n^{(\mu-\lambda)}. \end{array} \right. \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, \mu), \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

La formule (16) donne naissance à beaucoup de relations dont je vais établir quelques-unes, savoir la généralisation de l'équation

différentielle (14), la généralisation de la formule de M. Beltrami et les deux formules importantes que l'on doit à Rodrigues et à Jacobi.

En effet, si l'on pose dans la formule (16) $\lambda + 1 = \mu + 1 = \nu$, on en tire

$$(17) \quad \frac{d^\nu (x^2 - 1)^\nu P_n^{(\nu)}}{dx^\nu} = (n - \nu + 1)(n - \nu + 2) \dots (n + \nu) P_n,$$

formule qui représente la généralisation de l'équation différentielle (14).

De plus, si l'on pose $\lambda + 1 = \nu - 1$, $\mu + 1 = \nu$, la formule (16) prend la forme

$$\frac{d^{\nu-1} (x^2 - 1)^\nu P_n^{(\nu)}}{dx^{\nu-1}} = (n - \nu + 1) \dots (n - 1)(n + 2) \dots (n + \nu)(x^2 - 1) P_n',$$

et, d'après la formule de M. Beltrami, on obtient la généralisation suivante de cette relation

$$(18) \quad \frac{d^{\nu-1} (x^2 - 1)^\nu P_n^{(\nu)}}{dx^{\nu-1}} = \frac{(n - \nu + 1) \dots (n + \nu)}{2n + 1} (P_{n+1} - P_{n-1}).$$

Pour déduire de la formule (17) l'expression connue de P_n , due à Rodrigues et à Jacobi, j'y pose $\nu = n$. Alors on a

$$\frac{d^n (x^2 - 1)^n P_n^{(n)}}{dx^n} = 1.2.3. \dots 2n. P_n.$$

Or on déduit de l'expression (IV)

$$P_n^{(n)} = 1.3.5.7 \dots (2n - 1);$$

donc la dernière formule devient

$$1.2.3 \dots 2n. P_n = 1.3.5.7 \dots (2n - 1) \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

ou

$$(19) \quad P_n = \frac{1}{2^n.1.2.3 \dots n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Au moyen des valeurs de $P_n^{(n)}$ et P_n , que je viens d'établir, la formule (16) fournit enfin, pour $\mu = n - 1$, $\lambda = n - \nu - 1$ ($\nu < n$):

$$\frac{d^{n-\nu} (x^2 - 1)^n P_n^{(n)}}{dx^{n-\nu}} = 1.2.3 \dots (n - \nu)(n + \nu + 1) \dots 2n (x^2 - 1)^\nu P_n^{(\nu)}$$

ou encore

$$1.3.5 \dots (2n-1) \frac{d^{n-\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n-\nu}} = \frac{1.2 \dots 2n}{(n-\nu+1) \dots (n+\nu)} (x^2-1)^\nu P_n^{(\nu)}.$$

ou enfin

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^{n-\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n-\nu}} &= 2^n.1.2.3 \dots n (x^2-1)^\nu P_n^{(\nu)}, \\ &= \frac{(x^2-1)^\nu}{(n-\nu+1) \dots (n+\nu)} \frac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n+\nu}}, \end{aligned} \right.$$

formule qui est due à Jacobi.

3. En différenciant la formule de M. Beltrami ($\nu-1$) fois par rapport à x , et ayant égard à la formule (9), on obtient

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} &(2n+1)(x^2-1)P_n^{(\nu)} \\ &= (n-\nu+1)(n-\nu+2)P_{n+1}^{\nu-1} - (n+\nu-1)(n+\nu)P_{n-1}^{\nu-1}. \end{aligned} \right.$$

Par conséquent, on a, après quelques calculs simples,

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} &(x^2-1)^2 P_n^{(\nu)} \\ &= + \frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)(n-\nu+3)(n-\nu+4)}{(2n+1)(2n+3)} P_{n+2}^{\nu-2} \\ &\quad - 2 \frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)(n+\nu-1)(n+\nu)}{(2n-1)(2n+3)} P_n^{\nu-2} \\ &\quad - \frac{(n+\nu-3)(n+\nu-2)(n+\nu-1)(n+\nu)}{(2n-1)(2n+1)} P_{n-2}^{\nu-2}, \end{aligned} \right.$$

formule qui se transforme pour $\nu=2$ en celle qui finit la Note de M. Hermite (*loc. cit.*, p. 83).

En multipliant la formule (22) par (x^2-1) , on en déduit, au moyen de la formule (21), la suivante

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} &(x^2-1)^3 P_n^{(\nu)} \\ &= - \frac{(n-\nu-1)(n-\nu-2)(n-\nu-3)(n-\nu-4)(n-\nu-5)(n-\nu-6)}{(2n-1)(2n+3)(2n+5)} P_{n+3}^{\nu-3} \\ &\quad - 3 \frac{(n-\nu-1)(n-\nu-2)(n-\nu-3)(n-\nu-4)(n-\nu-1)(n-\nu)}{(2n-1)(2n+5)} \frac{1}{2n-1} P_{n-1}^{\nu-3} \\ &\quad + 3 \frac{(n-\nu-1)(n-\nu-2)(n-\nu-3)(n+\nu-2)(n+\nu-1)(n+\nu)}{(2n-1)(2n+3)} \frac{1}{2n-3} P_{n-3}^{\nu-3} \\ &\quad - \frac{(n-\nu-5)(n-\nu-4)(n-\nu-3)(n-\nu-2)(n+\nu-1)(n+\nu)}{(2n-5)(2n-1)(2n+1)} P_{n-5}^{\nu-3}. \end{aligned} \right.$$

D'une façon analogue, en multipliant la formule (23) par (x^2-1) ,

on obtient, au moyen de la formule (21), la valeur de $(x^2 - 1)^4 P_n^{(v)}$; et en calculant ainsi, de proche en proche, $(x^2 - 1)^5 P_n^{(v)}$, $(x^2 - 1)^6 P_n^{(v)}$, on est conduit enfin à la formule générale

$$(24) \quad \begin{cases} (x^2 - 1)^\lambda P_n^{(v)} = \sum_x (-1)^x \lambda_x A_{n,v}^{\lambda,x} P_{n+\lambda-2x}^{(v-\lambda)}, \\ (x = 0, 1, 2, \dots, \lambda; \quad \lambda = 1, 2, \dots, v) \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1, \\ \lambda_1 &= \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2}, \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_x &= \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-x+1)}{1 \cdot 2 \dots x}, \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_\lambda &= 1; \end{aligned}$$

et où

$$\begin{aligned} A_{n,v}^{\lambda,0} &= \frac{(n-v+1)(n-v+2)\dots(n-v+2\lambda)}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2\lambda-1)}, \\ A_{n,v}^{\lambda,1} &= [2(n+\lambda)-3] \frac{(n-v+1)\dots(n-v+2\lambda-2)}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2\lambda-1)} \frac{(n+v-1)(n+v)}{2n-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ A_{n,v}^{\lambda,x} &= [2(n+\lambda-2x)+1] \frac{(n-v+1)\dots(n-v+2\lambda-2x)}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2\lambda-2x+1)} \\ &\quad \times \frac{(n+v-2x+1)\dots(n+v)}{(2n-2x+1)\dots(2n-1)}, \\ &\dots\dots\dots \\ A_{n,v}^{\lambda,\lambda} &= \frac{(n+v-2\lambda+1)(n+v-2\lambda+2)\dots(n+v)}{(2n+1)(2n-2\lambda+3)(2n-2\lambda+5)\dots(2n-1)}. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $\lambda = v$, les numérateurs des coefficients $A_{n,v}^{\lambda,0}$, $A_{n,v}^{\lambda,1}$, ..., $A_{n,v}^{\lambda,\lambda}$ deviennent égaux entre eux et obtiennent la valeur commune

$$N = (n-v+1)(n-v+2)\dots(n+v);$$

par conséquent, on tire de la formule (24) la relation due à M. Hermite

$$(25) \quad (x^2 - 1)^v P_n^{(v)} = \sum_x (-1)^x v_x A_x P_{n+v-2x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, v),$$

et l'on trouve pour les coefficients A_x les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{N}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2v-1)}, \\ A_1 &= \frac{N(2n+2v-3)}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2v-1)} \frac{1}{(2n-1)}, \\ &\dots\dots\dots \\ A_x &= \frac{N(2n+2v-4x+1)}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2v-2x+1)} \frac{1}{(2n-2x+1)\dots(2n-1)}, \\ &\dots\dots\dots \\ A_v &= \frac{N}{(2n+1)} \frac{1}{(2n-2v+3)(2n-2v+5)\dots(2n-1)}. \end{aligned}$$

4. Les fonctions sphériques de seconde espèce $Q_s(y)$ sont définies, d'après M. F. Neumann, par l'intégrale

$$Q_s(y) = \int_1^{+1} \frac{P_s(x)dx}{y-x} \quad (s = 0, 1, 2, \dots).$$

Au moyen de cette expression et en ayant égard aux formules (1), (13), (3), (12), on reconnaît aisément (1) que les relations (1), (3), (12) ne changent pas, si l'on y remplace $P_n(x)$ par $Q_n(y)$. Or les relations (1), (3), (12) entraînent les autres; par conséquent : *Toutes les formules établies dans cette Note subsistent encore si l'on remplace les fonctions sphériques de première espèce $P_n(x)$ par les fonctions sphériques de seconde espèce $Q_n(y)$.*

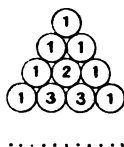
Tétraèdre arithmétique; par M. C.-A. LAISANT.

1. Le triangle arithmétique de Pascal peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & \dots\dots\dots & & & & & & & \end{array}$$

(1) Voir ma Note citée, p. 139.

ou, sous une forme plus figurative peut-être,



en employant une série de cercles égaux tangents entre eux, savoir, un dans une première ligne horizontale, deux dans la deuxième, et ainsi de suite : le coefficient qu'on inscrit dans chaque cercle s'obtient en ajoutant ceux des deux cercles tangents de la ligne supérieure. Lorsqu'il n'y en a qu'un, ce qui arrive pour les termes extrêmes de chaque ligne, on le reproduit purement et simplement. En partant du coefficient 1 au sommet, la $(n + 1)^{\text{ième}}$ ligne donne les coefficients du développement $(x + y)^n$, lesquels sont symétriquement disposés par rapport au milieu de la ligne.

2. Reprenons la figure précédente, formée jusqu'à la $(n + 1)^{\text{ième}}$ ligne, et écrivons en regard, sur une colonne verticale, les $n + 1$ coefficients $1 = c_0, c_1, \dots, c_n = 1$ de $(x + y)^n$:

$$\begin{array}{ccccccc} c_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ c_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 \\ c_2 & \dots & \dots & 1 & 2 & 1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & \dots & c_0 & c_1 & \dots & \dots & c_n \end{array}$$

Si nous multiplions les termes de chaque ligne par le coefficient placé en regard de cette ligne, nous obtiendrons les coefficients du développement d'un trinôme $(x + y + z)^n$ élevé à la $n^{\text{ième}}$ puissance. En effet, prenons, par exemple, la $(p + 1)^{\text{ième}}$ ligne, contenant les coefficients de $(x + y)^p$; le terme qui dans cette ligne occupe le rang $q + 1$ est $\frac{p!}{q!(p-q)!}$; le coefficient c^p placé en regard est $\frac{n!}{p!(n-p)!}$. Le produit sera donc

$$\frac{n!}{(n-p)!q!(p-q)!},$$

c'est-à-dire précisément le coefficient du terme en $x^{n-p} y^q z^{p-q}$ dans le développement de $(x + y + z)^n$.

Supposons que chacune d'elles représente une couche de sphères ou de boulets sphériques; puis plaçons ces couches les unes au-dessus des autres, en commençant par la plus grande comme base. Nous aurons ainsi une figure représentant une pile de boulets triangulaire. Chaque boulet est affecté d'un coefficient, qui s'obtient comme il suit : le coefficient du boulet placé au sommet est égal à 1, et le coefficient d'un boulet quelconque est égal à la somme des coefficients des boulets de la couche supérieure, qui sont en contact avec lui ⁽¹⁾.

C'est à cette figure que nous proposons de donner le nom de *tétraèdre arithmétique*. On voit toute l'analogie de formation qu'elle présente avec le triangle arithmétique de Pascal. Ce dernier donne toujours à sa base les coefficients de $(x + y)^n$ écrits en ligne droite; le tétraèdre donne à sa base les coefficients de $(x + y + z)^n$ écrits en triangle.

4. La base du tétraèdre arithmétique (n° 2) présente plusieurs propriétés presque évidentes :

1° Le nombre de ses éléments est $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$;

2° La somme de ses éléments est 3^n ; car $(1 + 1 + 1)^n = 3^n$;

3° Si l'on affecte du signe + toutes les lignes de rangs impairs, à partir de l'un des côtés, et du signe — toutes les lignes de rangs pairs, la somme algébrique des éléments est égale à l'unité; on a, en effet, $(-x + y + z)^n$ en faisant $x = y = z = 1$;

4° Si, ayant fait l'opération que nous venons de dire, on multiplie les éléments de la deuxième ligne par 2, ceux de la troisième par 2^2 , ceux de la quatrième par 2^3 , et ainsi de suite, la somme algébrique des éléments ainsi obtenus est égale à zéro; on a, en effet, $(-2 + 1 + 1)^n$.

Nous pouvons chercher aussi le produit de tous les éléments,

(1) Cette propriété résulte de l'identité

$$\frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} = \frac{(k+l+m-1)!}{k!l!(m-1)!} + \frac{(k+l+m-1)!}{k!(l-1)!m!} + \frac{(k+l+m-1)!}{(k-1)!l!m!},$$

dont la vérification est très facile.

c'est-à-dire le produit des coefficients du développement de $(x + y + z)^n$. Pour cela, prenons la formation indiquée au commencement du n° 2. Si nous appelons P_k le produit des coefficients de $(x + y)^k$, c'est-à-dire de la $k + 1^{\text{ème}}$ ligne, il est évident que le produit des éléments composant cette ligne sera $c_k^{k+1} P_k$. Nous aurons donc pour le produit cherché $\mathcal{Q}_n$.

$$\mathcal{Q}_n = c_0 c_1^2 c_2^3 \dots c_n^{n+1} P_1 P_2 \dots P_n.$$

Remplaçant chaque coefficient c_k par $\frac{m!}{k!(m-k)!}$ et chaque produit P_k par l'expression $\frac{(k!)^{k-1}}{[1!2!3! \dots (k-1)!]^2}$, d'après une formule que nous avons précédemment établie (1), on trouve la nouvelle expression

$$\frac{\frac{(n+1)(n+2)}{2} (n!)}{[1!2!3! \dots (n-1)!]^2}.$$

Il est possible, enfin, de simplifier encore ce résultat en appelant

$$t_1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3, \quad t_3 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6, \quad \dots, \quad t_p = \frac{p(p+1)}{2}, \quad \dots$$

les nombres triangulaires successifs.

On a alors

$$\mathcal{Q}_n = n^{t_{n+1}-3t_1} (n-1)^{t_{n+1}-3t_2} \dots 2^{t_{n+1}-3t_{n-1}} 1^{t_{n+1}-3t_n}.$$

Par exemple, si $n = 3$, les nombres triangulaires étant

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \dots$$

les exposants prendront les valeurs $10 - 3 = 7$, $10 - 9 = 1$, $10 - 18 = -8$, et

$$\mathcal{Q}_3 = 3^7 \cdot 2.$$

Pour $n = 4$, les exposants sont $15 - 3 = 12$, $15 - 9 = 6$, $15 - 18 = -3$, et

$$\mathcal{Q}_4 = 4^{12} \cdot 3^6 \cdot 2^{-3}.$$

Pour $n = 5$, les exposants sont $21 - 3 = 18$, $21 - 9 = 12$,

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XVIII, p. 140.

$$21 - 18 = 3, 21 - 30 = -9, \text{ et}$$

$$\mathfrak{Q}_5 = 5^{18} \cdot 4^{12} \cdot 3^3 \cdot 2^{-9}.$$

Le rapport de deux produits consécutifs $\mathfrak{Q}_{n+1}$ et $\mathfrak{Q}_n$ est

$$\frac{\mathfrak{Q}_{n+1}}{\mathfrak{Q}_n} = (n+1)^{\frac{n(n+5)}{2}} \cdot n^{n-4} \cdot (n-1)^{n-7} \cdot (n-2)^{n-10} \dots 2^{-2n+2}.$$

Par exemple,

$$\frac{\mathfrak{Q}_5}{\mathfrak{Q}_4} = 5^{\frac{4 \cdot 9}{2}} \cdot 4^{4-4} \cdot 3^{4-7} \cdot 2^{4-10} = 5^{18} \cdot 4^0 \cdot 3^{-3} \cdot 2^{-6}.$$

5. Concevons que nous ayons formé le tétraèdre arithmétique d'ordre n , défini comme nous l'avons dit au n° 3, et posé sur une base horizontale. Si nous plaçons les coefficients $c_0, c_1, \dots, c_n$ de $(x+y)^n$ sur une ligne verticale, chacun d'eux répondant à une couche horizontale, et si nous formons les produits de tous les éléments d'une couche quelconque par le coefficient correspondant, nous obtiendrons un nouveau tétraèdre, dont les éléments numériques offriront une entière symétrie par rapport aux quatre faces. Ces éléments seront les coefficients du développement de $(x+y+z+t)^n$.

Il serait facile d'établir diverses propriétés de cette figure, par analogie avec celles du n° 4. Nous nous contenterons, comme résumé de ce qui précède, de faire remarquer que :

Les coefficients du développement de $(x+y)^n$ se disposent symétriquement suivant une ligne droite;

Ceux du développement de $(x+y+z)^n$ suivant un triangle arithmétique;

Ceux du développement de $(x+y+z+t)^n$ suivant un tétraèdre arithmétique.

Par analogie avec ce qui précède, on peut aisément déterminer aussi le produit des coefficients du développement de $(x+y+z+t)^n$, lequel a pour expression

$$c'_0 c'_1 c'_2 \dots c'_{n+1} \cdot \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \dots \mathfrak{Q}_n.$$

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 3 NOVEMBRE 1890.

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPIILLIÈRE.

Le diplôme et la médaille d'or obtenus par la Société à l'Exposition universelle de 1889 sont déposés sur le bureau.

Démissions : MM. Hermary, Pucciarelli et Rey adressent leurs démissions de membres de la Société.

Communications :

M. Fouret : *Sur les normales aux hyperboles équilatères.*

M. Laisant : *Sur une généralisation d'un théorème de Laguerre.*

M. Humbert : *Sur une surface remarquable du quatrième ordre.*

SÉANCE DU 19 NOVEMBRE 1890.

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPIILLIÈRE.

Communications :

M. Vicaire : *Sur un mouvement pendulaire troublé.*

M. Fouret : *Sur un théorème relatif au centre de gravité des pieds des droites faisant avec une courbe algébrique un angle donné et menées par un point fixe.*

M. d'Ocagne : *Démonstration élémentaire du théorème de Malus sur les rayons réfléchis par une surface.*

SÉANCE DU 3 DÉCEMBRE 1890.

PRÉSIDENTE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Élections: M. Colot, présenté par MM. Javary et Marie; M. Genty, présenté par MM. Laisant et Haton de la Goupillière; M. Vaschy, présenté par MM. Sarrau et Poincaré, sont élus à l'unanimité.

Communications:

M. Fouret : *Sur le nombre des points brillants d'une surface éclairée par des rayons issus d'un point.*

M. Humbert : *Sur les normales à une quadrique et sur la surface lieu des centres de courbure.*

M. Humbert : *Sur la surface de Kummer.*

M. Laisant : *Sur deux problèmes relatifs au mouvement de deux points.*

SÉANCE DU 17 DÉCEMBRE 1890.

PRÉSIDENTE DE M. COLLIGNON.

M. le Ministre de l'Instruction publique annonce qu'une somme de mille francs est mise à la disposition de la Société pour la publication du *Répertoire bibliographique*.

Élections: M. Antomari, présenté par MM. André et Carvallo; M. Massieu, présenté par MM. Haton de la Goupillière et Vicaire, sont élus à l'unanimité.

Communications:

M. Humbert : *Sur une famille de quadriques faisant partie d'un système triple orthogonal.*

M. Lemoine : *Sur quelques formules de la géométrie du triangle.*

M. Kœnigs : *Sur certaines surfaces admettant pour lignes asymptotiques une série de cubiques gauches.*

M. d'Ocagne : *Sur une propriété des courbes algébriques.*

SÉANCE DU 7 JANVIER 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

La Société procède au renouvellement de son Bureau.

Communications :

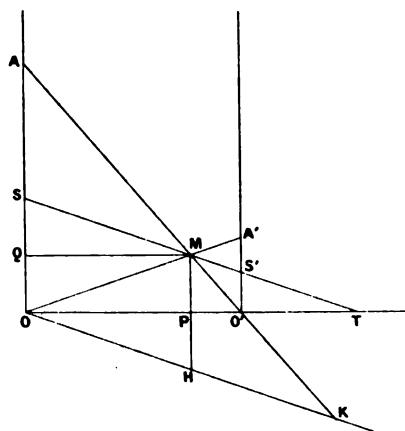
M. Vicaire : *Sur les oscillations troublées d'un système matériel autour d'une position d'équilibre.*

M. d'Ocagne fait la Communication suivante :

Sur la liaison entre les expressions du rayon de courbure en coordonnées ponctuelles et en coordonnées tangentielles.

Rappelons que si M est un point d'une courbe, ST la tangente

Fig. 1.



en ce point, les coordonnées rectangulaires (cartésiennes) du point M sont

$$OP = x, \quad OQ = y;$$

celles (plückériennes) de la tangente ST sont

$$-\frac{1}{OT} = \tau, \quad -\frac{1}{OS} = \zeta.$$

Les coordonnées parallèles de la tangente ST sont

$$OS = u, \quad O'S' = v;$$

celles du point M sont

$$-\frac{1}{OA} = p, \quad -\frac{1}{O'A'} = q.$$

Les formules qui, dans chaque système, lient les unes aux autres ces diverses coordonnées peuvent se résumer en une seule,

$$(1) \quad \omega = \frac{dx}{\alpha d\beta - \beta dx},$$

complétée par le Tableau ci-dessous, qui fait connaître les valeurs correspondantes de ω , α et β :

Valeurs de ω	$x, y, r, \zeta, u, v, p, q,$
» α	$\zeta, r, y, x, q, p, v, u,$
» β	$r, \zeta, x, y, p, q, u, v.$

Cela posé, on a

$$(2) \quad \frac{d\zeta}{dr} = \frac{d\zeta}{dx} \frac{dx}{dr}.$$

Mais, au moyen des diverses formes de (1), on trouve facilement

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dr} &= -\frac{x}{y}, \\ \frac{d\zeta}{dx} &= \frac{-x \frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(x \frac{dy}{dx} - y\right)^2} = -x \zeta^2 \frac{d^2 y}{dx^2}, \\ \frac{dx}{dr} &= \frac{\zeta \frac{d^2 \zeta}{dr^2}}{\left(\zeta - r \frac{d\zeta}{dr}\right)^2} = \zeta y^2 \frac{d^2 \zeta}{dr^2}. \end{aligned}$$

Portant ces diverses expressions dans la formule (2), nous avons, toute réduction faite,

$$(3) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{d^2 \zeta}{dr^2} = \frac{1}{y^2 \zeta^2}$$

et de même

$$(3 \text{ bis}) \quad \frac{d^2 v}{du^2} \frac{d^2 q}{dp^2} = \frac{1}{v^2 q^2}.$$

Cette remarquable formule permet de passer de l'expression du rayon de courbure en coordonnées ponctuelles à son expression en coordonnées tangentielles et réciproquement.

Menons par le point O la parallèle OH à ST. L'expression du rayon de courbure en coordonnées cartésiennes peut s'écrire

$$(I) \quad R = \frac{1}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \frac{\overline{OH}^3}{\overline{OP}^3}.$$

Tirant de là $\frac{d^2 y}{dx^2}$ et portant dans (3), nous avons, après une transformation facile, pour le rayon de courbure en coordonnées pluckériennes,

$$(II) \quad R = \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} \frac{\overline{MT}^3}{\overline{OT}^3},$$

formule que nous croyons nouvelle.

De même, en posant $OO' = \delta$, nous avons obtenu ailleurs l'expression suivante pour le rayon de courbure en coordonnées parallèles tangentielles

$$(III) \quad R = \frac{d^2 v}{du^2} \frac{\overline{SM}^3}{\delta}.$$

Dès lors, la formule (3 bis) donne, pour le rayon de courbure en coordonnées parallèles ponctuelles,

$$(IV) \quad R = \frac{1}{\frac{d^2 q}{dp^2}} \frac{\overline{AK}^3}{\delta},$$

formule également nouvelle dont nous avons communiqué une démonstration géométrique directe à l'Académie de Belgique.

En suivant un procédé de démonstration que nous avons récemment indiqué (*Nouv. Ann. de Math.*, p. 445; 1890), on obtient, soit au moyen de la formule (I), soit au moyen de (IV), le théorème de Reiss :

Si une droite quelconque coupe une courbe algébrique d'ordre m sous les angles $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ en des points où les rayons de courbure sont $R_1, R_2, \dots, R_m$, on a

$$\frac{1}{R_1 \sin^3 \alpha_1} + \frac{1}{R_2 \sin^3 \alpha_2} + \dots + \frac{1}{R_m \sin^3 \alpha_m} = 0.$$

De même, l'une ou l'autre des formules (II) ou (III) conduit

au théorème suivant que nous avons énoncé pour la première fois (*loc. cit.*, p. 448) :

Si les tangentes menées d'un point quelconque à une courbe algébrique de la classe n ont pour longueurs $t_1, t_2, \dots, t_n$, et si $R_1, R_2, \dots, R_n$ sont les rayons de courbure aux points de contact, on a

$$\frac{R_1}{t_1^3} + \frac{R_2}{t_2^3} + \dots + \frac{R_n}{t_n^3} = 0.$$

SÉANCE DU 21 JANVIER 1891.

PRÉSIDENTE DE M. COLLIGNON.

Communication :

M. Humbert fait une Communication *sur les surfaces algébriques inscrites dans la surface de Kummer*. Il montre que cette surface admet 32 systèmes de surfaces cubiques inscrites et 31 systèmes de surfaces de quatrième degré inscrites.

SÉANCE DU 4 FÉVRIER 1891.

PRÉSIDENTE DE M. D'OCAGNE.

M. LAISANT fait la Communication suivante :

Sur l'extension de la Géométrie cartésienne aux figures imaginaires.

Parmi les travaux ayant pour but d'étendre aux imaginaires les conceptions de la Géométrie analytique de Descartes, il convient de citer ceux de MM. Mouchot, entrepris depuis bien des années déjà, et Tarry, qui a publié plusieurs Mémoires sur ce sujet dans les comptes rendus de l'*Association française pour l'avancement des Sciences*. Laguerre et M. Marie, à un point de vue plus analytique, s'étaient jadis occupés de la même question.

Le principe fondamental de cette nouvelle *Géométrie générale*, pour employer l'expression de M. Tarry, est la conception du *point double* (M, M') formé par le *couple* des deux points ordinaires M, M' pris dans un ordre déterminé; M et M' sont dits les *composantes positive* et *négative* du point (M, M') , qui devient *réel* quand les deux composantes coïncident.

J'avais essayé, de mon côté, d'étendre aux imaginaires la notion des coordonnées cartésiennes par la construction du point M donné par l'équipollence $m = x + y\varepsilon^\theta$, θ étant l'angle des axes coordonnés, et x, y les deux coordonnées imaginaires. Mais cette conception se trouvait incomplète et défectueuse, faute de la notion du point double, car un même point pouvait avoir une infinité de coordonnées différentes.

Si, au contraire, nous considérons les deux points M, M' définis par les équipollences

$$m = x + y\varepsilon^\theta, \quad m' = cjx + c jy.\varepsilon^\theta,$$

il est facile de constater, soit géométriquement, soit par le calcul, que le point (M, M') est déterminé par ses coordonnées, et réciproquement les détermine.

Les deux relations ci-dessus peuvent s'exprimer par la formule unique

$$(m, m') = (x, cjx) + (y, c jy)\varepsilon^\theta,$$

équipollence *double*, qui les englobe toutes deux en une seule.

On démontre que les formules ordinaires de transformation de coordonnées s'appliquent identiquement aux points doubles de la *Géométrie générale* à deux dimensions, ce qui permet de généraliser d'une façon considérable les résultats de la *Géométrie ordinaire*.

Du même coup, on arrive à donner en quelque sorte une réalité objective et une absolue clarté à des notions de *Géométrie imaginaire* un peu obscures avec le langage habituel. Il est possible, sur ces données, d'établir un lien de plus entre l'Analyse et la *Géométrie* par le calcul des équipollences. Il est juste d'ajouter que Bellavitis avait entrevu cette notion du point double dans ses considérations sur les *points fictifs* des courbes.

M. BÉGHIN fait la Communication suivante :

*Sur l'impossibilité d'une fonction d'une seule variable
à plus de deux périodes.*

Il suffit de faire voir que le module de $Aa + Bb - Cc$ peut être rendu aussi petit qu'on veut, A, B, C désignant trois périodes et a, b, c trois nombres entiers. Soit $C = \lambda A + \mu B$, où l'on peut supposer λ et μ positifs.

On aura

$$\begin{aligned} \pm \left(\lambda - \frac{a}{c} \right) &< \frac{\varepsilon}{c}, \\ \pm \left(\mu - \frac{b}{c} \right) &< \frac{\varepsilon}{c}, \\ \varepsilon &= \frac{1}{10^p}. \end{aligned}$$

Nous partageons la partie décimale de chacun des nombres λ et μ en tranches de p chiffres; toutes ces tranches ne pouvant être distinctes, on peut trouver deux entiers α et β tels que, dans chacun des deux nombres, la tranche d'ordre α soit identique à celle d'ordre $\alpha + \beta$. On choisit pour $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ les fractions décimales x et y , qui ont respectivement pour périodes les nombres formés, dans λ et μ , par les chiffres situés depuis le commencement de la tranche α jusqu'au commencement de la tranche d'ordre $\alpha + \beta$, les chiffres situés à gauche de la tranche d'ordre α étant les mêmes; on aura, N et N' étant entiers,

$$\begin{aligned} x &= \frac{N}{10^{p\alpha} - 10^{p(\alpha-1)}}, & y &= \frac{N'}{10^{p\alpha} - 10^{p(\alpha-1)}}, \\ \pm (\lambda - x) &< \frac{1}{10^{p(\alpha+\beta)}} < \frac{1}{10^{p(10^{p\alpha} - 10^{p(\alpha-1)})}}. \end{aligned}$$

On voit que cette démonstration ne repose que sur des considérations tout à fait élémentaires.

M. D'OCAGNE fait la Communication suivante :

*Sur une détermination particulière du centre de courbure
des lignes planes. Application aux courbes algébriques
d'ordre quelconque.*

Si l'on pose $P = x^2 + y^2$, on trouve facilement, pour l'expres-

sion de l'abscisse $ON = n$ du pied de la normale correspondant au point M,

$$(1) \quad n = \frac{1}{2} \frac{dP}{dx};$$

par suite,

$$\frac{dn}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d^2P}{dx^2}.$$

Mais, si ds est la différentielle de l'arc au point M, on a, en appelant Ω le centre de courbure correspondant et θ l'angle de la normale avec l'axe des x ,

$$\frac{dn}{ds} = \frac{\Omega N}{\sin \theta} \frac{1}{\Omega M}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\sin \theta};$$

donc

$$(2) \quad \frac{1}{2} \frac{d^2P}{dx^2} = \frac{\Omega N}{\Omega M} \frac{1}{\sin^2 \theta}.$$

Cette formule fait connaître le centre de courbure lorsque la courbe est définie par son équation en P et en x . Remarquons en passant qu'une telle équation représente, en même temps que la courbe, sa symétrique par rapport à l'axe des x .

Prenons, par exemple, la conique représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Cette équation peut s'écrire

$$P = \frac{c^2}{a^2} x^2 + 1.$$

La formule (2) donne donc, dans ce cas,

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{\Omega N}{\Omega M} \frac{1}{\sin^2 \theta},$$

d'où se déduit la construction du centre de courbure due à M. Mannheim.

Prenons une courbe algébrique quelconque, d'ordre m ; son équation peut s'écrire

$$(3) \quad y^m + X_1 y^{m-1} + X_2 y^{m-2} + \dots + X_m = 0,$$

où

$$X_k = a_k x^k + b_k x^{k-1} + \dots + l_k.$$

Gardant dans le premier membre tous les termes d'une même parité, faisant passer dans le second tous ceux de la parité contraire, élevant au carré, puis réunissant de nouveau tous les termes dans un même membre et réduisant, nous avons

$$y^{2m} + y^{2m-2}(2X_2 - X_1^2) + y^{2m-4}(X_2^2 - 2X_1X_3 + 2X_4) + \dots = 0$$

ou

$$(4) \quad P^m + P^{m-1}(-mx^2 + 2X_2 - X_1^2) + \dots = 0.$$

Il faut remarquer que cette dernière équation représente à la fois la courbe C proposée et sa symétrique C' par rapport à l'axe des x , car à chaque valeur de P correspondent deux points symétriques par rapport à cet axe.

Si nous donnons à x une certaine valeur, nous avons

$$\sum_{i=1}^{i=m} P_i = mx^2 - 2X_2 + X_1^2;$$

par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{d^2 P_i}{dx^2} = 2(m - X_2'' + X_1'^2 + X_1 X_1'') = 2(m - 2a_2 + a_1^2),$$

ou, d'après (2),

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{\Omega_i N_i}{\Omega_i M_i} \frac{1}{\sin^2 \theta_i} = m - 2a_2 + a_1^2.$$

Or, si nous remplaçons la courbe par le système de ses m asymptotes, a_1 et a_2 restent les mêmes; les rapports $\frac{\Omega_i N_i}{\Omega_i M_i}$ tendent vers l'unité. Appelant donc $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ les angles des asymptotes avec l'axe des y , on a

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{1}{\sin^2 \alpha_i} = m - 2a_2 + a_1^2.$$

De là ce théorème :

Si une droite quelconque coupe une courbe algébrique d'ordre m aux points $M_1, M_2, \dots, M_m$, sous les angles $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$, et ses m asymptotes sous les angles $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$; si une perpendiculaire quelconque à la première droite rencontre les

normales correspondantes aux points $N_1, N_2, \dots, N_m$, et si $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ sont les centres de courbure correspondants, on a

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{\Omega_i N_i}{\Omega_i M_i} \frac{1}{\sin^2 \theta_i} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{1}{\sin^2 \alpha_i}.$$

Si la courbe considérée est *isotropique*, le second membre de cette formule est nul, et l'on retombe sur une propriété que j'ai déjà obtenue d'une autre façon (*Journ. de Math. sp.*, p. 126, th. VI; 1887).

SÉANCE DU 18 FÉVRIER 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. RAFFY fait la Communication suivante :

Détermination de toutes les surfaces moulures applicables sur des surfaces de révolution.

D'après un théorème de M. Massieu, pour qu'une surface soit applicable sur une surface de révolution, il faut et il suffit que l'équation aux géodésiques de cette surface admette une intégrale linéaire et homogène (voir DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. III, p. 29). Appliquant ce principe aux moulures dont l'élément linéaire est

$$ds^2 = du^2 + (U - V)^2 dv^2,$$

on trouve qu'il doit exister une fonction C de u et de v et une fonction W' de v seulement, vérifiant le système

$$(1) \quad W' U' + \frac{\partial}{\partial v} C(U - V) = 0,$$

$$(2) \quad W'' + (U - V)^2 C_u = 0.$$

Avant de résoudre ce système, nous remarquerons qu'on ne peut supposer $W' = 0$; car alors il vient, U_0 étant une fonction inconnue de u ,

$$C = \frac{U_0}{U - V}, \quad C_u = 0.$$

Si $U_0 = 0$, l'intégrale linéaire disparaît, puisque ses deux coefficients W' et C sont nuls. Si $U_0 \neq 0$, la fonction C ne saurait être indépendante de U que si U_0 et par suite U sont constants, auquel cas la moulure est une développable, ou si V est constant, auquel cas elle dégénère en une surface de révolution.

Cela posé, l'équation (1) intégrée par rapport à v donne

$$C = \frac{U_0 - WU'}{U - V},$$

et l'équation (2) devient, par substitution de C ,

$$(3) \quad W'' + UU'_0 - U_0 U' + VWU'' - VU'_0 + W(U'^2 - UU'') = 0.$$

Telle est l'équation qu'il s'agit de résoudre. Égalons à zéro sa dérivée seconde prise par rapport à u et à v , et divisons par la dérivée V' qui n'est pas nulle; nous trouvons

$$(4) \quad \frac{(VW)'}{V'} U'' + \frac{W'}{V'} (U'^2 - UU'')' = U''_0;$$

et, en différentiant une fois encore par rapport à v ,

$$(5) \quad U''' \frac{d}{dv} \frac{(VW)'}{V'} + (U'^2 - UU'')' \frac{d}{dv} \frac{W'}{V'} = 0.$$

Dans cette dernière équation, on ne peut supposer à la fois

$$U''' = 0, \quad (U'^2 - UU'')' = U'U'' - UU''' = 0,$$

car alors $U'' = 0$; les moulures seraient des développables.

Si donc on fait $U''' = 0$, on devra supposer le rapport $W' : V'$ constant. Soient alors

$$U = au^2 + b, \quad W = 3mV + n.$$

L'équation (4) intégrée deux fois donne

$$U'_0 = 3m(U'^2 - UU'') + p, \quad U_0 = 2ma^2u^3 - (6mab - p)u + q,$$

tandis que l'équation (3) devient

$$W'' + 2aVW - Vp + n(U'^2 - UU'') + UU'_0 - U_0U' = 0.$$

Les termes en v et les termes en u doivent séparément se réduire à des constantes. Or les termes en u forment un polynôme du quatrième degré dont le terme en u^4 a pour coefficient $2ma^3$. Donc $m = 0$, d'où résulte $W' = 0$, solution exclue.

Nous devons donc désormais supposer $U''' \neq 0$. Je dis qu'on ne peut supposer le rapport $W' : V'$ constant, car il faudrait alors que le rapport $(VW)' : V'$ fût constant aussi. On aurait donc

$$W = 3mV + n, \quad VW = \alpha V + \beta,$$

d'où l'équation du second degré à coefficients constants

$$3mV^2 + (n - \alpha)V - \beta = 0,$$

qui devrait, puisque V n'est pas constant, avoir lieu indépendamment de V . Donc en particulier $m = 0$ et, par suite, $W' = 0$, solution exclue.

La seule et dernière hypothèse à faire est donc

$$U'' \neq 0, \quad \frac{d}{dv} \frac{W'}{V'} \neq 0.$$

On peut diviser les deux membres de l'équation (5) par le produit de ces quantités; alors l'équation se décompose en deux

$$\frac{(U'^2 - UU'')'}{U''} = - \left[\frac{d}{dv} \frac{(VW)'}{V'} \right] : \left[\frac{d}{dv} \frac{W'}{V'} \right] = \text{const.} = \gamma.$$

De ces deux relations on tire successivement

$$(6) \quad (U'^2 - UU'')' = \gamma U'', \quad (VW)' + \gamma W' = nV',$$

$$(7) \quad U'^2 - UU'' = \gamma U' + \delta; \quad (W - n)(V + \gamma) = h.$$

Substituant les expressions (6) dans l'équation (4) il vient

$$U'_0 = nU'', \quad U_0 = nU' + pu + q.$$

Avec cette valeur de U_0 , l'équation (3) devient, eu égard aux relations (7),

$$(3') \quad W'' - pV + \delta(W - n) + pU - (pu + q)U' + hU'' = 0.$$

Donc les termes en u doivent avoir une somme constante. Mais, en vertu d'une des relations (7), on a

$$U'' : U' = U' : (U + \gamma), \quad U'' = \alpha^2(U + \gamma),$$

ce qui montre, α ne pouvant être nul, que la fonction U est périodique. Par suite p est nul. Donc nous avons à la fois

$$(8) \quad qU' - hU'' = 0, \quad U''U' - (U + \gamma)U''' = 0.$$

Or h n'est pas nul, sans cela W se réduirait à la constante n ,

solution exclue. Ainsi on peut éliminer U' et U''' de ces deux relations (8), ce qui donne

$$U' : (U + \gamma) = q : h = a, \quad U + \gamma = e^{au}.$$

Mais alors tous les termes qui, dans la relation (3'), dépendent de u se détruisent, et il reste

$$W'' + \delta(W - n) = 0.$$

Or, avec la valeur trouvée pour U , la première des équations (7) entraîne $\delta = 0$. On a donc $W'' = 0$. Alors la seconde des équations (7) donne pour $V + \gamma$ une expression qu'on peut écrire $b : v$, b étant une nouvelle constante; d'où finalement

$$U - V = e^{au} - \frac{b}{v},$$

et l'on retrouve les moulures déjà obtenues par M. Dini comme solution d'un problème moins général.

M. D'OCAGNE fait la Communication suivante :

Sur les substitutions linéaires d'une seule variable à coefficients périodiques.

Si l'on répète indéfiniment la même substitution linéaire

$$x_1 = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad x_2 = \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{ax_{n-1} + b}{cx_{n-1} + d}, \quad \dots$$

on a

$$x_n = \frac{A_n x + B_n}{C_n x + D_n}.$$

Le problème qui consiste à trouver les valeurs de A_n, B_n, C_n, D_n en fonction de a, b, c, d a été résolu d'une façon ingénieuse par M. le prince de Polignac (*Bulletin de la Société mathématique*, p. 120; 1876). En voici une solution plus directe :

On voit facilement que les quatre séries de quantités A, B, C, D satisfont à une même loi de récurrence

$$U_n = (a + d)U_{n-1} + (bc - ad)U_{n-2}$$

(où l'on remplace successivement U par A, B, C, D) avec les conditions initiales

$$\begin{array}{llll} A_0 = 1, & B_0 = 0, & C_0 = 0, & D_0 = 0, \\ A_1 = a, & B_1 = b, & C_1 = c, & D_1 = d. \end{array}$$

Donc, en vertu d'une formule que nous avons démontrée autrefois [*Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 71; 1884 (1)], on a, en posant

$$a + d = \lambda, \quad bc - ad = \mu,$$

et

$$u_n = \sum_{i=0}^{\infty} C_{n-(i+1)}^i \lambda^{n-(i+1)} \mu^i,$$

les formules suivantes :

$$A_n = au_n + \mu u_{n-1},$$

$$B_n = bu_n,$$

$$C_n = cu_n,$$

$$D_n = du_n + \mu u_{n-1},$$

qui résolvent le problème.

Supposons maintenant que les coefficients des substitutions successives, au lieu d'être constants, se reproduisent périodiquement, c'est-à-dire qu'on ait

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}, & x_2 &= \frac{a_2 x_1 + b_2}{c_2 x_1 + d_2}, & \dots, & & x_k &= \frac{a_k x_{k-1} + b_k}{c_k x_{k-1} + d_k}, \\ x_{k+1} &= \frac{a_1 x_k + b_1}{c_1 x_k + d_1}, & x_{k+2} &= \frac{a_2 x_{k+1} + b_2}{c_2 x_{k+1} + d_2}, & \dots, & & \dots \end{aligned}$$

On voit alors que les quantités A et B sont données par la série récurrente à coefficients périodiques

$$U_{nk+i} = \alpha_i U_{nk+i-1} + \beta_i U_{nk+i-2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_i = a_i + \frac{b_i}{b_{i-1}} d_{i-1}, \\ \beta_i = \frac{b_i}{b_{i-1}} (b_{i-1} c_{i-1} - a_{i-1} d_{i-1}); \end{cases}$$

les quantités C et D par la suivante

$$V_{nk+i} = \gamma_i V_{nk+i-1} + \delta_i V_{nk+i-2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \gamma_i = \frac{c_i}{c_{i-1}} c_{i-1} + d_i, \\ \delta_i = \frac{c_i}{c_{i-1}} (b_{i-1} c_{i-1} - a_{i-1} d_{i-1}). \end{cases}$$

Écrivons $2k-1$ formules consécutives de la série U, et sur les

(1) Nous avons donné la généralisation explicite de cette formule dans le même Recueil (année 1890, p. 93).

$2k + 1$ termes qu'elles renferment, éliminons les $2k - 2$ autres que U_{nk+i} , $U_{(n-1)k+i}$ et $U_{(n-2)k+i}$. Il vient, après des calculs que nous supprimons,

$$U_{nk+i} = LU_{(n-1)k+i} + MU_{(n-2)k+i},$$

où, en représentant par $R\left(\frac{k-1}{2}\right)$ le reste, 0 et 1, de la division $k - 1$ par 2,

$$\begin{aligned} L &= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k + \sum_{i=1}^{i=E\left(\frac{k-1}{2}\right)} \sum_{j=1}^{\dots} \alpha_j \alpha_{j+1} \dots \alpha_{j+k-2i-1} \beta_{j-1} \beta_{j-3} \dots \beta_{j-1-2(i-1)} \\ &\quad + R\left(\frac{k-1}{2}\right) (\beta_1 \beta_3 \beta_5 \dots \beta_{k-1} + \beta_2 \beta_4 \dots \beta_k), \\ M &= (-1)^{k-1} \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_k, \end{aligned}$$

étant entendu que, dans la double somme qui figure dans l'expression de L , les indices sont pris résiduairement par rapport au module k . *Les expressions de L et de M ne changeant pas par permutation circulaire, la loi de récurrence est la même pour les coefficients pris de k en k , à partir de l'un quelconque des termes de la première période.*

Pour les coefficients C et D , il suffit, dans ce qui précède, de changer α en γ et β en δ .

Pour achever la question, il n'y a plus qu'à appliquer la formule rappelée plus haut.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Remarques sur les lignes asymptotiques des surfaces réglées dont les génératrices appartiennent à une congruence linéaire; par M. CH. BLOCHÉ.

1. M. Picard a remarqué que, si les génératrices d'une surface gauche appartiennent à un complexe linéaire, il existe sur cette surface une courbe C dont les tangentes appartiennent à ce complexe. Cette courbe est ligne asymptotique de la surface; elle rencontre chaque génératrice en deux points, et son degré est égal à la classe des sections planes (*Annales de l'École Normale*; 1877).

2. En particulier, si une surface réglée admet deux directrices rectilignes, les asymptotiques sont les courbes C dont les tangentes appartiennent aux divers complexes linéaires par rapport auxquels les directrices sont des droites conjuguées. M. Halphen a remarqué que ces courbes divisent harmoniquement les segments déterminés sur les génératrices par les directrices (*Bull. de la Soc. math.*, p. 134; 1877). Il est facile de reconnaître ce fait en remarquant que les surfaces considérées sont des transformées par homographie des conoïdes; or, pour le conoïde

$$y = ux, \quad z = f(u),$$

les lignes asymptotiques sont données par

$$x^2 = Cf'(u), \quad y^2 = Cu^2f'(u), \quad z = f(u);$$

l'axe situé à distance finie passe par le milieu du segment que détermine une asymptotique.

3. M. Halphen, dans la Note citée, dit que la classe des asymptotiques est égale à six fois l'excès de leur degré sur le degré de la surface. Ce nombre est trop élevé. L'ordre et la classe d'une courbe dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire s'expriment par le même nombre.

Donc, pour les surfaces gauches douées de deux directrices rectilignes, la classe des asymptotiques et leur ordre s'expriment par le même nombre.

Si p et q sont les degrés de multiplicité des deux directrices, d étant le nombre des génératrices doubles, le degré de la surface est

$$m = p + q;$$

le degré et la classe des asymptotiques sont égaux à

$$2(pq - d).$$

4. Cette détermination se rapporte aux courbes C, dont les tangentes appartiennent à l'un des complexes linéaires par rapport auxquels les directrices sont conjuguées. Ou, autrement dit, elle n'est exacte que si les asymptotiques rencontrent deux fois chaque génératrice: il peut arriver que chaque courbe C se décompose en deux. Ainsi, pour les surfaces

$$z = \left(\frac{y}{x}\right)^{2p-1},$$

les asymptotiques sont

$$x = A t^{p-1}, \quad y = A t^p, \quad z = t^{2p-1},$$

A étant une constante. Les courbes C signalées par M. Picard se composent de deux asymptotiques correspondant à deux valeurs égales et de signes contraires de la constante A . La classe d'une section plane est en général $2(2p-1)$; le degré et la classe d'une asymptotique isolée sont égaux à $2p-1$.

5. Si les deux directrices de la surface considérée viennent à se confondre, le degré et la classe des asymptotiques sont toujours égaux; mais leur valeur commune est inférieure au nombre qui donne la classe d'une section plane. Ce fait s'explique, si l'on remarque que, dans ce cas, la droite Δ suivant laquelle les deux directrices sont confondues appartient aux complexes dont font partie les génératrices de la surface. La courbe C correspondant à un de ces complexes se compose donc d'une asymptotique et de la droite Δ . L'abaissement du degré des asymptotiques peut être de plusieurs unités. Je renvoie, pour cette question, à un Mémoire dans lequel M. Cremona, au moyen de la représentation des surfaces sur un plan, a évalué les degrés des asymptotiques des surfaces réglées unicursales qui ont deux directrices distinctes ou coïncidentes. (*Annali di Matematica*, 2^e série, t. I, p. 248 à 258; 1867-1868.)

6. Il est d'ailleurs facile d'obtenir l'équation générale des surfaces gauches dont les génératrices font partie d'une congruence linéaire singulière. Les équations d'une droite rencontrant l'axe Oz peuvent s'écrire

$$\frac{X}{\sin \theta \cos \varphi} = \frac{Y}{\sin \theta \sin \varphi} = \frac{Z - \zeta}{\cos \theta}.$$

Si ζ , θ , φ sont fonctions d'une seule variable, la droite engendre une surface. Pour qu'elle rencontre une seconde directrice rectiligne,

$$X = a, \quad Y = Z \tan \varepsilon,$$

il faut que ζ , θ , φ soient liées par l'équation

$$\zeta = a \tan \varphi \cot \varepsilon - \frac{a}{\cos \varphi} \cot \theta.$$

Si les deux directrices tendent à se confondre, on a

$$\zeta = m \tan \varphi,$$

en posant

$$\lim \alpha \cot \varepsilon = m.$$

Les équations de la génératrice donnent alors

$$\tan \varphi = \frac{Y}{X}, \quad \cot \theta = \frac{ZX - mY}{X \sqrt{X^2 + Y^2}} = \cos \varphi \frac{ZX - mY}{X^2},$$

de sorte que l'équation générale cherchée peut s'écrire

$$ZX - mY = X^2 F\left(\frac{Y}{X}\right).$$

7. Les coordonnées d'un point de la surface peuvent s'exprimer par

$$X = \lambda, \quad Y = \lambda u, \quad Z = mu + \lambda F(u);$$

toute relation entre λ et u définit une courbe sur la surface. Si l'on écrit que le plan osculateur à une courbe contient la génératrice, on trouve

$$2m \frac{d\lambda}{du} - \lambda^2 F''(u) = 0;$$

d'où l'on tire

$$\lambda = \frac{2m}{C - F'(u)},$$

C étant une constante. Les asymptotiques sont donc données par

$$X = \frac{2m}{C - F'(u)}, \quad Y = \frac{2mu}{C - F'(u)}, \quad Z = \frac{2mF(u) - muF'(u) + Cmu}{C - F'(u)}.$$

On a ainsi, d'après une remarque de M. Kœnigs (*Annales de la Faculté de Toulouse*; 1887), les équations générales des courbes qui ont Oz pour axe anharmonique, c'est-à-dire des courbes telles que les points où Oz est rencontré par les points osculateurs menés en quatre points quelconques ont même rapport anharmonique que les plans passant par Oz et par ces points.

Sur les surfaces gauches dont les lignes de courbure possèdent une propriété donnée; par M. CH. BICHE.

1. Si l'on détermine un point sur une surface gauche par la

distance r de ce point au point central correspondant, et par l'arc s de la ligne de striction terminé en ce point central, l'équation des lignes de courbure peut s'écrire

$$\frac{dr^2}{ds^2} + \varphi(r) \frac{dr}{ds} + \psi(r) = 0,$$

φ et ψ étant des polynômes du second degré en r , dont les coefficients sont fonctions de s . On peut reconnaître, par une discussion simple, que, pour que les expressions de $\frac{dr}{ds}$ fournies par cette équation soient rationnelles en r , il faut et il suffit que $\psi(r)$ soit identiquement nul (voir *Bull. de la Soc. math.*, p. 121; 1888). Les surfaces correspondantes sont celles dont le paramètre de distribution est constant, et dont la ligne de striction est ligne de courbure. Je les appellerai, pour abrégé, *surfaces Σ* .

2. On déduit immédiatement de ce qui précède que, si un système de lignes de courbure d'une surface réglée possède une propriété exprimable par une équation différentielle du premier ordre rationnelle en r , cette surface appartient à la catégorie des surfaces Σ , à moins que l'équation différentielle en question ne soit vérifiée pour toutes les courbes tracées sur la surface, c'est-à-dire ne se réduise à une identité.

3. Cette remarque permet de résoudre la question suivante : Quelles sont toutes les surfaces dont un système de lignes de courbure est composé de trajectoires des génératrices? Il suffit d'exprimer la condition donnée par une équation du premier ordre. Or, si une ligne de courbure coupe les génératrices sous un angle constant i , en chaque point de cette ligne l'asymptotique fait avec la génératrice l'angle $2i$, et l'on trouve facilement

$$\tan^2 2i = F(r),$$

F étant une fonction rationnelle. Un des systèmes des lignes de courbure des surfaces cherchées vérifie donc l'équation

$$\frac{d}{ds} F(r) = 0.$$

Cette équation se réduit à une identité pour l'hélicoïde minimum, et seulement dans ce cas; car cette surface est la seule dont les asymptotiques soient trajectoires des génératrices. Ce cas

écarté, on trouve des surfaces Σ dont les lignes de courbure sont données par

$$\frac{dr}{ds} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dr}{ds} + \varphi(r) = 0.$$

4. Le second système ne peut être composé de trajectoires, car $\varphi(r)$ contient un terme du second degré en r . Or j'ai démontré (*Annales de la Faculté de Toulouse*; 1889) qu'un système vérifiant une équation de Riccati où le terme en r^2 figure effectivement ne peut être composé de trajectoires. Si le premier système est composé de trajectoires, la ligne de striction, qui est l'une d'elles, est géodésique, d'après un théorème de M. Bonnet. Les surfaces cherchées ont donc leur ligne de striction, ligne de courbure et ligne géodésique, le paramètre de distribution étant constant : ce sont des surfaces de révolution.

Donc les seules surfaces dont un système de lignes de courbure soit composé de trajectoires sont :

1° La surface gauche de révolution : les trajectoires considérées sont les parallèles;

2° L'hélicoïde minimum : toutes les lignes de courbure sont trajectoires, et l'angle est de 45° pour toutes.

5. Sur les surfaces Σ , le long d'une ligne de courbure de même système que la ligne de striction, la courbure totale est constante, et l'angle du plan tangent avec le plan central est constant. La remarque dont je me suis servi permet de reconnaître que les surfaces Σ sont les seules jouissant d'une de ces propriétés. On peut voir de même que, si le long de chaque ligne de courbure d'un système la courbure moyenne est constante, la surface correspondante est une surface de révolution ou un hélicoïde minimum.

Remarque sur l'interpolation; par M. C.-A. LAISANT.

La formule d'interpolation de Lagrange donne, comme l'on sait, sous forme entière de degré $n - 1$, une fonction u de x , assujettie à prendre les valeurs

$$u_1, \quad u_2, \quad \dots, \quad u_n$$

pour les valeurs données de x

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Elle peut s'écrire

$$(1) \quad u = X_1 u_1 + X_2 u_2 + \dots + X_n u_n,$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ étant des polynômes en x tels que X_k s'annule pour les valeurs $a_1, a_2, \dots$ autres que a_k , et se réduit à l'unité pour $x = a_k$.

De cette formule (1) il est possible de déduire une infinité de fonctions de x satisfaisant aux mêmes conditions. Soient, en effet, $t = \varphi(z)$ une fonction arbitraire d'une seule variable, et φ^{-1} la caractéristique de la fonction inverse, c'est-à-dire telle que

$$z = \varphi^{-1}(t).$$

Il s'ensuit que

$$\varphi[\varphi^{-1}(t)] = t, \quad \varphi^{-1}[\varphi(z)] = z.$$

Si, dans la formule (1), nous remplaçons $u_1, u_2, \dots, u_n$ par $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_n)$, et si nous écrivons

$$(2) \quad \varphi^{-1}[X_1 \varphi(u_1) + X_2 \varphi(u_2) + \dots + X_n \varphi(u_n)],$$

il est bien évident que cette nouvelle fonction satisfera encore aux conditions imposées; car, pour $x = a_k$ par exemple, la quantité entre parenthèses se réduira à $\varphi(u_k)$, si bien que nous aurons

$$\varphi^{-1}[\varphi(u_k)] = u_k.$$

Cette remarque s'applique évidemment à toute formule d'interpolation où figurent les valeurs données $u_1, u_2, \dots$ de la fonction cherchée. Ainsi, Cauchy (*Analyse algébrique*, Note V) a donné une formule, sous forme fractionnaire, qui peut s'écrire

$$(3) \quad u = \frac{F(x, u_1, u_2, \dots)}{f(x, u_1, u_2, \dots)}.$$

On en déduira la formule beaucoup plus générale

$$(4) \quad u = \varphi^{-1} \left\{ \frac{F[x, \varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots]}{f[x, \varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots]} \right\},$$

puisque la quantité entre crochets se réduit à $\varphi(u_k)$ pour $x = a_k$; d'où

$$u = \varphi^{-1}[\varphi(u_k)] = u_k.$$

Pour nous en tenir à la formule de Lagrange, nous nous borne-

rons, en terminant, à indiquer les formules suivantes, résultant des hypothèses $\varphi(z) = z^2, \sqrt{z}, e^z, lz, \frac{z-1}{z+1}$:

$$(5) \quad u = \sqrt[3]{X_1 u_1^2 + X_2 u_2^2 + \dots},$$

$$(6) \quad u = (X_1 \sqrt{u_1} + X_2 \sqrt{u_2} + \dots)^2,$$

$$(7) \quad u = l(X_1 e^{u_1} + X_2 e^{u_2} + \dots),$$

$$(8) \quad u = e^{X_1 l u_1 + X_2 l u_2 + \dots},$$

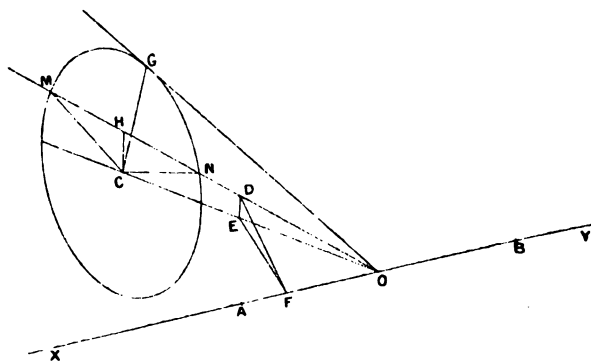
$$(9) \quad u = \frac{1 + X_1 \frac{u_1 - 1}{u_1 + 1} + X_2 \frac{u_2 - 1}{u_2 + 1} + \dots}{1 - X_1 \frac{u_1 - 1}{u_1 + 1} - X_2 \frac{u_2 - 1}{u_2 + 1} - \dots}.$$

On comprend tout l'intérêt qu'offre cette latitude laissée à la forme de la fonction, et qui permet de faire un choix, suivant la nature du problème qui a donné naissance à la question d'interpolation qu'on se propose de résoudre.

Sur les sections circulaires du tore; par M. E. VICAIRE.

Yvon Villarceau a découvert par l'analyse la propriété remar-

Fig. 1.



quable que possèdent les plans bitangents au tore de donner des sections circulaires.

MM. Rouché et de Comberousse, dans leur *Traité de Géomé-*

trie, ont donné de ce théorème une démonstration synthétique qui ne laisse pas que d'être un peu compliquée. Puisqu'il a pénétré ainsi dans la Géométrie classique, peut-être qu'une démonstration plus simple offrira quelque intérêt.

Soient :

O le centre de tore ;

C celui d'une section méridienne quelconque ;

XOY la trace sur le plan de l'équateur d'un plan sécant qui rencontre cette section aux points M et N.

Dans les triangles MCO, NCO, qui ont l'un et l'autre pour côtés le rayon r du méridien et le rayon $OC = d$ du cercle moyen, on a

$$\frac{\sin M}{\sin MOC} = \frac{\sin N}{\sin MOC} = \frac{d}{r}.$$

Dans les trièdres OXCM, OYCM, rectangles suivant l'arête OC, on a

$$\frac{\sin MOX}{\sin MOC} = \frac{\sin MOY}{\sin MOC} = \frac{1}{\sin \varphi},$$

en désignant par φ l'angle sous lequel le plan sécant XOM rencontre le plan de l'équateur.

Or, si ce plan sécant est le plan bitangent, on a précisément $\sin \varphi = \frac{r}{d}$. Donc les angles M et N, supplémentaires l'un de l'autre, sont respectivement égaux à MOX et à MOY.

Si, pour fixer les idées, MOX est aigu, il sera égal à M, et MOY sera égal à N.

Cela étant, portons sur XY, de part et d'autre du point O, les longueurs OA = OB = r ; les triangles MOA, NOB sont respectivement égaux à OMC et à ONC, et leurs côtés MA et NB sont l'un et l'autre égaux à OC, ce qui démontre le théorème.

On peut aisément, pour être tout à fait classique, éviter l'emploi de la Trigonométrie.

D'un point D, pris arbitrairement sur OM, abaissons les perpendiculaires DE, DF sur OC et sur OX ; l'angle DFE = φ est, pour le plan bitangent, égal à l'angle COG, formé avec OC par la tangente au méridien, et les triangles rectangles semblables COG,

DFE donnent

$$\frac{DE}{DF} = \frac{r}{d}.$$

D'autre part, H étant le milieu de MN, les triangles rectangles semblables CHO, DEO donnent

$$\frac{CH}{DE} = \frac{d}{DO}.$$

En multipliant membre à membre, il vient

$$\frac{CH}{DF} = \frac{r}{DO},$$

ce qui démontre la similitude des triangles rectangles MCH, ODF, et par conséquent l'égalité des angles O et M, d'où le reste de la démonstration.

Sur la réduction des fonctions entières algébriques;

par M. A.-E. PELLET.

1. Soit $f(x) = 0$ une équation algébrique à coefficients entiers. Si elle est irréductible suivant un module premier p , elle est irréductible *a fortiori* algébriquement; si, suivant le module premier p , elle se décompose en deux facteurs irréductibles de degrés μ et ν par exemple, elle est irréductible algébriquement ou se décompose en deux facteurs de degrés μ et ν , irréductibles. Ces propositions permettent souvent de reconnaître si une équation est irréductible, et, dans le cas contraire, donnent des indications précieuses sur la manière dont elle peut se décomposer.

Supposons que $f(x) = 0$ soit irréductible et que toutes ses racines puissent s'exprimer rationnellement en fonction de l'une d'elles; m étant le degré de $f(x)$ et x une racine de $f(x) = 0$, les autres seront $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, ..., $\theta_{m-1}(x)$, ces fonctions θ étant entières en x et ayant pour coefficients des nombres commensurables, entiers ou fractionnaires. Si toutes ces fonctions θ sont distinctes suivant un module premier p , $f(x)$ se décompose suivant ce module en facteurs irréductibles d'égal degré. Mais il n'en est plus ainsi si quelques-unes des fonctions θ deviennent égales entre

elles (mod p), ou si p divise le dénominateur de quelques-uns des coefficients entrant dans les fonctions θ .

Soit, dans tous les cas,

$$f(x) \equiv f_1^{n_1}(x) f_2^{n_2}(x) \dots f_k^{n_k}(x) \pmod{p},$$

$f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ étant des fonctions irréductibles mod p et entrant respectivement $n_1, n_2, \dots, n_k$ fois comme facteurs dans $f(x)$, suivant le mod p ; le degré de $f(x)$ est un multiple des degrés de $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$. En effet, les racines de la congruence $f_1(x) \equiv 0 \pmod{p}$ peuvent être représentées par $x, \psi(x), \psi^2(x), \dots, \psi^{\mu-1}(x)$, μ étant le degré de $f_1(x)$, $\psi(x)$ une fonction entière, $\psi^2(x)$ représentant $\psi[\psi(x)]$, et en général

$$\psi[\psi^j(x)] = \psi^{j+1}(x).$$

La fonction $\psi(x)$ est congrue suivant le module p , et la fonction modulaire $f_1(x)$ à l'une des fonctions θ , soit θ_1 . Le plus petit nombre ν , tel que $\theta_1^{\nu}(x) - x$ soit divisible par $f(x)$ algébriquement, est un diviseur de m , degré de l'équation $f(x)$, et aussi un multiple de μ ; donc μ est un diviseur de m .

Revenant au cas où $f(x) = 0$ est une équation quelconque à coefficients entiers, soit $F(v) = 0$ son équation résolvante. Les racines de $f(x) = 0$ s'expriment rationnellement en fonction d'une quelconque des racines de l'équation $F(v) = 0$. Suivant un module quelconque premier p , $F(v)$ se décompose en facteurs irréductibles dont les degrés divisent le degré de $F(v)$. La fonction résolvante v étant convenablement choisie, chacune des racines de la congruence $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ peut s'exprimer en fonction entière des racines de la congruence $F(v) \equiv 0 \pmod{p}$; les degrés des facteurs de $f(x)$ sont donc diviseurs du plus petit commun multiple des degrés des facteurs de $F(v)$, suivant le module p . Ainsi :

Le degré de l'équation résolvante d'une équation à coefficients entiers est un multiple des degrés des divers facteurs irréductibles en lesquels se décompose le premier membre de l'équation suivant un module premier quelconque.

Par exemple, $x^4 - x + 1$ est irréductible suivant le module 2; elle admet, suivant le module 3, un facteur du premier degré

$x + 1$, et un autre du troisième degré $x^3 - x^2 + x + 1$; la résolvante de l'équation du quatrième degré $x^4 - x + 1 = 0$, ou de l'équation plus générale $A(x^4 - x + 1) + 6f(x) = 0$, A étant un nombre premier avec 6, et $f(x)$ un polynôme du quatrième degré à coefficients entiers, est donc d'un degré égal à 12 ou 24, et la résolution de cette équation exige l'extraction d'une racine cubique.

D'après un théorème de Galois, le degré de l'équation résolvante d'une équation de degré premier, irréductible, mais soluble par radicaux, est diviseur du produit $p(p-1)$, p étant le degré de l'équation. Il en résulte qu'une équation de degré premier p , à coefficients entiers, et irréductible, n'est pas soluble par radicaux si son premier membre se décompose, suivant certains modules premiers, en facteurs dont le degré ne divise pas $p-1$. Ainsi, $x^5 - x + 1$ est irréductible, module 5; suivant le module 2, cette fonction se décompose en un produit de deux facteurs irréductibles, de degrés 2 et 3,

$$x^5 - x + 1 \equiv (x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1) \pmod{2};$$

3 ne divisant pas 4, nombre auquel se réduit ici $p-1$, l'équation $x^5 - x + 1 = 0$, ou l'équation plus générale

$$A(x^5 - x + 1) + 10f(x),$$

A étant un entier premier avec 10, $f(x)$ un polynôme entier du cinquième degré à coefficients entiers, n'est pas soluble par radicaux.

2. Le théorème suivant peut être utile dans la décomposition d'une fonction entière en facteurs irréductibles suivant un module premier.

Le produit Δ des carrés des différences des racines d'une équation, irréductible et abélienne, $f(x) = 0$, est un carré parfait si le degré de l'équation est impair; dans le cas où le degré de $f(x)$ est pair, $\sqrt{\Delta}$ est une quantité irrationnelle.

Nous appelons *abéliennes*, suivant M. Kronecker, les équations irréductibles dont toutes les racines peuvent s'exprimer par x , $\theta(x)$, $\theta^2(x)$, ..., $\theta^{m-1}(x)$, x étant l'une d'elles, θ une fonction rationnelle, m le degré de l'équation.

Considérons le produit

$$(1) \quad P_{l=1}^{m-1} P_{k=0}^{l-1} [\theta^k(x) - \theta'(x)],$$

x étant l'une des racines de $f(x) = 0$. Il acquiert deux valeurs égales et de signes contraires, si m est pair, lorsqu'on substitue $\theta(x)$ à x ; au contraire, si m est impair, il ne change pas par la substitution de $\theta(x)$ à x . Donc, dans le premier cas, l'équation $y^2 - \Delta = 0$, qui admet pour racine le produit (1), est irréductible; dans le second cas, lorsque m est impair, $y^2 - \Delta$ se décompose en un produit de deux facteurs rationnels.

Une congruence irréductible suivant un module premier est analogue à une équation abélienne; son Δ sera résidu quadratique si le degré de la congruence est impair, et non-résidu quadratique si son degré est pair. Plus généralement, soit $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ une congruence n'ayant pas de racines égales, on a

$$\Delta \equiv a^2 \delta_1 \delta_2 \delta_3 \dots \delta_k \pmod{p},$$

a étant un nombre entier, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ les valeurs de Δ correspondant aux divers facteurs irréductibles de $f(x)$. Il en résulte que Δ est non-résidu quadratique $\pmod{p}$, si $f(x)$ admet un nombre impair de facteurs irréductibles de degré pair; Δ est au contraire résidu quadratique $\pmod{p}$, si $f(x)$ n'admet pas de facteur irréductible de degré pair ou en admet un nombre pair.

Ainsi, une congruence du quatrième degré, n'ayant pas de racine réelle, $\pmod{p}$, sera irréductible si son Δ est non-résidu quadratique; et une congruence du cinquième degré, n'ayant pas de racine réelle, sera irréductible si son Δ est résidu quadratique.

Exemple. — Soit la fonction

$$f(x) = x^5 - 12x^4 + 60x^3 + 123x^2 + 4567x - 89012$$

considérée par Fourier et Serret.

On a

$$f(x) \equiv x(x-1)(x^4 + 3x^3 - 3) \pmod{7}.$$

Le Δ de la congruence $x^4 + 3x^3 - 3 \equiv 0 \pmod{7}$, laquelle n'a pas de racine réelle, est congru à -2 , à un facteur quadratique près; -2 étant non-résidu quadratique $\pmod{7}$, $x^4 + 3x^3 - 3$ est irréductible suivant ce module 7.

$f(x)$, réduit à l'aide de $x^4 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$, devient $-x^2 - 2$,

et la congruence $x^2 + 2 \equiv 0 \pmod{5}$ n'a pas de racine réelle; $f(x) = 0$ n'admet donc pas de racine commensurable, et ne peut algébriquement se ramener qu'à deux équations, l'une du quatrième degré, l'autre du deuxième, si elle n'est pas irréductible. Nous allons voir que $f(x)$ n'admet pas de facteur du deuxième degré $\pmod{5}$; il en résultera que $f(x)$ est irréductible algébriquement. En effet, $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ est irréductible. Soit i une de ses racines; on a

$$f(ai + b) \equiv 2a(a - 2b + 2)i + 3a^2 - b^2 - ab + 2a - 2 \pmod{5},$$

en remarquant que $(ai + b)^5 \equiv -ai + b - a \pmod{5}$; a et b sont des nombres réels. Pour que $f(ai + b) \equiv 0 \pmod{5}$, il faut qu'on ait simultanément

$$a - 2b + 2 \equiv 0, \quad 3a^2 - b^2 - ab + 2a - 2 \equiv 0 \pmod{5};$$

d'où, par l'élimination de a ,

$$b^2 - 2b - 1 \equiv 0 \pmod{5};$$

or cette congruence n'a pas de racine réelle.

Suivant le module 11, $f(x)$ est congrue à $x(x^5 - x^4 + 5x^3 + 2)$. La fonction $x^5 - x^4 + 5x^3 + 2$ n'a pas de racine réelle, et son Δ est résidu quadratique $\pmod{11}$; elle est donc irréductible suivant ce module. L'équation $f(x) = 0$ est donc irréductible, et le degré de son équation résolvante est divisible par 4, 5 et 3, c'est-à-dire par 60.

Quelques formules relatives aux fonctions hyperboliques;

par M. C.-A. LAISANT.

Lorsque deux variables, x et y , sont liées par la relation

$$(1) \quad \sin x = \operatorname{Th} y,$$

x est dite *amplitude hyperbolique* de y ; et, réciproquement, on appelle y , d'après Gudermann, *longueur* de x .

Cette relation (1) entraîne les suivantes :

$$(2) \quad \operatorname{tang} x = \operatorname{Sh} y,$$

$$(3) \quad \cos x = \operatorname{Séch} y = \frac{1}{\operatorname{Ch} y}.$$

On a aussi

$$(4) \quad \operatorname{tang} \frac{x}{2} = \operatorname{Th} \frac{y}{2} = z.$$

La formule (3) peut s'écrire

$$\cos x \operatorname{Ch} y = 1,$$

et l'on en tire, par différentiation,

$$-\sin x \operatorname{Ch} y \, dx + \cos x \operatorname{Sh} y \, dy = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu des relations précédentes,

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \operatorname{Ch} y}{\cos x \operatorname{Sh} y} = \frac{1}{\cos x} = \operatorname{Ch} y.$$

Par conséquent,

$$dy = \frac{dx}{\cos x}, \quad dx = \frac{dy}{\operatorname{Ch} y}.$$

Intégrant,

$$(6) \quad \int \frac{dx}{\cos x} = y = \mathfrak{f} x,$$

$$(7) \quad \int \frac{dy}{\operatorname{Ch} y} = x = \operatorname{Amh} y.$$

D'ordinaire, on écrit la première de ces deux intégrales sous la forme plus compliquée

$$\log \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \quad \text{ou} \quad \log \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}.$$

La relation (5) peut encore s'écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Sh} y}{\sin x} = \frac{\operatorname{tang} x}{\operatorname{Th} y}.$$

Donc

$$(8) \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dy}{\operatorname{Sh} y},$$

$$(9) \quad \int \operatorname{tang} x \, dx = \int \operatorname{Th} y \, dy.$$

L'emploi de la valeur z , introduite dans la formule (4) ci-dessus, permet de donner aux intégrales qui précèdent les formes

très simples

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dy}{\operatorname{Sh} y} = \log \mathfrak{z},$$
$$\int \operatorname{tang} x \, dx = \int \operatorname{Th} y \, dy = \log \frac{1 + \mathfrak{z}^2}{1 - \mathfrak{z}^2},$$
$$\int \frac{dx}{\cos x} = 2 \arg \operatorname{Th} \mathfrak{z}, \quad \int \frac{dy}{\operatorname{Ch} y} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \mathfrak{z}.$$

Il va de soi que les diverses intégrales ci-dessus doivent être prises entre les mêmes limites correspondantes pour que les formules soient valables.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 MARS 1891.

PRÉSIDENTE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur la représentation graphique des équations à quatre variables.*

M. Fouret : *Sur le centre des moyennes distances de plusieurs points.*

M. Humbert présente quelques observations à propos de cette Communication.

M. Carvallo : *Sur la démonstration du théorème de d'Alembert.*

M. Collignon présente deux tableaux graphiques donnant, l'un la distance de deux points sur la sphère, l'autre la résolution des triangles rectilignes.

M. Kœnigs : *Interprétation géométrique d'une forme donnée à l'intégrale de l'équation d'Euler.*

M. Humbert : *Génération des courbes algébriques tracées sur la surface de Kummer.*

M. RAFFY fait la Communication suivante :

Sur les surfaces moulures dont les lignes d'égale courbure sont parallèles.

Je vais montrer que toute surface moulure, dont les lignes

d'égale courbure sont parallèles, a pour élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + \left(e^{au} - \frac{b}{v} \right)^2 dv^2.$$

Pour que les courbes d'une famille $\varphi = \text{const.}$, tracées sur une surface d'élément linéaire

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

soient parallèles, il faut et il suffit, comme on sait, que le paramètre différentiel

$$\Delta\varphi = \frac{G\varphi_u'^2 - 2F\varphi_u'\varphi_v' + E\varphi_v'^2}{EG - F^2}$$

soit une fonction de φ . Appliquons cette règle aux surfaces mou-
lures; pour ces surfaces, on a

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = (U - V)^2.$$

Leur courbure totale, que je représente par $-\frac{1}{\varphi}$, est donnée par la formule connue

$$-\frac{1}{\varphi} = \frac{-1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = \frac{-U''}{U - V}.$$

Nous avons donc pour équation des lignes d'égale courbure

$$\varphi = \frac{U - V}{U''} = \text{const.},$$

et nous supposons la dérivée U'' essentiellement différente de zéro, afin d'exclure les surfaces développables.

Calculons le paramètre différentiel $\Delta\varphi$, en ayant soin d'y remplacer partout $U - V$ par le produit $\varphi U''$; nous trouvons

$$\Delta\varphi = \varphi_u'^2 + \frac{\varphi_v'^2}{G} = \frac{(U' - \varphi U''')^2}{U'^2} + \frac{V'^2}{\varphi^2 U'^4}.$$

Pour exprimer que $\Delta\varphi$ est une fonction de φ , nous égalons à zéro le déterminant fonctionnel $\varphi_v'\Delta_u' - \varphi_u'\Delta_v'$, dans lequel nous pourrions évidemment remplacer les dérivées Δ_u' et Δ_v' par les valeurs plus simples (Δ_u') , (Δ_v') , qu'elles prennent lorsqu'on les calcule en considérant φ comme constant, savoir :

$$(\Delta_u') = 2\varphi_u' \left[\left(\frac{U'}{U''} \right)' - \varphi \left(\frac{U'''}{U''} \right)' \right] - \frac{4U'''}{U'^3} \frac{V'^2}{\varphi^2}, \quad (\Delta_v') = \frac{2V'V''}{\varphi^2 U'^4}.$$

On trouve ainsi, en remplaçant φ'_u et φ'_v par leurs valeurs, une équation qui peut s'écrire

$$(U' - \varphi U'') \left[U'' V'' + U''^2 \left(\frac{U'}{U''} \right)' \varphi^2 - U''^2 \left(\frac{U''}{U''} \right)' \varphi^2 \right] = 2 U'' V''.$$

C'est l'équation qui va nous déterminer les fonctions U et V . Pour la résoudre, nous prendrons V comme variable au lieu de v ; il suffira de remplacer V' par une fonction V_1 de V et V'' par $V_1 V'_1$, V'_1 étant la dérivée de V_1 par rapport à V . Il vient ainsi

$$(1) \quad \frac{V U''' + U' U'' - U U'''}{U''} \left[U'' V_1 V'_1 + U''^2 \left(\frac{U'}{U''} \right)' \varphi^2 - U''^2 \left(\frac{U''}{U''} \right)' \varphi^2 \right] = 2 U'' V_1.$$

Je dis d'abord qu'on doit supposer $U''' \neq 0$. Soit, en effet, $U''' = 0$; la dérivée U'' sera une constante α , différente de zéro, et l'équation deviendra

$$U' [V_1 V'_1 + \alpha (U - V)^2] = 0,$$

ce qui exige $U' = 0$, solution à rejeter comme entraînant l'hypothèse exclue $U'' = 0$.

Cela posé, je dis que l'expression

$$\gamma = \frac{U U''' - U' U''}{U''}$$

se réduit à une constante. En effet, s'il n'en est pas ainsi, en attribuant à la variable V la succession des valeurs que prend cette expression quand u varie, on annulera le premier membre de notre équation; par suite, la fonction $V_1 = V'$ sera identiquement nulle, ce que nous ne supposons pas, l'hypothèse $V = \text{const.}$ réduisant les moulures à des surfaces de réduction. Il y a plus; on peut faire $\gamma = 0$. Car la formule précédente peut s'écrire

$$(U - \gamma) U''' - U' U'' = 0,$$

et l'on voit qu'il suffit de remplacer U par $U + \gamma$ et V par $V + \gamma$, ce qui ne change pas l'élément linéaire, pour être en droit de supposer $\gamma = 0$. Mais l'évanouissement de γ exprime que la dérivée U'' est dans un rapport constant avec la fonction U . Cette hypothèse

$$U'' = \alpha^2 U,$$

introduite dans l'équation (1), la réduit à

$$(2) \quad V^2(U - V)^2 \left(\frac{U'}{U} \right)' = V_1(2V_1 - VV'_1).$$

Il suffit maintenant de faire $V = U$ pour voir que le second membre est identiquement nul; comme V_1 ne l'est pas, il reste

$$\frac{V'_1}{V_1} = \frac{2}{V}.$$

L'intégration donne successivement

$$V_1 = V' = -\frac{V^2}{b}, \quad V = \frac{b}{v - v_0},$$

en désignant par b et v_0 deux constantes arbitraires, dont la dernière peut être supposée nulle. Mais, le second membre de l'équation (2) étant nul, le premier l'est aussi; donc la dérivée logarithmique $U' : U$ est une constante. On a donc $U = e^{a(u-u_0)}$, et, comme l'arbitraire u_0 peut être supposée nulle, il reste

$$U - V = e^{au} - \frac{b}{v}.$$

ce qui démontre notre théorème.

Les moulures que nous venons de déterminer sont celles que M. Dini a trouvées (*Giornale di Matematica*, p. 65; 1865) en cherchant toutes les moulures qui s'appliquent sur des surfaces de révolution, de telle manière que leurs profils viennent coïncider avec des géodésiques sur lesquelles des arcs égaux soient interceptés par des courbes dont chacune coupe ces géodésiques sous le même angle. Elles sont engendrées par des tractrices allongées ou raccourcies dont le plan roule sur un cylindre convenable, la génératrice de contact étant la base de la courbe.

Il résulte de ce qui précède que toute moulure à lignes d'égale courbure parallèles est applicable sur une surface de révolution.

SÉANCE DU 18 MARS 1891.

PRÉSIDENTE DE M. COLLIGNON.

Élections : M. Fauquembergue, présenté par MM. Picquet et

Humbert; MM. Lery et Guimaraes, présentés par MM. Collignon et d'Ocagne, sont élus à l'unanimité.

Communications :

M. d'Ocagne présente un abaque faisant connaître la distance de deux points sur une sphère, en fonction de leurs latitudes et de la différence de leurs longitudes, et qui peut être considéré comme transformé de celui que M. Collignon a présenté dans la dernière séance.

M. Antomari : *Sur l'extension aux courbes gauches de la notion des diamètres de Newton.*

M. Fouret présente quelques observations sur le même sujet.

M. FOURET fait la communication suivante :

*Sur les congruences de droites du premier ordre
et de la première classe.*

1. Suivant une dénomination proposée par Plücker et généralement adoptée, on désigne, sous le nom de *congruence de droites du $m^{\text{ième}}$ ordre et de la $n^{\text{ième}}$ classe*, un ensemble de droites, en nombre doublement infini, remplissant l'espace, telles qu'il y en ait m passant par un point arbitraire et n contenues dans un plan arbitraire.

En partant de cette définition, nous allons démontrer, avec une extrême simplicité, que *les droites d'une congruence du premier ordre et de la première classe rencontrent deux mêmes droites, non situées dans un même plan*. Ce théorème est bien connu; mais, en raison de son importance, il y a peut-être quelque intérêt à y parvenir par une voie plus directe que celles habituellement suivies.

Nous ferons usage d'une remarque qui s'applique utilement dans d'autres circonstances semblables, et qui consiste en ce que, *si des surfaces algébriques d'un même degré, en nombre simplement infini, sont telles que, par tout point pris arbitrairement, il en passe une et une seule, ces surfaces forment un faisceau ponctuel* (').

(') Une remarque analogue s'applique à des courbes algébriques situées dans un même plan.



En effet, ces surfaces sont définies par une même équation, renfermant un paramètre variable. La substitution, dans cette équation, des coordonnées d'un point arbitraire devant donner lieu à une valeur unique de ce paramètre, celui-ci doit entrer linéairement dans l'équation.

2. Nous allons maintenant démontrer deux théorèmes préliminaires sur les congruences du premier ordre et de la première classe, que nous appellerons abrégativement *congruences* $(1, 1)$.

THÉORÈME I. — *Les droites d'une congruence $(1, 1)$, qui rencontrent une même droite fixe arbitraire, forment une quadrique.*

Par la droite fixe D faisons passer un plan quelconque. Ce plan contient une droite de la congruence, et une seule, qui fait partie de la section par le plan de la surface engendrée. Cette section est complétée par la droite D, qui est une ligne simple de la surface, puisque, par chaque point de D, il passe une droite et une seule de la congruence. La surface est donc coupée par un plan quelconque passant par D, suivant deux droites : c'est par conséquent une quadrique.

THÉORÈME II. — *Les diverses quadriques engendrées par les droites d'une congruence $(1, 1)$, qui s'appuient sur des droites d'un même plan concourant en un même point, contiennent un même quadrilatère gauche.*

Considérons un faisceau de droites D, concourant en un même point p et contenues dans un même plan (P). Chaque droite D donne lieu à une quadrique (S) engendrée par les droites de la congruence qui la rencontrent. Par tout point a pris arbitrairement passe une des quadriques (S) et une seule. Par ce point, en effet, passe une droite L et une seule de la congruence, à laquelle correspond une des droites D, celle qui joint le point p à la trace de L sur le plan (P), et à cette droite D correspond une des quadriques (S), la seule qui passe par le point a . Donc, en vertu d'une remarque faite au début de cette Note, les quadriques (S) forment un faisceau ponctuel.

D'autre part, toutes ces quadriques (S) ont en commun deux droites de la congruence : celle qui passe par le point p et celle qui

est contenue dans le plan (P), puisque ces deux droites rencontrent toutes les droites D. L'intersection commune des quadriques (S) comprend ainsi deux droites, qui, appartenant à la congruence, ne peuvent être dans un même plan. Par suite, d'après une proposition bien connue, le complément de cette intersection est formé de deux autres droites Δ et Δ' , réelles ou imaginaires conjuguées, s'appuyant sur les deux premières, c'est-à-dire formant avec elles un quadrilatère gauche.

3. Il n'y a qu'un mot à dire, pour déduire de ce qui précède le théorème qui fait l'objet principal de cette Note, à savoir :

THÉORÈME III. — *Les droites d'une congruence (1,1) rencontrent deux mêmes droites.*

En effet, toutes les droites de la congruence, qui servent à engendrer les quadriques (S), considérées dans la démonstration du théorème II, rencontrent les deux droites Δ et Δ' , ces droites Δ et Δ' étant, sur chaque surface (S), des génératrices d'un système autre que celui des génératrices formées par les droites de la congruence. Il est d'ailleurs facile de voir que toutes les droites de la congruence concourent à engendrer les quadriques (S). Considérons, en effet, une quelconque de ces droites L: elle est rencontrée par une droite D passant par le point p et située dans le plan (P), et cette droite D sert à engendrer une quadrique (S) qui contient L. Donc toute droite L de la congruence s'appuie sur les deux droites Δ et Δ' .

4. On peut déduire de là, comme conséquence immédiate, un beau théorème, bien connu, sur les déplacements à deux paramètres d'un solide invariable, qui a été établi pour la première fois par Schönemann et auquel M. Mannheim, par ses travaux, a donné une portée considérable.

Ce théorème consiste en ce que *les normales aux surfaces trajectoires des points d'un solide invariable, pour chaque position de ce solide, s'appuient sur deux mêmes droites.*

Montrons que ces normales forment une congruence (1,1) : la proposition en résultera. Or, en premier lieu, par chaque point de l'espace, considéré comme appartenant au solide, passe une telle droite, la normale à la surface décrite par ce point. D'autre part,

dans le cas général, deux pareilles normales N, N' ne peuvent se rencontrer. Supposons en effet qu'elles se rencontrent en un certain point i . Ou bien ce point sera fixe, aux infiniment petits près d'ordre supérieur, et alors toutes les normales iront y concourir, ce qui correspond à un cas particulier et exceptionnel du théorème. Ou bien le point i sera mobile; mais, dans cette hypothèse, deux points du solide, respectivement situés sur N et sur N' , décriront des surfaces parallèles à la surface décrite par i , ce qui entraîne la coïncidence des normales N et N' . D'ailleurs, deux normales N et N' ne pouvant avoir un point commun, quelque éloigné qu'on le suppose, ne peuvent pas non plus être parallèles.

On conclut de ce qui précède qu'il ne peut y avoir plus d'une normale passant par un point quelconque, ni plus d'une normale contenue dans un plan quelconque. Ces normales forment donc bien une congruence (1,1), et, par conséquent, d'après le théorème III, elles s'appuient sur deux mêmes droites.

M. ÉMILE PICARD fait la Communication suivante :

Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires.

Dans mon Mémoire sur les équations aux dérivées partielles (*Journal de Mathématiques*, 1890), j'ai proposé incidemment une démonstration nouvelle et extrêmement simple pour établir l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires. M'étant borné à l'équation du premier ordre, que j'ai d'ailleurs traitée très rapidement, je ne crois pas inutile d'exposer ici cette démonstration d'une manière complète et dans toute sa généralité.

1. Envisageons le système des m équations du premier ordre

$$\frac{du}{dx} = f_1(x, u, v, \dots, w),$$

$$\frac{dv}{dx} = f_2(x, u, v, \dots, w),$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$\frac{dw}{dx} = f_m(x, u, v, \dots, w).$$

Les fonctions f sont des fonctions continues réelles des quantités réelles $x, u, v, \dots, w$ dans le voisinage de $x_0, u_0, v_0, \dots, w_0$. Elles sont définies quand $x, u, v, \dots, w$ restent respectivement compris dans les intervalles

$$\begin{aligned} & (x_0 - a, \quad x_0 + a), \\ & (u_0 - b, \quad u_0 + b), \\ & (v_0 - b, \quad v_0 + b), \\ & \dots\dots\dots, \\ & (w_0 - b, \quad w_0 + b), \end{aligned}$$

a et b désignant deux grandeurs positives.

De plus, on suppose que l'on puisse déterminer m quantités positives $A, B, \dots, L$, telles que

$$\begin{aligned} & |f(x, u', v', \dots, w') - f(x, u, v, \dots, w)| \\ & < A. |u' - u| + B. |v' - v| + \dots + L. |w' - w| \end{aligned}$$

(où $|x|$ désigne, suivant l'usage, la valeur absolue de x), x ainsi que les $u, v, \dots, w$ restant dans les intervalles indiqués. Il en sera évidemment ainsi, en particulier, si les fonctions f ont des dérivées partielles du premier ordre, restant finies, par rapport à $u, v, \dots, w$.

Ces hypothèses très générales étant faites, on veut démontrer qu'il existe des fonctions $u, v, \dots, w$ de x , continues dans le voisinage de x_0 , satisfaisant aux équations différentielles et se réduisant respectivement, pour $x = x_0$, à $u_0, v_0, \dots, w_0$.

2. Nous procéderons par approximations successives. Considérons d'abord le système

$$\frac{du_1}{dx} = f_1(x, u_0, v_0, \dots, w_0), \quad \dots \quad \frac{dw_1}{dx} = f_m(x, u_0, v_0, \dots, w_0);$$

nous en tirons, par quadratures, les fonctions $u_1, v_1, \dots, w_1$, en les déterminant de manière qu'elles prennent pour x_0 les valeurs $u_0, v_0, \dots, w_0$. On forme ensuite les équations

$$\frac{du_2}{dx} = f_1(x, u_1, v_1, \dots, w_1), \quad \dots \quad \frac{dw_2}{dx} = f_m(x, u_1, v_1, \dots, w_1).$$

et l'on détermine $u_2, v_2, \dots, w_2$ par la condition qu'elles prennent respectivement pour x_0 les valeurs $u_0, v_0, \dots, w_0$. On continue ainsi indéfiniment. Les fonctions $u_{m-1}, v_{m-1}, \dots, w_{m-1}$ se-

ront liées aux suivantes $u_m, v_m, \dots, w_m$ par les relations

$$\begin{aligned} \frac{du_m}{dx} &= f_1(x, u_{m-1}, v_{m-1}, \dots, w_{m-1}), \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{dw_m}{dx} &= f_m(x, u_{m-1}, v_{m-1}, \dots, w_{m-1}), \end{aligned}$$

et, pour $x = x_0$, on a

$$u_m = u_0, \quad v_m = v_0, \quad \dots, \quad w_m = w_0.$$

Nous allons établir que, m augmentant indéfiniment, $u_m, v_m, \dots, w_m$ tendent vers des limites qui représentent les intégrales cherchées, pourvu que x reste suffisamment voisin de x_0 .

Soit M la valeur absolue maxima des fonctions f , quand les variables dont elles dépendent restent dans les limites indiquées. Désignons par ρ une quantité au plus égale à a : si x reste dans l'intervalle $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, on aura

$$|u_1 - u_0| < M\rho, \quad \dots, \quad |w_1 - w_0| < M\rho.$$

Par suite, si $M\rho < b$, les quantités $u_1, v_1, \dots, w_1$ resteront dans les limites voulues, et il est évident qu'alors il en sera de même pour tous les autres systèmes de valeurs $u, v, \dots, w$. Désignant par δ une quantité au plus égale à ρ , nous allons supposer que x reste dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

En posant

$$u_m - u_{m-1} = U_m, \quad \dots, \quad w_m - w_{m-1} = W_m,$$

on peut écrire

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_m}{dx} &= f_1(x, u_{m-1}, \dots, w_{m-1}) - f_1(x, u_{m-2}, \dots, w_{m-2}) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dW_m}{dx} &= f_m(x, u_{m-1}, \dots, w_{m-1}) - f_m(x, u_{m-2}, \dots, w_{m-2}) \end{aligned} \right\} (m = 2, \dots, \infty).$$

Or on a

$$|U_1| < M\delta, \quad \dots, \quad |W_1| < M\delta.$$

Les équations précédentes, pour $m = 2$, démontrent que $|U_2|, |V_2|, \dots, |W_2|$ sont inférieurs à

$$(A + B + \dots + L)M\delta^2,$$

et, d'une manière générale, de proche en proche, on voit que $|U_m|, \dots, |W_m|$ sont inférieurs à

$$M\delta(A+B+\dots+L)^{m-1}\delta^{m-1}.$$

Or

$$u_m = u_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_m;$$

par suite, $u_m, v_m, \dots, w_m$ tendront vers une limite, si

$$(A+B+\dots+L)\delta < 1.$$

En prenant δ assez petit, cette condition sera vérifiée. Nous voyons donc que $u_m, v_m, \dots, w_m$ tendront vers des limites déterminées $u, v, \dots, w$, fonctions continues de x dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, δ étant la plus petite des trois quantités

$$a, \frac{b}{M}, \frac{1}{A+B+\dots+L};$$

$u, v, \dots, w$ seront représentées par des séries qui convergent à la manière d'une progression géométrique décroissante.

On a d'ailleurs

$$u_m = \int_{x_0}^x f_1(x, u_{m-1}, \dots, w_{m-1}) dx + u_0,$$

et, puisque les $u_m, v_m, \dots, w_m$ diffèrent de leurs limites d'autant plus qu'on veut, pour m assez grand, quel que soit x dans l'intervalle indiqué, on aura, à la limite

$$u = \int_{x_0}^x f_1(x, u, v, \dots, w) dx + u_0;$$

et, par suite,

$$\frac{du}{dx} = f_1(x, u, v, \dots, w),$$

et de même pour les autres équations. *Les fonctions $u, v, \dots, w$ sont donc les intégrales cherchées.*

SÉANCE DU 1^{er} AVRIL 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. Fouret : *Sur l'extension donnée par Poncelet à la notion de diamètres de Newton.*

M. Fouret : *Sur le lieu des points tels que la somme des carrés des longueurs des normales menées de l'un d'eux à une courbe gauche algébrique, soit constante.*

M. Beghin présente quelques observations sur le même sujet.

M. Kobb : *Sur les maxima et minima de certaines intégrales.*

M. RAFFY fait la Communication suivante :

Sur la déformation des surfaces spirales.

1. Le problème dont je vais d'abord indiquer la solution est le suivant :

Étant donné un élément linéaire, exprimé au moyen de variables quelconques, reconnaître s'il existe des spirales admettant cet élément linéaire.

Voici comment on devra procéder. Sauf pour la courbure totale, que je représente par $-2e^0$, j'emploie, pour les paramètres différentiels, les notations qu'on trouvera définies dans la *Théorie des surfaces* de M. Darboux (Livre VII, Chap. I).

Pour reconnaître si un élément linéaire, donné sous une forme quelconque, convient à des spirales, on calculera la courbure totale $-2e^0$ (qui ne peut être constante sans être nulle) et l'on formera l'invariant $e^{-0}\Delta\theta$.

S'il ne se réduit pas à une constante, on formera les deux invariants

$$\frac{\Theta(e^{-0}\Delta\theta, \theta)}{\Delta(e^{-0}\Delta\theta)}, \quad \frac{\Delta_2(e^{-0}\Delta\theta)}{\Delta(e^{-0}\Delta\theta)};$$

chacun d'eux devra être une fonction de $e^{-0}\Delta\theta$.

Si l'invariant $e^{-0}\Delta\theta$ est constant, on calculera l'invariant $e^{-0}\Delta_2\theta$. Si ce dernier est constant aussi, l'élément linéaire donné convient à des spirales en même temps qu'à des surfaces

de révolution. Si l'invariant $e^{-\theta} \Delta_2 \theta$ n'est pas constant, on formera

$$\frac{\Theta(e^{-\theta} \Delta_2 \theta, \theta)}{\Delta(e^{-\theta} \Delta_2 \theta)},$$

et ce nouvel invariant devra être une fonction de $e^{-\theta} \Delta_2 \theta$.

Je ne donnerai pas ici la démonstration de cette règle, parce qu'elle exigerait quelques développements. Je me bornerai à faire remarquer qu'en égalant à zéro les deux invariants $\Theta(e^{-\theta} \Delta \theta, \theta)$ et $\Theta(e^{-\theta} \Delta_2 \theta, \theta)$ on aurait les caractères spécifiques des surfaces applicables sur les surfaces de révolution.

2. Ce qui précède conduit à chercher les éléments linéaires qui conviennent à la fois à des spirales et à des surfaces de révolution.

Pour qu'un élément linéaire $e^{\omega} dx dy$ soit réductible à la forme

$$ds^2 = e^{-i(x'-y')} e^{fT(x'+y')d(x'+y')} dx' dy',$$

qui convient aux spirales, il faut et il suffit qu'après un changement de variables approprié

$$dx' = \frac{dx}{\xi(x)}, \quad dy' = \frac{dy}{\eta(y)}$$

on ait identiquement

$$\omega + \log \xi + \log \eta = -i(x' - y') + fT(x' + y')d(x' + y').$$

Pour éliminer la fonction inconnue T, différencions par rapport à x' et à y' ; nous aurons

$$\xi \left(\omega'_x + \frac{\xi'}{\xi} \right) = T - i, \quad \eta \left(\omega'_y + \frac{\eta'}{\eta} \right) = T + i;$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$\xi' - \eta' + \xi \omega'_x - \eta \omega'_y = -2i.$$

Si l'élément linéaire $e^{\omega} dx dy$ convient à une surface de révolution, on peut faire

$$\omega = \varphi(x + y), \quad \omega'_x = \omega'_y = \varphi'.$$

L'équation du problème devient alors

$$(1) \quad (\xi - \eta) \varphi' + \xi' - \eta' + 2i = 0.$$

Égalons à zéro la dérivée seconde du premier membre prise par

rapport à x et à y ; nous trouvons

$$(2) \quad (\xi - \eta)\varphi'' + (\xi' - \eta')\varphi' = 0.$$

Or la dérivée $\varphi'' = \omega''_{xy}$ doit être supposée différente de zéro (on n'écarte ainsi que les surfaces développables). On peut alors tirer $\xi' - \eta'$ de l'équation (2) et porter sa valeur dans l'équation (1), ce qui donne

$$(\xi - \eta) \left(\varphi' - \frac{\varphi''}{\varphi'} \right) + 2i = 0.$$

En conséquence, la différence $\xi - \eta$ ne dépend que de $x + y$. Il suit de là que les deux dérivées ξ' et η' sont égales et de signes contraires

$$\xi' = -\eta' = \text{const.} = mi.$$

Intégrant et négligeant les constantes additives, nous avons

$$\xi = mix, \quad \eta = -miy.$$

L'équation (1) devient alors

$$\varphi' = -\frac{2(m+1)}{m(x+y)} = \frac{n}{x+y}.$$

On en déduit immédiatement $\omega = n \log(x+y)$, d'où l'élément linéaire cherché

$$ds^2 = (x+y)^n dx dy.$$

C'est le résultat obtenu par M. Lie (*Mathem. Annalen*, t. XX, p. 387) comme solution de ce problème : *Trouver les éléments linéaires de toutes les surfaces dont les lignes géodésiques admettent plusieurs transformations infinitésimales conformes*. D'après un théorème de M. Weingarten, ces surfaces sont les lieux des centres de courbure de celles dont les rayons principaux sont dans le rapport constant $-\frac{n}{2}$.

3. Si, au lieu de chercher les spirales applicables sur des surfaces de révolution, on veut déterminer la fonction T de la variable $x' + y' = t$ par la condition que les lignes d'égale courbure soient parallèles, on arrive à l'équation du second ordre

$$\frac{1}{T^2} \left[\left(\frac{T''}{T'} - T \right)^2 + 1 \right] = \text{const.} = 2\alpha.$$

On peut obtenir son intégrale générale. Prenons, en effet,

pour variable indépendante T et posons

$$Z = T' - \frac{T^2}{2}, \quad p = \frac{dZ}{dT},$$

ce qui conduit à l'équation

$$p^2 = 2aZ + aT^2 - 1.$$

L'équation dérivée

$$p \frac{dp}{dT} - ap - aT = 0$$

est homogène et s'intègre par une quadrature. La détermination de T est donc ramenée aux quadratures. L'intégrale particulière

$$T = \frac{1}{q} \operatorname{tang} \frac{(q+1)t}{2q}, \quad \frac{q^2}{q+1} = a,$$

donne l'élément linéaire des spirales applicables sur les surfaces de révolution.

SÉANCE DU 13 AVRIL 1891.

PRÉSIDENTE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. Bioche : *Sur les développables qui passent par une courbe gauche.*

M. Kobb : *Théorème sur la variation d'une intégrale double.*

M. Fouret : *Théorème général sur le maximum ou le minimum d'une fonction symétrique de plusieurs variables dont la somme est constante.*

M. Carvallo : *Sur un nouveau mode d'exposition de la théorie des déterminants.*

M. d'Ocagne : *Principe général de la théorie des abaques.*

M. APPELL adresse la Communication suivante :

Sur des potentiels conjugués.

Dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire $x + yi$, la partie réelle u et le coefficient v de i de la fonction vérifient les deux équations fondamentales

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

qui donnent immédiatement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Ces deux fonctions u et v vérifient donc l'équation du potentiel logarithmique et sont associées ou conjuguées par les relations (1).

M. Picard, dans une Note récente (*Comptes rendus*, 5 avril 1891), a généralisé ce point de vue en considérant des systèmes de deux fonctions associées vérifiant des relations analogues à (1), avec des coefficients fonctions de x .

Je me propose ici d'indiquer sommairement des systèmes analogues à (1), pour le potentiel à trois et quatre variables.

Considérons quatre fonctions X, Y, Z, T de trois variables réelles x, y, z , vérifiant les relations

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \end{array} \right.$$

qui présentent une certaine symétrie, en ce sens que la fonction Z , par exemple, est liée à $X, -Y, -T$ comme T à Y, X, Z , etc.

On conclut immédiatement des équations (2) que l'on a

$$\Delta_2 X = 0, \quad \Delta_2 Y = 0, \quad \Delta_2 Z = 0, \quad \Delta_2 T = 0,$$

en posant

$$\Delta_2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

De plus, on peut choisir arbitrairement la fonction T vérifiant $\Delta_2 T = 0$; il existe toujours des fonctions X, Y, Z vérifiant les équations (2); il en existe même une infinité et l'on peut préciser le degré d'indétermination et exprimer ces fonctions par des intégrales définies. Il suffit pour cela d'employer la démonstration que Beltrami a donnée pour un théorème de Stokes.

Le système (2) est un cas particulier du suivant, où figurent

quatre fonctions X, Y, Z, T de quatre variables x, y, z, t ,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Y}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \end{array} \right.$$

et dans lequel chaque fonction vérifie nécessairement l'équation à quatre termes

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Je me propose d'indiquer prochainement d'une façon plus détaillée les propriétés de ces potentiels associés, en me plaçant surtout au même point de vue que dans des recherches antérieures (*Acta mathematica*, t. 4).

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Mémoire sur les surfaces gauches rationnelles ;

par M. GENTY.

1. Les équations d'une droite, en coordonnées rectangulaires, étant

$$\frac{x - x_1}{u} = \frac{y - y_1}{v} = \frac{z - z_1}{w},$$

la droite est entièrement déterminée par les six quantités

$$u, \quad v, \quad w, \\ \xi = w y_1 - v z_1, \quad \eta = u z_1 - w x_1, \quad \zeta = v x_1 - u y_1,$$

que nous appellerons les *coordonnées homogènes* de la droite et qui sont liées entre elles par la relation identique

$$(1) \quad u \xi + v \eta + w \zeta = 0.$$

Dans une Note insérée aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3^e série, t. VI, p. 401, nous avons déjà donné la définition

de ces coordonnées et nous en avons fait une application à l'étude du complexe de Reye; le but du présent Mémoire est de montrer combien leur emploi facilite l'étude des surfaces gauches rationnelles.

Mais, avant d'aborder cette étude, nous allons rappeler quelques formules de la Note précitée et en donner quelques autres qui seront utiles par la suite.

2. La plus courte distance de deux droites, $(u \dots)$ et $(u_1 \dots)$, a pour expression

$$\delta = \frac{\Sigma(u\xi_1 + u_1\xi)}{\sqrt{\Sigma(vw_1 - v_1w)^2}},$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}\Sigma(u\xi_1 + u_1\xi) &= u\xi_1 + v\tau_1 + w\zeta_1 + u_1\xi + v_1\tau_1 + w_1\zeta, \\ \Sigma(vw_1 - v_1w)^2 &= (vw_1 - v_1w)^2 + (wu_1 - w_1u)^2 + (uv_1 - u_1v)^2.\end{aligned}$$

Si les deux droites sont infiniment voisines et si l'on pose

$$u_1 = u + du, \quad v_1 = v + dv, \quad \dots,$$

il vient

$$(2) \quad \delta = \frac{\Sigma du d\xi}{\sqrt{\Sigma(v dw - w dv)^2}};$$

si $d\xi$ est l'angle infiniment petit des deux droites, on a

$$(3) \quad d\xi = \frac{\sqrt{\Sigma(v dw - w dv)^2}}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

La condition pour que les deux droites se rencontrent devient

$$(4) \quad \Sigma du d\xi = 0,$$

et leur point d'intersection a pour coordonnées

$$(5) \quad x = \frac{\tau_1 d\xi - \zeta d\tau_1}{\Sigma \xi du}, \quad y = \frac{\zeta d\xi - \xi d\zeta}{\Sigma \xi du}, \quad z = \frac{\xi d\tau_1 - \tau_1 d\xi}{\Sigma \xi du}.$$

La perpendiculaire commune aux deux droites a pour coordonnées

$$(6) \quad \begin{cases} (v dw - w dv) \Sigma(v dw - w dv)^2, \\ (w du - u dw) \Sigma(v dw - w dv)^2, \\ (u dv - v du) \Sigma(v dw - w dv)^2, \\ P(u \Sigma u du - du \Sigma u^2) - Q(u \Sigma du^2 - du \Sigma u du), \\ P(v \Sigma u du - dv \Sigma u^2) - Q(v \Sigma du^2 - dv \Sigma u du), \\ P(w \Sigma u du - dw \Sigma u^2) - Q(w \Sigma du^2 - dw \Sigma u du). \end{cases}$$

en posant

$$(7) \quad P = \begin{vmatrix} d\xi & d\tau & d\zeta \\ u & v & w \\ du & dv & dw \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} \xi & \tau & \zeta \\ u & v & w \\ du & dv & dw \end{vmatrix}.$$

La droite $(u \dots)$ et la perpendiculaire commune à cette droite et à la droite infiniment voisine sont dans un plan qui a pour équation

$$(8) \quad (ux + vy + wz)\Sigma u du - (x du + y dv + z dw)\Sigma u^2 = Q,$$

et leur point de rencontre a pour coordonnées

$$(9) \quad x = \frac{Pu - Q du + (v dw - w dv)\Sigma \xi du}{\Sigma (v dw - w dv)^2}, \quad \dots$$

3. Soient maintenant $u, v, \dots$ des fonctions entières d'ordre n d'une variable arbitraire t , de la forme

$$(10) \quad \begin{cases} u = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n, \\ v = b_0 + a_1 t + \dots + b_n t^n, \\ \dots\dots\dots \\ \xi = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_n t^n. \end{cases}$$

la droite $(u, \dots)$ décrit une surface gauche.

L'identité (1) montre d'ailleurs qu'on a entre les coefficients des expressions (10) les $2n + 1$ équations de condition

$$(11) \quad \begin{cases} \Sigma a_0 x_0 = 0, \\ \Sigma (a_0 x_1 + a_1 x_0) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \Sigma a_n x_n = 0. \end{cases}$$

La surface gauche est d'ordre n . En effet, son intersection avec le plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

est représentée par les équations

$$(12) \quad x = \frac{B\xi - C\tau - D\xi}{Au + Bv + Cw}, \quad \dots;$$

c'est donc une courbe unicursale d'ordre n .

Nous appellerons surface gauche d'ordre n , ou, pour abrégé, surface C_n , toute surface réglée dont les génératrices ont pour

coordonnées des fonctions entières d'ordre n d'une variable arbitraire t .

Nombre des conditions nécessaires pour déterminer une surface C_n .

4. Les expressions des coordonnées de l'une quelconque de ses génératrices contiennent $6n + 6$ coefficients indéterminés, liés entre eux par les $2n + 1$ relations (11).

D'un autre côté, on peut remplacer t par une autre variable τ , qui lui soit liée par une équation de la forme

$$at\tau + bt + c\tau + d = 0,$$

et l'on peut disposer des coefficients arbitraires a, b, c et d pour déterminer à volonté quatre des coefficients des expressions (11). Il ne reste donc que

$$6n + 6 - (2n + 1) - 4 = 4n + 1$$

coefficients indéterminés; tel est par suite le nombre des conditions nécessaires pour déterminer une surface C_n .

Ce qui précède montre d'ailleurs qu'on peut choisir à volonté les valeurs de la variable auxquelles correspondent trois génératrices de la surface.

Une génératrice donnée de la surface gauche équivaut évidemment à trois conditions

Une directrice rectiligne donnée équivaut à $n + 1$ conditions. En effet, si $u_1, \dots$ sont les coordonnées de cette directrice, on aura, quel que soit t ,

$$\Sigma(u\xi_1 + u_1\xi) = 0,$$

ce qui fournit les $n + 1$ conditions

$$(13) \quad \Sigma(\alpha_0\xi_1 + u_1z_0) = 0, \quad \dots$$

Si la directrice rectiligne n'est pas donnée, ses coordonnées dépendent de quatre coefficients qu'on pourra éliminer, pour $n > 3$, entre les $n + 1$ équations qui précèdent, et il restera $n - 3$ équations de condition entre les coefficients de la surface gauche; $3n + 4$ conditions nouvelles suffiront pour la déterminer.

Pour $n = 3$, on a quatre équations de condition qui permettent de déterminer les coordonnées de la directrice. Ces quatre équations

tions représentent des complexes linéaires ayant deux droites communes. Donc une surface C_3 a en général deux directrices rectilignes.

Enfin, pour $n = 2$, les équations (13) sont au nombre de trois et ne suffisent pas pour déterminer $u, v, \dots$. Ainsi une surface réglée du deuxième ordre a un nombre infini de directrices rectilignes.

Revenons au cas général, et supposons que la directrice rectiligne donnée soit l'axe des x . On aura $\xi = 0$ pour toute valeur de t , d'où

$$\tau_1 = -w\varphi(t), \quad \zeta = v\varphi(t).$$

A chaque valeur de t correspond une génératrice rencontrant la directrice en un point dont l'abscisse est $\varphi(t)$. Et réciproquement, par un point situé sur l'axe des x à la distance ρ de l'origine passent toutes les génératrices correspondant aux valeurs de t fournies par l'équation

$$\varphi(t) = \rho.$$

Si donc la directrice donnée est une droite simple de la surface, on a nécessairement

$$\varphi(t) = \frac{at+b}{ct+d},$$

et, par suite, le rapport anharmonique des points de rencontre de la directrice avec quatre génératrices quelconques de la surface est égal à celui des valeurs de t auxquelles ces génératrices correspondent.

On a d'ailleurs pour les coordonnées $u, \dots$ des expressions de la forme

$$\begin{aligned} u &= f_1(t), & v &= (ct+d)f_2(t), & w &= (ct+d)f_3(t), \\ \xi &= 0, & \tau_1 &= -(at+b)f_3(t), & \zeta &= (at+b)f_2(t), \end{aligned}$$

où f_2 et f_3 sont des fonctions d'ordre $n-1$ au plus.

Si l'axe des x était une directrice double, on trouverait de même, pour les coordonnées d'une génératrice, les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} u &= F_1(t), & v &= (dt^2+ct+f)f_2(t), & w &= (dt^2+ct+f)f_3(t), \\ \xi &= 0, & \tau_1 &= -(at^2+bt+c)f_3(t), & \zeta &= (at^2+bt+c)f_2(t), \end{aligned}$$

f_2 et f_3 étant d'ordre $n-2$, et ainsi de suite.

On reconnaît facilement d'ailleurs que, quel que soit l'ordre de multiplicité de la directrice, les expressions de $u, \dots$ contiennent réellement $3n$ coefficients indéterminés.

Si la directrice rectiligne est située tout entière à l'infini, la surface a un plan directeur.

On a, dans ce cas, $u_1 = v_1 = w_1 = 0$, et les équations (13) deviennent

$$\Sigma a_0 \xi_1 = 0, \quad \dots,$$

En éliminant ξ_1, τ_1 et ζ_1 entre ces équations, il restera $n - 1$ relations indépendantes entre les coefficients de la surface gauche. Par conséquent, le nombre des conditions nécessaires pour déterminer une surface C_n à plan directeur est égal à

$$4n + 1 - (n - 1) = 3n + 2.$$

On verrait d'ailleurs très simplement que, si le plan directeur est le plan des yz , et si la droite située à l'infini dans ce plan est une droite multiple d'ordre p de la surface, les coordonnées de C_n ont des expressions de la forme

$$\begin{aligned} u &= 0, & v &= -f(t)\psi(t), & w &= f(t)\varphi(t), \\ \xi &= F_1(t), & \tau &= f_1(t)\varphi(t), & \zeta &= f_1(t)\psi(t). \end{aligned}$$

F étant au plus d'ordre n , φ et ψ d'ordre p , et f et f_1 d'ordre $n - p$ par rapport à t .

Si enfin une surface C_n a deux directrices rectilignes, l'une Ox , l'autre située à l'infini dans le plan des yz , et telles que la première soit sur la surface une droite multiple d'ordre p , et la seconde une droite multiple d'ordre q , les coordonnées d'une génératrice de la surface auront des expressions de la forme

$$\begin{aligned} u &= 0, & v &= f(t)\varphi(t), & w &= f(t)\psi(t), \\ \xi &= 0, & \tau &= -f_1(t)\psi(t), & \zeta &= f_1(t)\varphi(t); \end{aligned}$$

φ et ψ sont des fonctions d'ordre q ; f et f_1 des fonctions d'ordre p , et l'on a, comme cela doit être,

$$p + q = n.$$

§. Comme application, cherchons les équations d'une surface

réglée du second ordre déterminée par trois de ses génératrices $(u_1, \dots)$, $(u_2, \dots)$, $(u_3, \dots)$.

On aura évidemment pour $u, \dots$ des expressions de la forme

$$u = \frac{a_1 u_1}{t - t_1} + \frac{a_2 u_2}{t - t_2} + \frac{a_3 u_3}{t - t_3}, \quad \dots,$$

t_1, t_2, t_3 étant les valeurs de la variable choisies à volonté qui correspondent aux trois génératrices données; nous déterminons les coefficients a_1, a_2, a_3 en exprimant que la condition (1) est satisfaite pour toute valeur de t .

Cette condition étant déjà remplie pour trois valeurs de la variable, il suffit d'exprimer qu'elle l'est encore pour deux autres valeurs quelconques, par exemple pour $t = 0$ et $t = \infty$.

On obtient ainsi les deux équations

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{A t_1}{a_1} + \frac{B t_2}{a_2} + \frac{C t_3}{a_3} = 0, \\ \frac{A}{a_1} + \frac{B}{a_2} + \frac{C}{a_3} = 0. \end{cases}$$

où l'on a posé

$$A = \Sigma(u_2 \xi_3 + u_3 \xi_2),$$

$$B = \Sigma(u_3 \xi_1 + u_1 \xi_3),$$

$$C = \Sigma(u_1 \xi_2 + u_2 \xi_1).$$

Des équations (14) on tire

$$a_1 : a_2 : a_3 = \frac{A}{t_2 - t_3} : \frac{B}{t_3 - t_1} : \frac{C}{t_1 - t_2}.$$

On a donc enfin

$$u = \frac{A u_1}{(t_2 - t_3)(t - t_1)} + \frac{B u_2}{(t_3 - t_1)(t - t_2)} + \frac{C u_3}{(t_1 - t_2)(t - t_3)}, \quad \dots$$

Pour $t_1 = \infty$, $t_2 = 0$ et $t_3 = 1$, les expressions de $u, \dots$ prennent la forme plus simple

$$(15) \quad u = A u_1 - \frac{B u_2}{t} + \frac{C u_3}{t - 1}, \quad \dots$$

Les résultats qui précèdent permettent d'obtenir très simplement les conditions qui expriment que quatre droites ne se rencontrant pas deux à deux sont situées sur un même hyperboloïde.

Soient $(u_1 \dots)$, $(u_2 \dots)$, $(u_3 \dots)$ et $(u_4 \dots)$ les quatre droites

données, et posons dès maintenant

$$\begin{aligned}\Sigma(u_1\xi_1 + u_4\xi_1) &= D, & \Sigma(u_2\xi_1 + u_3\xi_2) &= E, & \Sigma(u_3\xi_1 + u_4\xi_3) &= F; \\ (u_2, v_3, w_4) &= U_1, & (u_3, v_1, w_4) &= U_2, & (u_1, v_2, w_4) &= U_3, \\ & & (u_1, v_2, w_3) &= U_4.\end{aligned}$$

Les équations (15) représentant les coordonnées d'une génératrice quelconque de l'hyperboloïde déterminé par les trois premières droites, on devra pouvoir poser

$$(16) \quad \begin{cases} su_4 = A u_1 - \frac{B u_2}{t} + \frac{C u_3}{t-1}, \\ sv_4 = A v_1 - \frac{B v_2}{t} + \frac{C v_3}{t-1}, \\ sw_4 = A w_1 - \frac{B w_2}{t} + \frac{C w_3}{t-1}, \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} s\xi_4 = A \xi_1 - \frac{B \xi_2}{t} + \frac{C \xi_3}{t-1}, \\ s\tau_4 = A \tau_1 - \frac{B \tau_2}{t} + \frac{C \tau_3}{t-1}, \\ s\zeta_4 = A \zeta_1 - \frac{B \zeta_2}{t} + \frac{C \zeta_3}{t-1}, \end{cases}$$

s et t étant deux coefficients inconnus. Or on a

$$\begin{aligned}u_4 U_4 &= u_1 U_1 + u_2 U_2 + u_3 U_3, \\ v_4 U_4 &= v_1 U_1 + v_2 U_2 + v_3 U_3, \\ w_4 U_4 &= w_1 U_1 + w_2 U_2 + w_3 U_3.\end{aligned}$$

En comparant ces équations avec les équations (16), il vient

$$(18) \quad \frac{A}{s} = \frac{U_1}{U_4}, \quad \frac{B}{st} = -\frac{U_2}{U_4}, \quad \frac{C}{s(t-1)} = \frac{U_3}{U_4},$$

et, si l'on élimine s et t entre ces équations, on a

$$(19) \quad A U_2 U_3 + B U_3 U_1 + C U_1 U_2 = 0 :$$

c'est l'une des conditions cherchées.

Si maintenant nous additionnons les équations (16) et (17) après avoir multiplié les trois premières par ξ_1 , τ_1 , ζ_1 et les trois

autres par u_1, v_1, w_1 respectivement, il vient

$$st(t-1)D = BC;$$

remplaçant dans cette équation st et $t-1$ par leurs valeurs tirées des équations (18), et tenant compte de l'équation (19), on a

$$AU_2U_3 + DU_1U_4 = 0.$$

On trouverait de même

$$BU_3U_1 + EU_2U_4 = 0,$$

$$CU_1U_2 + FU_3U_4 = 0.$$

Les trois équations qui précèdent se réduisent d'ailleurs à deux en vertu de l'identité

$$AU_2U_3 + BU_3U_1 + CU_1U_2 = DU_1U_4 + EU_2U_4 + FU_3U_4.$$

6. Cherchons encore l'expression générale d'une cubique réglée dont on donne quatre génératrices.

Soient $\alpha, 0, 1$ et τ les valeurs de la variable qui correspondent aux quatre génératrices données. On aura pour $u, \dots$ des expressions de la forme

$$(20) \quad u = au_1 + \frac{bu_2}{t} + \frac{cu_3}{t-1} + \frac{du_4}{t-\tau}, \quad \dots$$

Ces équations renferment quatre coefficients indéterminés; mais il existe entre eux trois relations que nous obtiendrons en exprimant que l'équation (1) est satisfaite identiquement. Or cette équation est du sixième ordre et elle est déjà satisfaite par les quatre valeurs $\alpha, 0, 1$ et τ de la variable; pour qu'elle soit identique, il suffit qu'elle le soit encore pour trois autres valeurs de la variable.

Mais, si l'équation (1) est satisfaite identiquement, il en sera de même de sa dérivée

$$(21) \quad \Sigma(u\xi' + u'\xi) = 0$$

et réciproquement; si l'équation (21) est identique, l'expression $\Sigma u\xi$ sera constante et, comme elle est nulle pour quatre valeurs de t , elle sera identiquement nulle. En exprimant que l'équation (21) est satisfaite pour les valeurs $\alpha, 0$ et 1 de la variable, nous obten-

nous sans peine les conditions suivantes :

$$(22) \quad \begin{cases} bC + cB + dD = 0, \\ cA + \frac{dE}{\tau} = 0, \\ bA + \frac{dF}{1-\tau} = 0. \end{cases}$$

Si l'on ajoute ces équations après les avoir multipliées respectivement par A, B et C, il vient

$$(23) \quad AD\tau^2 - (AD + BE - CF)\tau + BE = 0.$$

Il est facile d'interpréter cette équation. En effet, τ est le rapport anharmonique des quatre valeurs ∞ , 0, 1 et τ de la variable. D'ailleurs la surface cherchée a deux directrices rectilignes, qui sont les droites Δ et Δ' , rencontrant les quatre droites données; l'une est une directrice simple, l'autre une directrice double. Or nous avons vu que, lorsqu'une surface C_n a une directrice simple, le rapport anharmonique des points où quatre génératrices rencontrent cette directrice est égal à celui des valeurs de t auxquelles elles correspondent. L'équation (23) a donc pour racines les rapports anharmoniques des points où les quatre droites données sont rencontrées par Δ et Δ' respectivement. Si l'on adopte la valeur τ , Δ sera la directrice simple de la surface et Δ' la directrice double, et inversement.

Si deux des droites données se rencontrent, la directrice double est déterminée et l'équation (23) se réduit au premier degré.

Dans le cas général, les équations (22) montrent qu'on peut prendre

$$d = -A, \quad c = \frac{E}{\tau}, \quad b = \frac{F}{1-\tau},$$

et les expressions des coordonnées prennent la forme

$$u = au_1 + \frac{Fu_2}{1-\tau} + \frac{Eu_3}{\tau(1-\tau)} - \frac{Au_4}{1-\tau}, \quad \dots,$$

où l'on doit remplacer τ par l'une des racines de l'équation (23); elles ne renferment plus qu'un seul coefficient arbitraire a .

Remarquons encore que, si l'équation (23) a ses deux racines

égales, c'est-à-dire si l'on a

$$A^2 D^2 + B^2 E^2 + C^2 F^2 - 2BCEF - 2CAFD - 2ABDE = 0.$$

il n'y aura qu'une droite Δ rencontrant les quatre droites données et, dans ce cas, l'une quelconque des quatre droites est tangente à l'hyperboloïde déterminé par les trois autres.

La condition qui précède peut encore s'écrire sous la forme bien connue

$$\begin{vmatrix} 0 & C & B & D \\ C & 0 & A & E \\ B & A & 0 & F \\ D & E & F & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

7. *Courbe double d'une surface C_n .* — Nous avons vu que la section plane d'une surface C_n est une courbe unicursale d'ordre n , ayant par suite $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles. La surface a donc une courbe double d'ordre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, dont nous allons chercher les équations.

Soient $(u_s...)$, $(u_t...)$ deux génératrices qui se rencontrent, s et t les valeurs correspondantes de la variable. On a

$$(24) \quad \Sigma(u_s \xi_t + u_t \xi_s) = 0.$$

Le premier membre de cette équation, ainsi que sa dérivée par rapport à t , s'annule pour $t = s$; en supprimant ce facteur, l'équation n'est plus que d'ordre $n - 2$ par rapport à t et s , ce qui montre qu'une génératrice d'une surface C_n en rencontre $n - 2$ autres.

La courbe double a d'ailleurs pour équations

$$x = \frac{\tau_t \xi_s - \tau_s \xi_t}{\Sigma u_s \xi_t}, \quad y = \frac{\xi_t \xi_s - \xi_s \xi_t}{\Sigma u_s \xi_t}, \quad z = \frac{\xi_t \tau_s - \xi_s \tau_t}{\Sigma u_s \xi_t},$$

s et t étant deux variables arbitraires liées entre elles par l'équation

$$\frac{\Sigma(u_s \xi_t + u_t \xi_s)}{(t-s)^2} = 0.$$

On démontrerait sans difficulté que l'ordre de cette courbe est bien égal à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. (A suivre.)

8. *Génératrices singulières d'une surface* C_n . — Nous avons trouvé pour l'expression de la plus courte distance de deux droites infiniment voisines

$$\delta = \frac{\sum du d\xi}{\sqrt{\sum (v dw - w dv)^2}}.$$

Si ces deux droites sont les génératrices d'une surface C_n , il vient

$$\delta = \frac{\sum u' \xi'}{\sqrt{\sum (v w' - w v')^2}}.$$

Les génératrices singulières de la surface sont donc fournies par l'équation

$$(25) \quad \sum u' \xi' = 0.$$

Cette équation est d'ordre $2(n-2)$; on a, en effet,

$$\begin{aligned} \sum u \xi &= 0, \\ \sum (u' \xi + u \xi') &= 0 \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\sum (nu - tu')(nt - t\xi') = t^2 \sum u' \xi'.$$

Or le premier membre de cette équation est d'ordre $2(n-1)$, donc $\sum u' \xi'$ est d'ordre $2(n-2)$; tel est, par suite, le nombre des génératrices singulières de la surface.

Si l'équation (25) est satisfaite identiquement, la surface C_n est développable. Cette équation étant d'ordre $2(n-2)$, la condition d'identité fournit $2n-3$ relations, en sorte qu'il faut

$$1n+1-(2n-3)=2(n+2)$$

conditions pour déterminer une surface développable rationnelle d'ordre n .

9. *Point central, ligne de striction, plan central et paramètre de distribution des plans tangents d'une surface* C_n . — En appliquant au cas de deux génératrices infiniment voisines de la surface C_n les formules du § 2, et en posant

$$P = \begin{vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix},$$

$$p^2 = \sum (v w' - w v')^2,$$

on a pour les coordonnées du point central de la génératrice

$$(26) \quad \begin{cases} x = \frac{Pu - Qu' + (vw' - wv')\Sigma\xi u'}{p^2}, \\ y = \frac{Pv - Qv' + (wu' - uw')\Sigma\xi u'}{p^2}, \\ z = \frac{Pw - Qw' + (uv' - vu')\Sigma\xi u'}{p^2}. \end{cases}$$

Le numérateur et le dénominateur des expressions (26) sont d'ordre $4(n-1)$; tel est, par suite, l'ordre de la ligne de striction de la surface C_n . Ces expressions peuvent, d'ailleurs, se mettre sous la forme

$$(27) \quad x = \frac{(\eta\xi' - \xi\eta')}{\Sigma\xi u'} + \frac{u\Sigma u'\xi'}{p^2\Sigma\xi u'} \quad \dots,$$

et il est facile de voir que le point qui a pour coordonnées

$$x = \frac{(\eta\xi' - \xi\eta')}{\Sigma\xi u'}, \quad \dots$$

est le point de contact de la génératrice (u) avec le plan mené par cette ligne et l'origine, c'est-à-dire le point correspondant de la courbe de contact avec C_n du cône circonscrit à cette surface et ayant son sommet à l'origine. Cette courbe est donc unicursale et d'ordre $2(n-1)$.

Dans le cas d'une génératrice singulière, on a

$$\Sigma u'\xi' = 0,$$

et le point central se confond avec le point d'intersection de cette génératrice et de la génératrice infiniment voisine.

Si la surface C_n a un plan directeur, quel que soit d'ailleurs l'ordre de multiplicité de la directrice située dans ce plan, l'ordre de la ligne de striction diminue de moitié.

On a en effet, dans ce cas, le plan directeur étant le plan des yz ,

$$\begin{aligned} u &= 0, & v &= -f(t)\psi(t), & w &= f(t)\varphi(t), \\ \xi &= F, & \eta &= f_1(t)\varphi(t), & \zeta &= f_1(t)\psi(t), \end{aligned}$$

où φ et ψ sont des fonctions d'ordre μ , f et f_1 des fonctions d'ordre

$n - \mu$ en t , et l'on trouve aisément pour les coordonnées du point central

$$\begin{aligned}x &= \frac{F'u - F'u' - ff_1(\varphi\psi' - \varphi'\psi)}{f^2(\varphi\psi' - \varphi'\psi)}, \\y &= \frac{F'v - F'v'}{f^2(\varphi\psi' - \varphi'\psi)}, \\z &= \frac{F'w - F'w'}{f^2(\varphi\psi' - \varphi'\psi)};\end{aligned}$$

le dénominateur et les numérateurs de ces expressions ne sont plus que d'ordre $2(n-1)$.

Ainsi la ligne de striction d'un parabolôïde hyperbolique pour l'un des systèmes de génératrices est une conique : la forme même des expressions de x , y et z montre que cette conique est une parabole.

Le plan central relatif à la génératrice $(u \dots)$ a pour équation

$$(28) \quad (ux + vy + wz)\Sigma uu' - (u'x + v'y + w'z)\Sigma u^2 = Q;$$

il enveloppe une développable dont la classe est égale à $2n-2$.

Enfin le paramètre de distribution des plans tangents le long de la génératrice $(u \dots)$ a pour expression

$$(29) \quad k = \frac{\Sigma u^2 \Sigma u' \xi'}{p^2}.$$

Comme exemple, cherchons le paramètre de distribution des plans tangents le long de la génératrice $(u_2 \dots)$ de l'hyperboloïde représenté par les équations (15) du § 3, et, pour simplifier, supposons que le centre de la surface soit à l'origine, ce qui entraîne

$$\Sigma u_2 \xi_1 = \Sigma u_3 \xi_2,$$

$$\Sigma u_3 \xi_1 = \Sigma u_1 \xi_3,$$

$$\Sigma u_1 \xi_2 = \Sigma u_2 \xi_1.$$

On a alors

$$u = \Lambda t(t-1)u_1 - B(t-1)u_2 + Ctu_3, \quad \dots$$

$$u' = \Lambda(2t-1)u_1 - Bu_2 + Cu_3, \quad \dots$$

et pour $t=0$

$$u = u_2, \quad v = v_2, \quad w = w_2,$$

$$u' = Cu_3 - \Lambda u_1 - Bu_2, \quad \dots$$

On tire de là

$$\Sigma u^2 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2,$$

$$\Sigma u' \xi' = -ABC,$$

$$\begin{aligned} v'w' - v'w &= A(w_2v_1 - v_2w_1) + C(v_2w_3 - v_3w_2) \\ &= 2(u_3\xi_2 + v_3\tau_2 + w_3\zeta_2)(v_1w_2 - v_2w_1) \\ &\quad + 2(u_1\xi_2 + v_1\tau_2 + w_1\zeta_2)(v_2w_3 - v_3w_2) \\ &= 2\xi_2[u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1)] \\ &\quad + 2(\tau_2v_2 + \zeta_2w_2)(v_1w_3 - v_3w_1) = 2\Delta\xi_2, \end{aligned}$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

d'où

$$\rho^2 = 4\Delta^2(\xi_1^2 + v_1^2 + \zeta_1^2);$$

on a donc enfin

$$k = -\frac{ABC}{4\Delta^2} \frac{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}{\xi_1^2 + \tau_1^2 + \zeta_1^2} = \frac{V}{2\rho^2},$$

en appelant V le volume du parallélépipède déterminé par les trois droites $(u_1 \dots)$, $(u_2 \dots)$ et $(u_3 \dots)$ et ρ la distance de l'origine à la génératrice $(u_2 \dots)$. On sait d'ailleurs que le parallélépipède construit sur trois génératrices quelconques d'un hyperboloïde a un volume constant (*). Donc, si k est le paramètre de distribution des plans tangents pour une génératrice quelconque d'un hyperboloïde, ρ la distance du centre à cette génératrice, le produit $k\rho^2$ est constant.

10. Plan tangent, paraboloides des normales. — Un point quelconque d'une surface gauche C_n ayant pour coordonnées

$$x = \frac{v\zeta - w\tau}{\Sigma u^2} + su, \quad y = \dots, \quad z = \dots,$$

ces équations seront celles de la surface gauche elle-même, si l'on y regarde s et t comme deux variables indépendantes. Les quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ seront proportionnelles aux cosinus directeurs d'une tangente à la surface et le plan tangent en un point quelconque sera ainsi complètement déterminé.

(*) Ce théorème n'était pas connu quand nous l'avons énoncé dans les *Nouvelles Annales*, 3^e série, t. IV, p. 248.

Soit l'axe des z une génératrice de la surface, on a pour les coordonnées de cette droite

$$u = v = 0, \quad w = 1, \quad \xi = \tau_1 = \tau_2 = 0.$$

La condition $\Sigma(u\xi' + u'\xi) = 0$ donne alors $\zeta' = 0$; et les coordonnées de la génératrice infiniment voisine sont

$$u' dt, \quad v' dt, \quad 1 + w' dt, \quad \xi' dt, \quad \tau_1' dt, \quad 0.$$

Ceci posé, le plan $z = s$ mené par un point A de l'axe des z parallèlement au plan des yz rencontre cette génératrice infiniment voisine en un point B ayant pour coordonnées

$$x = \frac{-\tau_1' + su'}{1 + w' dt} dt, \quad y = \frac{\xi' + sv'}{1 + w' dt} dt, \quad z = s.$$

La normale à la surface gauche au point A est perpendiculaire à Oz et à AB; donc ses cosinus directeurs sont proportionnels aux quantités $\xi' + sv'$, $\tau_1' - su'$ et 0, et elle a elle-même pour coordonnées

$$\begin{aligned} u_N &= \xi' + sv', & v_N &= \tau_1' - su', & w_N &= 0, \\ \xi_N &= s^2 u' - s \tau_1', & \tau_2_N &= s \xi' + s^2 v', & \zeta_N &= 0. \end{aligned}$$

Si dans ces équations on regarde t comme une constante, s variant seul, elles représentent le paraboléide des normales le long de la génératrice Oz .

Dans l'hypothèse actuelle, on a

$$P = u'\tau_1' - v'\zeta', \quad Q = 0, \quad \Sigma u'\xi = 0, \quad p^2 = u'^2 + v'^2;$$

on a alors pour les coordonnées du point central de Oz

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{(u'\tau_1' - v'\xi')u}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}.$$

Si donc on suppose en outre que le point central a été pris pour origine, on a

$$(30) \quad u'\tau_1' - v'\xi' = 0;$$

on a alors pour le paramètre de distribution des plans tangents

$$k = \frac{u'\xi' + v'\tau_1'}{u'^2 + v'^2} = \frac{\sqrt{\xi'^2 + \tau_1'^2}}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}.$$

Si d'ailleurs nous appelons θ l'angle de la normale au point A

avec la normale à l'origine, nous aurons

$$\cos \theta = \frac{\xi'(\xi' + s\nu') + \tau'_i(\tau'_i - su')}{\sqrt{\xi'^2 + \tau_i'^2} \sqrt{(\xi' + s\nu')^2 + (\tau'_i - su')^2}} = \frac{\sqrt{\xi'^2 + \tau_i'^2}}{\sqrt{\xi'^2 + \tau_i'^2 + s^2(u'^2 + \nu'^2)}}.$$

et par suite

$$\tan \theta = s \frac{\sqrt{u'^2 + \nu'^2}}{\sqrt{\xi'^2 + \tau_i'^2}} = \frac{s}{k},$$

comme cela doit être.

Cherchons enfin le paramètre de distribution des plans tangents le long de la génératrice ($u_N \dots$) du paraboloïde des normales.

Si nous désignons par des accents les dérivées prises par rapport à s , nous aurons

$$\begin{aligned} v_N &= \xi' + s\nu', & v_N &= \tau'_i - su', & w_N &= 0, \\ \xi_N &= s^2 u' - s\tau'_i, & \tau_N &= s\xi' + s^2 \nu', & \xi_N &= 0, \\ u'_N &= \nu', & \tau'_N &= -u', & w'_N &= 0, \\ \xi'_N &= 2su' - \tau'_i, & \tau'_N &= \xi' + 2s\nu', & \xi'_N &= 0, \end{aligned}$$

$$\Sigma u_N \xi'_N = \xi'^2 + \tau_i'^2 + s^2(u'^2 + \nu'^2),$$

$$\Sigma u'_N \xi'_N = (u'\xi' + \nu'\tau'_i),$$

$$p^2 = (u'\xi' + \nu'\tau'_i)^2,$$

et par suite

$$k_1 = \frac{\xi'^2 + \tau_i'^2 + s^2(u'^2 + \nu'^2)}{u'\xi' + \nu'\tau'_i} = \frac{\xi'^2 + \tau_i'^2}{\cos^2 \theta (u'\xi' + \nu'\tau'_i)} = \frac{k}{\cos^2 \theta},$$

expression bien connue.

11. Hyperboloïde osculateur. — Nous avons trouvé au § 5 pour les coordonnées d'un hyperboloïde déterminé par trois de ses génératrices ($u_1 \dots$), ($u_2 \dots$), ($u_3 \dots$) des expressions de la forme

$$u = \frac{A u_1}{(T_1 - T_2)(T - T_1)} + \frac{B u_2}{(T_3 - T_1)(T - T_2)} + \frac{C u_3}{(T_1 - T_2)(T - T_3)}, \dots$$

Si nous supposons que les trois droites données soient trois génératrices infiniment voisines de la surface gauche C_n , nous obtiendrons l'hyperboloïde osculateur de cette surface.

Posons donc

$$T_1 = t - \delta t, \quad T_2 = t, \quad T_3 = t + \delta t.$$

On aura

$$\begin{aligned} u_1 &= u - u' \delta t + u'' \frac{\delta t^2}{2}, & \dots, \\ u_2 &= u, & \dots, \\ u_3 &= u + u' \delta t + u'' \frac{\delta t^2}{2}, & \dots \end{aligned}$$

Si d'ailleurs on tient compte de l'équation $\Sigma u \xi = 0$ et de celles qu'on en déduit par des dérivations successives, on trouve, par des calculs faciles,

$$\begin{aligned} A &= -\delta t^2 \Sigma u' \xi' - \frac{\delta t^3}{2} \Sigma (u' \xi'' + u'' \xi') - \frac{\delta t^4}{12} [2 \Sigma (u' \xi''' + u'' \xi'') + 3 \Sigma u'' \xi''] + \dots \\ B &= -4 \delta t^2 \Sigma u' \xi' - 2 \frac{\delta t^3}{3} \Sigma (u' \xi'' + u'' \xi') + \dots \\ C &= -\delta t^2 \Sigma u' \xi' - \frac{\delta t^3}{2} \Sigma (u' \xi'' + u'' \xi') - \frac{\delta t^4}{12} [2 \Sigma (u' \xi''' + u'' \xi'') + 3 \Sigma u'' \xi''] + \dots \end{aligned}$$

et l'on obtient, pour les coordonnées de l'hyperboloïde osculateur des expressions de la forme

$$u_h = \lambda u + 2\mu(T - t)u' + 2\nu(T - t)^2 u'', \quad \dots,$$

λ , μ et ν ayant les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda &= 4 \Sigma u' \xi' - 2(T - t) \Sigma (u' \xi'' + u'' \xi') + (T - t)^2 \Sigma u'' \xi'', \\ \mu &= 2 \Sigma u' \xi' - (T - t) \Sigma (u' \xi'' + u'' \xi'), \\ \nu &= \Sigma u' \xi'. \end{aligned}$$

Si α , β et γ sont les coordonnées du centre de l'hyperboloïde osculateur, on trouve

$$(31) \quad \alpha = \frac{u \Sigma (u'' \xi' - u' \xi'') + u' \Sigma (u \xi'' - u'' \xi) + u'' \Sigma (u' \xi - u \xi')}{S}, \quad \dots,$$

en désignant par S le déterminant

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}.$$

Le dénominateur et les numérateurs des expressions (31) sont d'ordre $3(n - 2)$. Donc le lieu des centres des hyperboloïdes osculateurs d'une surface gauche rationnelle d'ordre n est une courbe gauche unicursale d'ordre $3(n - 2)$.

Les génératrices de la surface gauche pour lesquelles l'hyperboloïde osculateur se transforme en paraboloides sont données par

l'équation

$$S = 0;$$

elles sont donc au nombre de $3(n-2)$. Si cette équation est satisfaite identiquement, la surface est à plan directeur.

12. Surfaces développables. — Nous avons vu que la surface réglée est développable si l'on a, pour toute valeur de t ,

$$(32) \quad \Sigma u' \xi' = 0.$$

Il est facile de voir, d'après cela, qu'il n'y a pas de surface développable non conique de degré inférieur à 4.

Si l'on prend, en effet, les dérivées successives de l'équation

$$\Sigma u \xi = 0,$$

il vient

$$\begin{aligned} \Sigma(u' \xi + u \xi') &= 0, \\ \Sigma(u \xi'' + u'' \xi + 2u' \xi') &= 0, \\ \Sigma(u \xi''' + u''' \xi + 3u' \xi'' + 3u'' \xi') &= 0. \end{aligned}$$

Mais si l'on prend la dérivée par rapport à t de l'équation (32), il vient

$$\Sigma(u' \xi'' + u'' \xi') = 0.$$

On a dès lors

$$(33) \quad \begin{cases} \Sigma u \xi = 0, \\ \Sigma(u \xi' + u' \xi) = 0, \\ \Sigma(u \xi'' + u'' \xi) = 0, \\ \Sigma(u \xi''' + u''' \xi) = 0. \end{cases}$$

Ceci posé, soient $(u_s \dots)$, $(u_t \dots)$ deux génératrices d'une surface réglée; la condition pour qu'elles se rencontrent est

$$(34) \quad \Sigma(u_s \xi_t + u_t \xi_s) = 0.$$

Or le premier membre de cette équation et ses trois premières dérivées s'annulent pour $t = s$, en vertu des équations (33). Donc, si $u \dots$ sont d'ordre inférieur à 4, l'équation (4) est satisfaite identiquement, ce qui montre que deux génératrices quelconques de la surface réglée se rencontrent : cette surface est donc un plan ou un cône.

12. Soient maintenant $(u \dots)$ les coordonnées d'une génératrice quelconque d'une surface développable C_n .

Le point de l'arête de rebroussement situé sur cette génératrice a pour coordonnées (27)

$$(35) \quad x = \frac{\tau_1 \zeta' - \tau_1' \zeta}{\Sigma u' \xi}, \quad \dots$$

Le plan tangent le long de cette génératrice a de même pour équation

$$(36) \quad (vw' - v'w)x + (wu' - w'u)y + (uv' - u'v)z = \Sigma u' \xi.$$

Il est facile de voir que les numérateurs et le dénominateur des expressions (35) ont un facteur commun, et qu'il en est de même des deux membres de l'équation (36).

Considérons, en effet, les valeurs de t pour lesquelles on a $\Sigma u' \xi = 0$, sans qu'on ait en même temps

$$(37) \quad u : v : w = u' : v' : w'.$$

Des équations

$$\Sigma u \xi = 0, \quad \Sigma u' \xi = 0$$

on tire

$$\xi : \tau_1 : \zeta = (vw' - v'w) : (wu' - w'u) : (uv' - u'v).$$

Des équations

$$\Sigma \xi' u = 0, \quad \Sigma \xi' u' = 0$$

on tire de même

$$\xi : \gamma' : \zeta' = (vw' - v'w) : (wu' - w'u) : (uv' - u'v) = \xi : \tau_1 : \zeta.$$

Donc les valeurs de t considérées annulent les numérateurs des expressions (35).

On verrait de même que les valeurs de t qui annulent $\Sigma u' \xi$, sans qu'on ait en même temps

$$(38) \quad \xi : \tau_1 : \zeta = \xi' : \tau_1' : \zeta',$$

annulent le premier membre de l'équation (36).

Or les valeurs de t pour lesquelles les équations (37) sont satisfaites correspondent aux points de l'arête de rebroussement situés à l'infini. De même les valeurs de t qui satisfont aux équations (38) correspondent aux plans tangents de la surface C_n qui passent par l'origine. Si donc nous appelons m l'ordre de l'arête de rebroussement et c la classe de la surface développable, les numérateurs et les dénominateurs des expressions (35) ont un facteur commun d'ordre c , et les deux termes de l'équation (36) un facteur com-

mun d'ordre m . D'ailleurs $\Sigma u' \xi$ est d'ordre $2(n-1)$; donc on a

$$(39) \quad c + m = 2(n-1).$$

Soit maintenant r le nombre des points stationnaires de l'arête de rebroussement et s le nombre de ses plans stationnaires.

On obtiendra le nombre des points stationnaires en exprimant que trois génératrices infiniment voisines de la surface passent par un même point, ce qui donne

$$(40) \quad (\xi, \tau', \zeta'') = 0.$$

On obtiendra les plans osculateurs stationnaires en exprimant que trois génératrices infiniment voisines de la surface sont situées dans un même plan, sans passer par le même point, ce qui donne

$$(41) \quad (u, v', w'') = 0.$$

Les équations (40) et (41) sont d'ordre $3(n-2)$ en t ; mais des solutions de l'équation (40) il faut retrancher celles des équations (38), qui sont évidemment étrangères.

De même, des solutions de l'équation (41), il faut retrancher celles de l'équation (37).

D'ailleurs ces solutions étrangères sont racines doubles des équations (40) et (41), car elles annulent les dérivées des premiers membres de ces équations. On a donc enfin

$$(42) \quad \begin{cases} r = 3(n-2) - 2c; \\ s = 3(n-2) - 2m. \end{cases}$$

Des équations (39) et (42) on déduit facilement

$$\begin{aligned} r &= 2m - n - 2, \\ s &= 2c - n - 2, \end{aligned}$$

et comme ces nombres r et s ne peuvent être négatifs, on a nécessairement

$$m \geq \frac{n+2}{2}, \quad c \geq \frac{n+2}{2}.$$

13. Les résultats qui précèdent nous permettent d'établir très simplement la classification bien connue des surfaces développables rationnelles, qui comprennent, ainsi que l'a démontré M. Schwarz, toutes celles des sept premiers ordres.

Développable du quatrième ordre : $n = 4$. On a

$$m + c = 6,$$

et les inégalités du § 12 démontrent qu'on doit prendre

$$m = 3, \quad c = 3,$$

d'où

$$r = s = 0.$$

Ainsi la développable du quatrième ordre est de la troisième classe et son arête de rebroussement est une cubique gauche qui n'a ni point de rebroussement, ni plan stationnaire.

Développable du cinquième ordre : $n = 5$. On a

$$m + c = 8,$$

et les inégalités

$$m \geq \frac{7}{2}, \quad c \geq \frac{7}{2}$$

obligent à prendre

$$m = c = 4,$$

d'où

$$r = s = 1.$$

La développable du cinquième ordre est donc de la quatrième classe et elle a pour arête de rebroussement une quartique gauche ayant un point de rebroussement et un plan stationnaire.

Développable du sixième ordre : $n = 6$. On a

$$m + c = 10, \quad m \geq 4, \quad c \geq 4.$$

Il y a trois cas à considérer :

$$1^{\circ} \quad m = 4, \quad c = 6,$$

d'où

$$r = 0, \quad s = 4.$$

La développable est de la sixième classe et elle est osculatrice à une quartique gauche unicursale ayant quatre plans stationnaires et pas de point de rebroussement.

$$2^{\circ} \quad m = 5, \quad c = 5,$$

d'où

$$r = s = 2.$$

La développable est de la cinquième classe et elle a pour arête

de rebroussement une quintique ayant deux points de rebroussement et deux plans stationnaires.

$$3^{\circ} \quad m = 6, \quad c = 4,$$

d'où

$$r = 4, \quad s = 0.$$

Ce cas est réciproque du premier; la développable est de la quatrième classe et elle a pour arête de rebroussement une sextique gauche ayant quatre points de rebroussement et pas de plan stationnaire.

Développables du septième ordre : $n = 7$. On a

$$m + c = 12,$$

$$m \geq \frac{9}{2}, \quad c \geq \frac{9}{2}.$$

On obtient trois surfaces distinctes :

$$1^{\circ} \quad m = 5, \quad c = 7,$$

d'où

$$r = 1, \quad s = 5.$$

La développable est de la septième classe et elle est osculatrice à une quintique gauche ayant un point de rebroussement et cinq plans stationnaires.

$$2^{\circ} \quad m = 6, \quad c = 6,$$

d'où

$$r = s = 3.$$

La développable est de la sixième classe; son arête de rebroussement est une sextique gauche ayant trois points de rebroussement et trois plans stationnaires.

$$3^{\circ} \quad m = 7, \quad c = 5,$$

d'où

$$r = 5, \quad s = 1.$$

Ce cas est corrélatif du premier.

La développable est de la cinquième classe; son arête de rebroussement est une courbe du septième ordre ayant cinq points de rebroussement et un seul plan stationnaire.

14. Nous ne pousserons pas plus loin cette énumération et nous nous bornerons à montrer comment les résultats qui précèdent permettent encore de déterminer un maximum pour le nombre des points de rebroussement d'une courbe gauche unicursale.

On a

$$r = 2m - n - 2,$$

d'où

$$n = 2m - 2 - r, \quad c = 2(n - 1) - m = 3m - 6 - 2r.$$

Or on a

$$c \geq \frac{n + 2}{2},$$

ou, en remplaçant c et n par leurs valeurs,

$$6m - 12 - 4r \geq 2m - r,$$

d'où

$$r \leq \frac{4m - 12}{3}.$$

On obtient donc une valeur maximum de r en prenant le plus grand entier contenu dans $\frac{4m - 12}{3}$. Ainsi une cubique gauche n'a pas de point de rebroussement, une quartique gauche en a un au plus, une quintique gauche deux au plus, etc.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 MAI 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. Lucien Lévy : *Sur le déplacement d'une figure de forme invariable.*

M. Félix Lucas fait la Communication suivante :

Sur les fonctions d'une variable imaginaire.

Soit $f(z)$ une fonction de la variable $z = x + yi$ et posons

$$(1) \quad f(z) = e^{v+ui};$$

V sera le logarithme népérien du module de $f(z)$ et U l'argument de cette fonction.

On a identiquement

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

d'où

$$(3) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$(4) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2.$$

On a aussi

$$(5) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0;$$

d'où

$$(6) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Par chaque point (x, y) du plan passe une *courbe équimodulaire* $V = \text{const.}$, à laquelle est normal le *vecteur modulaire*

$$\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2},$$

dont les deux projections sont $-V'_x$ et $-V'_y$.

Pareillement, on peut faire passer par le point (x, y) une *courbe équiargumentaire* $U = \text{const.}$, à laquelle est normal le *vecteur argumentaire*

$$\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2},$$

dont les deux projections sont $-U'_x$ et $-U'_y$.

Les équations (3) et (4) montrent que le *vecteur modulaire* et le *vecteur argumentaire* pour un même point du plan sont égaux et perpendiculaires entre eux. Si l'on fait tourner le second d'un angle égal à $\frac{\pi}{2}$ dans le sens du mouvement des aiguilles de la montre, il se superpose au premier.

Les équations (4) et (6) montrent que, si l'une des fonctions V et U est une fonction de point, il en est de même de la seconde. Supposons que cette condition soit remplie, nous pourrons regarder ces deux fonctions comme des *potentiels* et énoncer le théorème suivant :

Les courbes équiargumentaires sont les lignes de force correspondant aux courbes équimodulaires considérées comme courbes de niveau. Et, réciproquement, les courbes équimodulaires sont les lignes de force correspondant aux courbes équiargumentaires considérées comme courbes de niveau.

D'après les équations (3), la force modulaire et la force argumentaire s'annulent simultanément. Appelons points neutres du plan les points sur lesquels ces forces s'annulent; ce sont aussi les points en lesquels les courbes de niveau et les lignes de force présentent des points nodaux.

On a identiquement

$$(7) \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\partial V}{\partial x} - i \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + i \frac{\partial U}{\partial x};$$

par conséquent, les points neutres du plan sont les points racines de l'équation qu'on obtient en égalant à zéro la dérivée logarithmique de la fonction $\rho(z)$.

Posons

$$(8) \quad \begin{cases} V_1 = \log \text{ nép. } \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} \\ U_1 = \text{arc tang } \frac{U'_x}{U'_y}; \end{cases}$$

nous aurons

$$(9) \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = e^{V_1 + U_1 i}.$$

Les courbes représentées par l'équation $V_1 = \text{const.}$ sont les *lignes isovectorielles* de la fonction $f(z)$; sur chacune d'elles, la longueur du vecteur est constante en chaque point.

Les courbes représentées par l'équation $U_1 = \text{const.}$ sont les *lignes isocliniques* de la fonction $f(z)$; sur chacune d'elles le vecteur reste en chaque point parallèle à une droite fixe.

Les formules (3), (4) et (6), établies entre les dérivées partielles de U et de V , existent aussi entre les dérivées partielles de U_1 et de V_1 . Il en résulte notamment que *les lignes isovectorielles et les lignes isocliniques forment deux systèmes orthogonaux.*

Examinons le cas où la fonction $f(z)$ peut s'exprimer par un produit de facteurs binômes de la forme $(z - \zeta)^\mu$, en désignant par $\zeta = \xi + \tau i$ la coordonnée affixe d'un point déterminé du plan,

et par μ un exposant réel (positif ou négatif, commensurable ou incommensurable). Nous aurons alors

$$(10) \quad f(z) = \Pi(z - \zeta)^\mu.$$

Posons

$$(11) \quad z - \zeta = re^{ui};$$

nous aurons

$$(12) \quad \begin{cases} V = \log \text{ nép. } \Pi r^\mu = \Sigma \mu \log \text{ nép. } r, \\ U = \Sigma \mu ui, \\ \frac{f'(z)}{f(z)} = \Sigma \frac{\mu}{z - \zeta}. \end{cases}$$

La fonction $f(z)$ admet pour zéros les points ζ auxquels correspondent des exposants μ positifs et pour infinis les points ζ auxquels correspondent des exposants μ négatifs.

La fonction V est évidemment un *potentiel* et, par conséquent, la fonction U en est un autre.

1° Assimilons les zéros ζ à des centres d'action attirant le point z , proportionnellement à leur masse et en raison inverse de la distance, et les infinis ζ à des centres d'action repoussant le point z suivant la même loi. Le vecteur modulaire représentera en grandeur et en direction l'action totale exercée sur le point z .

2° Assimilons les zéros ζ à des sources d'électricité positive, débitant par seconde, sur la surface du plan supposée conductrice, les quantités μ , et les infinis ζ à des sources analogues d'électricité négative. Le vecteur modulaire sera parallèle et proportionnel au flux d'électricité passant au point z .

3° Supposant le plan non conducteur, assimilons les zéros ζ aux points de passage de courants électriques indéfinis, d'intensités μ , tous de même direction et normaux au plan, et les infinis ζ aux points de passage de courants analogues, mais dirigés en sens contraire. Le vecteur argumentaire sera parallèle et proportionnel à la force magnétique au point z .

Dans chacune de ces hypothèses, les *points neutres* du plan sont les points racines du numérateur de la somme des fractions simples $\frac{\mu}{z - \zeta}$; ils sont en nombre inférieur d'une unité à celui des points ζ , qui peut d'ailleurs devenir infini.

M. APPELL transmet la Note suivante :

Remarque sur les courbes brachistochrones.

On sait que, parmi les courbes joignant deux points fixes A et B, celles qui rendent minimum une intégrale de la forme

$$I = \int_{(A)}^{(B)} \varphi(x, y, z) ds$$

vérifient les équations différentielles

$$(1) \quad \begin{cases} d\left(\varphi \frac{dx}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds = 0, \\ d\left(\varphi \frac{dy}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} ds = 0, \\ d\left(\varphi \frac{dz}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial z} ds = 0, \end{cases}$$

qui se réduisent à deux. Appelons *courbes C* les courbes obtenues en intégrant ces équations, courbes qui dépendent de quatre constantes arbitraires et qui se réduisent à des droites quand $\varphi = 1$. Ces courbes C sont les trajectoires d'un point libre sollicité par une force dérivant de la fonction des forces

$$U = [\varphi(x, y, z)]^2,$$

ou les courbes brachistochrones, pour une loi de force dérivant de la fonction des forces

$$U' = \left[\frac{1}{\varphi(x, y, z)} \right]^2,$$

la constante des forces vives étant *nulle* dans les deux cas. Elles ont été l'objet de nombreuses recherches qui se trouvent résumées à la fin du deuxième volume des *Leçons de Géométrie* de M. Darboux, recherches qui montrent qu'on peut étendre aux courbes C les propriétés des lignes droites, ou, plus généralement, des lignes géodésiques ⁽¹⁾.

Le point de départ de cette extension réside dans ce théorème de MM. Tait et Thomson :

Soient deux courbes C infiniment voisines, C et C₁, ayant pour extrémités A et B, A₁ et B₁; la variation de l'intégrale I,

⁽¹⁾ Voyez aussi les Notes de M. Andoyer, *Comptes rendus*, 1885, t. CII; de M. O. Bonnet, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1887; de M. Vicaire, *Comptes rendus*, 1888, t. CVI, et la quatorzième Leçon de mon *Cours de Mécanique*, rédigé par MM. Abraham et Delassus.

quand on passe de C à C₁, est

$$- \overline{AA_1} \varphi(A) \cos \widehat{BA A_1} - \overline{BB_1} \varphi(B) \cos \widehat{AB B_1},$$

$\varphi(A)$ et $\varphi(B)$ désignant les valeurs de $\varphi(x, y, z)$ aux extrémités A et B.

Les conséquences de ce théorème sont identiques à celles qu'on déduit du théorème analogue sur la ligne droite ($\varphi = 1$), relativement à la théorie des *surfaces parallèles* (théorème de Tait et Thomson), des *développées*, des *lignes de courbure*, etc., à condition de remplacer partout les longueurs des arcs de courbes par les valeurs correspondantes de l'intégrale I.

Nous voulons attirer surtout l'attention sur ce fait, qui ne paraît pas avoir été remarqué, que, si l'on interprète ces théorèmes à l'aide des *courbes brachistochrones*, on est conduit à des énoncés aussi simples que pour la théorie des *développées*, des *lignes de courbure*, etc., en remplaçant partout les arcs de courbes par le temps que met le mobile à les parcourir sans frottement, la constante des forces vives étant nulle.

Nous ne nous arrêtons pas ici à développer cette théorie, ni à examiner des cas particuliers, qui cependant conduisent à quelques exercices dignes d'intérêt sur les courbes brachistochrones.

M. GUIMARAES adresse la Note suivante :

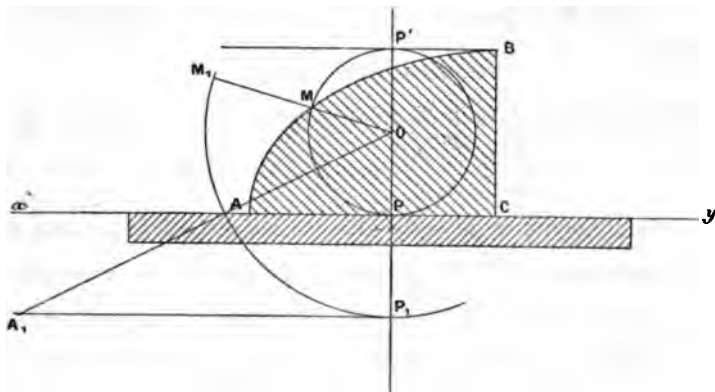
*Sur une équerre cycloïdale propre à effectuer
la rectification des arcs de cercle.*

Soit AMB un arc de cycloïde. Si PMP' est une position de son cercle générateur, on sait que arc PM = PA. Supposons donc qu'on ait taillé dans une matière quelconque l'équerre ACB donnant par son côté AB le gabarit de la cycloïde. Une règle étant posée le long de la tangente xy menée au cercle O par le point P, il n'y aura qu'à faire glisser le bord AC de l'équerre le long de cette règle jusqu'à ce que le bord curviligne AB passe au point M pour avoir AP = arc MP.

Si l'arc à rectifier M₁P₁ a un rayon différent de OP, il suffit de tracer l'arc concentrique MP de même ouverture et, après l'avoir rectifié en PA, de prendre le point de rencontre A₁ de OA et de la tangente en P₁ à l'arc primitif.

L'équerre cycloïdale ABC permet donc de ramener les divers

problèmes qu'on peut se proposer sur l'évaluation des longueurs et la division des arcs aux mêmes problèmes effectués sur des seg-



ments de droites. L'opération matérielle à exécuter n'est pas plus compliquée que celle qu'exige le tracé des parallèles avec l'équerre ordinaire.

En particulier, l'inscription des polygones réguliers dans le cercle est très simple par ce moyen.

Le problème de la division des angles, se ramenant à celui de la division des arcs, reçoit en même temps une solution.

SÉANCE DU 20 MAI 1894.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Démission : M. Bapst adresse sa démission de membre de la Société.

Communications :

M. Bioche : *Sur les systèmes de courbes transformées homographiques les unes des autres.*

M. Godefroy adresse par l'intermédiaire de M. Fouret une Note *Sur une relation entre les rayons de courbure des développées des courbes réciproques.*

M. Fouret : *Sur un problème d'assurances.*

M. FÉLIX LUCAS fait la Communication suivante :

Sur les fonctions d'une variable imaginaire.

Je mets, comme dans ma précédente Communication, la fonction

sous la forme

$$(1) \quad f(z) = e^{V+Ui}.$$

Si le point M, représenté par z , parcourt un élément de trajectoire

$$dz = dx + i dy,$$

le travail correspondant de la *force argumentaire* $-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}$ est

$$(2) \quad -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy = \frac{\partial V}{\partial y} dx - \frac{\partial V}{\partial x} dy.$$

Le second membre de cette identité représente le produit de la *force modulaire* $-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}$, par la projection de dz sur la direction obtenue en faisant tourner cette force d'un angle droit en sens contraire du mouvement des aiguilles de la montre; c'est, par conséquent, le *flux de force modulaire* correspondant au parcours dz ; de là ce théorème : *Lorsque z décrit une trajectoire quelconque, le flux de force modulaire est égal au travail argumentaire.*

Considérons le cas où

$$(3) \quad f(z) = \Pi(z - \zeta)^\mu,$$

ζ coordonnée d'un point fixe C du plan, μ exposant réel quelconque (positif ou négatif, commensurable ou non). Posons

$$(4) \quad z - \zeta = re^{ui}:$$

nous aurons

$$(5) \quad f(z) = e^{\Sigma \mu \log \text{nép. } r + ui}$$

et, par conséquent,

$$(6) \quad V = \Sigma \mu \log \text{nép. } r.$$

Les projections de la force argumentaire sont donc

$$(7) \quad \begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\mu}{r} \frac{\partial r}{\partial (x - \xi)} \\ -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\mu}{r} \frac{\partial r}{\partial (y - \eta)}; \end{cases}$$

ce sont les projections d'une force centrale exercée sur M par le point C, supposé doué de la masse μ , en raison inverse de la distance MC, cette force étant attractive ou répulsive, suivant que μ est positif ou négatif, ou, en d'autres termes, suivant que μ est un zéro ou un infini de $f(z)$.

Faisons décrire à M un contour fermé *simple*, c'est-à-dire n'ayant

aucun point nodal; un raisonnement analogue à celui par lequel on démontre le théorème de Green relatif aux flux de force dans l'espace nous conduit au théorème suivant : *Le flux de force modulaire relatif à un contour fermé simple, parcouru en sens contraire du mouvement des aiguilles de la montre, est égal et de signe contraire au produit de 2π par la somme algébrique des exposants μ des zéros et des infinis de $f(z)$ qui sont situés dans l'intérieur de ce contour.*

Les flux de force élémentaires sont évalués comme *positifs* ou comme *négatifs* suivant qu'ils sont *sortants* ou *entrants*.

Examinons le cas particulier où $f(z)$ est un polynôme entier du degré p ,

$$(8) \quad f(z) = z^p + A_1 z^{p-1} + \dots + A_{p-1} z + A_p,$$

qui ne peut pas avoir d'infinis à distance finie. Pour un point z pris à une distance infiniment grande r de l'origine, ce polynôme tend vers z^p , en sorte que V tend vers $-p \log n^{\text{ép.}} r$. La force modulaire correspondante est une attraction émanant de l'origine des coordonnées supposée douée de la masse p ; le flux de force correspondant au parcours d'une circonférence de rayon r ayant son centre à l'origine des coordonnées est $-2\pi p$; par conséquent : *La somme des exposants des zéros d'un polynôme de degré p est égale au degré p de ce polynôme.*

Ce polynôme a donc, soit un zéro multiple du degré p , soit plusieurs zéros distincts; comme l'existence d'un zéro ζ entraîne la divisibilité du polynôme par $(z - \zeta)$, les exposants des zéros sont nécessairement tous entiers; de là cette conséquence :

THÉORÈME DE CAUCHY. — *Une équation algébrique du degré p a toujours un système de racines, réelles ou imaginaires, dont les degrés de multiplicité donnent une somme égale au degré p .*

Le théorème relatif au flux de force modulaire pour un contour fermé simple peut aussi s'énoncer sous la forme suivante : *Le parcours d'un contour fermé simple en sens contraire du mouvement des aiguilles de la montre fait subir à l'argument de la fonction $f(z)$ un accroissement égal au produit de 2π par la somme algébrique des exposants des zéros et des infinis contenus dans l'intérieur de ce contour.*

On a, en effet,

$$\int dU = \int \frac{\partial U}{\partial x} dx + \int \frac{\partial U}{\partial y} dy = - \int \left(\frac{\partial V}{\partial y} dx - \frac{\partial V}{\partial x} dy \right) = 2\pi m,$$

m désignant la somme algébrique des exposants μ des zéros et des infinis renfermés dans le contour.

M. APPELL adresse la Note suivante :

Sur le mouvement d'un point en coordonnées elliptiques.

Soient x, y, z les coordonnées cartésiennes d'un point, et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les coordonnées elliptiques racines de l'équation

$$\frac{x^2}{a_1 + \lambda} + \frac{y^2}{a_2 + \lambda} + \frac{z^2}{a_3 + \lambda} - 1 = 0.$$

Les équations du mouvement d'un point libre en coordonnées elliptiques ont été ramenées à des quadratures par Jacobi (*Vorlesungen über Dynamik*) dans le cas où le point n'est sollicité par aucune force, ou est attiré par l'origine proportionnellement à la distance. La méthode de Jacobi conduit encore à des quadratures, comme il est connu, quand le point est en outre attiré par chacun des plans coordonnés en raison inverse du cube de la distance.

On peut ramener aux quadratures le cas plus général où le point serait sollicité par une force dérivant d'une fonction des forces de la forme

$$(1) \quad U = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & U_1 \\ 1 & \lambda_2 & U_2 \\ 1 & \lambda_3 & U_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}},$$

U_1 étant fonction de la seule variable λ_1 , U_2 de λ_2 , U_3 de λ_3 . Il suffit d'ajouter U_1, U_2, U_3 aux expressions qui figurent sous les radicaux dans la trentième leçon de Jacobi. En particulier, si l'on suppose

$$U_1 = R(\lambda_1), \quad U_2 = R(\lambda_2), \quad U_3 = R(\lambda_3),$$

$R(\lambda)$ étant une fonction rationnelle de λ , la fonction U sera *rationnelle et symétrique* en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; ce sera donc une fonction

rationnelle de x^2, y^2, z^2 facile à calculer. Ainsi $R(\lambda) = \frac{k}{\lambda}$ donne

$$U = \frac{h}{\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} + \frac{z^2}{a_3} - 1}.$$

Cette remarque s'étend évidemment sous la même forme au cas de n variables traité par Jacobi.

Il serait intéressant d'obtenir les fonctions de forces U de la forme (1) vérifiant l'équation du potentiel

$$(2) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

On aurait ainsi de nouveaux problèmes de mouvement d'un point attiré suivant la loi de Newton pouvant se ramener aux quadratures. La détermination des potentiels U de la forme (1) se fera à l'aide de la transformation bien connue de l'équation (2) en coordonnées elliptiques. Nous nous bornons à indiquer ce dernier point comme un exercice de calcul.

M. D'OCAGNE fait la Communication suivante :

Sur la construction des cubiques cuspidales (unicursales de la troisième classe).

On sait (SALMON, *Courbes planes*, traduction Chemin, p. 257) que l'équation de toute cubique cuspidale peut se mettre sous la forme

$$X_1 X_2^2 = \lambda X_3^3,$$

$X_1 = 0$ étant la tangente IT au point d'inflexion I,
 $X_2 = 0$ la tangente RT au point de rebroussement R,
 $X_3 = 0$ la droite IR joignant ces deux points.

Dès lors, si l'on donne les points d'inflexion et de rebroussement et les tangentes en ces points, c'est-à-dire les trois côtés du triangle IRT, il suffira d'une condition supplémentaire, par exemple de la connaissance d'un point simple P, pour déterminer complètement la courbe.

La courbe étant ainsi définie, la tangente au point P doit se déduire des données. Nous avons, en effet, trouvé que, *si cette tangente coupe la droite IT au point S et que la droite PR coupe IT au point U, on a* $(IUTS) = -\frac{1}{2}$. On peut encore dire

que, si la parallèle menée à PI par T coupe PU en U' et PS en S', on a $S'U' = -\frac{TU'}{2}$.

Si la droite PR est parallèle à IT, le point U est rejeté à l'infini et l'on a ce théorème : *Si la parallèle à la tangente d'inflexion menée par le point de rebroussement coupe la cubique au point P₁, la tangente en P₁ coupe la tangente d'inflexion en un point S₁ tel que S₁I = - 2TI.*

Si la tangente PS est parallèle à IT, c'est le point S qui est rejeté à l'infini, et l'on a cet autre théorème : *La droite qui joint le point de rebroussement au point P₂, où la tangente est parallèle à la tangente d'inflexion, coupe celle-ci en un point U₂ tel que TU₂ = - 2TI.*

On voit que les points S₁ et U₂, qui viennent d'être définis, sont symétriques par rapport au milieu de TI.

La cubique cuspidale étant complètement déterminée par le triangle IRT et le point P, voici comment s'obtiendront les divers points de cette cubique au moyen de ces données :

RQ étant la conjuguée harmonique, tracée une fois pour toutes, de RP par rapport à RT et RI, menons par le point T une droite quelconque qui coupe RP en A, RQ en B, IP en C, et prenons le conjugué harmonique D de C par rapport à A et B. Le point de rencontre M des droites RC et ID engendre la cubique lorsque la droite TA pivote autour du point T.

La tangente en M sera déterminée de la même façon que l'a été précédemment la tangente en P.

Si, en outre du triangle RIT, on se donnait, comme condition supplémentaire, une tangente au lieu d'un point, on n'aurait qu'à déterminer, au moyen du premier des théorèmes susénoncés, le point de contact de cette tangente pour être ramené au cas précédent.

Ce théorème prend d'ailleurs une forme particulière dans les deux cas suivants : 1° *Le point d'inflexion est à l'infini.* La relation (IUTS) = $-\frac{1}{2}$ devient alors $\frac{SU}{TU} = -\frac{1}{2}$, ou $US = \frac{TU}{2}$. 2° *Les tangentes au point d'inflexion et au point de rebroussement sont parallèles.* Le point T étant alors à l'infini, on a $\frac{SU}{SI} = -\frac{1}{2}$, ou $US = \frac{UI}{3}$.

SÉANCE DU 3 JUIN 1891.

PRÉSIDENTE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. LAISANT fait la Communication suivante :

Sur deux problèmes de permutations.

Dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 11 mai 1891), j'ai indiqué une solution générale du problème suivant :

Trouver le nombre des permutations sans répétitions que l'on peut former avec n objets différents $a, b, c, \dots, h, l$, chacune des n places ne pouvant être occupée que par certains de ces objets.

Si l'on appelle $a_k, b_k, c_k, \dots$ ceux des n objets qui peuvent seuls occuper la place de rang k , et si l'on forme le produit

$$(a_1 + b_1 + c_1 + \dots)(a_2 + b_2 + c_2 + \dots) \dots (a_n + b_n + c_n + \dots) \\ = F(a, b, c, \dots, l),$$

on trouve que le nombre cherché a pour expression

$$\frac{d^n F(a, b, c, \dots, l)}{da db dc \dots dl}.$$

Cette formule est, dans la plupart des cas, d'une application difficile, à cause de la longueur des calculs. Elle peut néanmoins être d'une certaine utilité en ce qu'elle permet de vérifier parfois numériquement des résultats obtenus par une voie différente.

J'en donnerai simplement ici deux exemples, en me bornant à indiquer sommairement les résultats.

PROBLÈME I. — *n groupes de deux personnes (mari et femme) devant s'asseoir autour d'une table, et les n femmes s'étant assises en laissant une place vide entre deux quelconques d'entre elles, de combien de manières leurs maris peuvent-ils occuper les places vides, sous la condition qu'un mari ne se trouve pas à côté de sa femme?*

On traduit facilement cette question par la suivante : *Sur un*

échiquier carré de n^2 cases, de combien de manières peut-on placer n tours qui ne soient pas en prise réciproque deux à deux, sous la condition que les cases 1, 2 dans la première colonne, 2, 3 dans la deuxième, ..., $(n-1)$, n dans la $(n-1)^{ième}$, et $n, 1$ dans la $n^{ième}$, restent inoccupées?

Cette nouvelle forme de la question m'a permis (¹), par des considérations simples, mais cependant assez délicates, d'arriver à la formule récurrente suivante, en appelant X_n le nombre cherché :

$$(1) \quad X_{n+1} = \frac{n^2 - n + 1}{n - 1} (X_n + X_{n-1}) + \frac{n}{n - 1} X_{n-2}.$$

On a aussi

$$(2) \quad X_{n+1} = (n + 1)X_n + 2X_{n-1} - (n - 3)X_{n-2} - X_{n-3}.$$

Enfin, la relation (1) permet d'obtenir la suivante, qui est due à M. le colonel Moreau, mais n'a pas encore été publiée,

$$(3) \quad (n - 1)X_{n+1} - (n^2 - 1)X_n - (n + 1)X_{n-1} = 4(-1)^n.$$

Le calcul numérique des valeurs X_n est encore facilité par cette remarque : si l'on pose $X_n = X'_n + 2(-1)^n$, puis $\frac{X'_n}{n} = T_n$, on obtient

$$(4) \quad T_{n+1} = nT_n + T_{n-1} + 2(-1)^n,$$

$$(5) \quad T_{n+1} = (n - 1)T_n + nT_{n-1} + T_{n-2}.$$

Les premières valeurs de X_n sont $X_3 = 1$, $X_4 = 2$, $X_5 = 13$; et celles de T_n : $T_4 = 0$, $T_5 = 3$, $T_6 = 13$, ce qui rend facile le calcul des valeurs successives.

La fonction F , dont il est question au début de la présente Note, est

$$F(a, b, c, \dots, h, l) = (s - a - b)(s - b - c) \dots (s - h - l)(s - l - a),$$

en posant

$$s = a + b + c + \dots + h + l.$$

L'application de la méthode indiquée plus haut a permis de vérifier les valeurs obtenues jusqu'à $n = 10$, et de s'assurer ainsi,

(¹) Les démonstrations détaillées figurent dans la *Théorie des nombres*, de M. Édouard Lucas. Paris, Gauthier-Villars et fils : 1891.

par voie indirecte, de l'exactitude des diverses formules récurrentes écrites plus haut.

PROBLÈME II. — *Sur un échiquier carré de n^2 cases, de combien de manières peut-on placer n tours qui ne soient pas en prise réciproque deux à deux, sous la condition que les cases des deux diagonales restent inoccupées?*

Ce problème, analogue au précédent, m'a conduit aux deux formules récurrentes que voici, en appelant Y_n le nombre cherché :

$$(6) \quad Y_{2n+1} = 2n Y_{2n} + \frac{1}{2} n Y_{2n-1},$$

$$(7) \quad Y_{2n+2} = (2n+1) Y_{2n+1} + \frac{1}{2} n Y_{2n-1}.$$

En posant

$$\frac{Y_{2n}}{2^n(n-1)} = Z_{2n} \quad \text{et} \quad \frac{Y_{2n+1}}{2^{n+1}n(n-1)} = Z_{2n+1},$$

on obtient

$$(8) \quad Z_{2n+2} = Z_{2n} + 2(n-2)Z_{2n-1},$$

$$(9) \quad Z_{2n+2} = (2n+1)(n-1)Z_{2n+1} + (n-2)Z_{2n-1}.$$

Les premières valeurs sont

$$Y_2 = 0, \quad Y_3 = 0, \quad Y_4 = 4, \quad Y_5 = 16$$

et

$$Z_3 = 0, \quad Z_4 = 1, \quad Z_5 = 1, \quad Z_6 = 5.$$

La fonction F , en posant, comme tout à l'heure,

$$s = a + b + c + \dots + h + l,$$

est

$$F(a, b, c, \dots, h, l) = (s-a-l)(s-b-h) \dots (s-h-b)(s-l-a).$$

Il y a un facteur du milieu lorsque n est impair, et ce facteur est alors de la forme $s-j$; lorsque n est pair, on a

$$F = [(s-a-l)(s-b-h) \dots]^2.$$

Les valeurs fournies par l'application de la méthode indiquée ont permis, comme précédemment, de vérifier les résultats donnés par les formules de récurrence.

Voici, jusqu'à $n = 10$, les valeurs numériques obtenues pour X_n dans le premier problème et Y_n dans le second :

n	3	4	5	6	7	8	9	10
X_n	1	2	13	80	579	4738	43387	439792
Y_n	0	4	16	80	672	4752	48768	440192

M. RAFFY fait une Communication *Sur la détermination des surfaces spirales d'après leur élément linéaire*. Il montre que ce problème, déjà résolu par M. Maurice Lévy (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVII, p. 788) dépend de l'équation

$$y^2 + y'^2 = F(x),$$

qui peut être intégrée dans un certain nombre de cas, notamment quand la fonction F est une constante ou une exponentielle. Il rappelle qu'une équation de même forme détermine les géodésiques des surfaces spirales, et que ces lignes ont été trouvées par d'autres moyens pour plusieurs classes de spirales; il en déduit qu'on peut parfois obtenir au moins une infinité de spirales admettant un élément linéaire donné.

M. D'OCAGNE présente, au sujet de la Communication précédente, la remarque que voici :

L'équation différentielle

$$y^2 + y'^2 = F(x).$$

rencontrée par M. Raffy au cours de ses recherches sur les surfaces spirales, se présente encore (lorsqu'on y remplace respectivement x et y par les coordonnées polaires ω et ρ) dans un autre genre de recherche géométrique.

Je rappellerai d'abord que j'ai appelé *isométriques* d'une courbe C par rapport aux droites issues d'un point O , les courbes dont les arcs compris entre deux droites quelconques issues du point O sont égaux à l'arc de la courbe C compris entre les mêmes droites.

Cela posé, et l'origine étant placée au point O , on voit aisément que l'équation différentielle des isométriques cherchées est

$$\rho^2 + \rho'^2 = \varphi^2(\omega).$$



$\varphi(\omega)$ étant la dérivée $\frac{ds}{d\omega}$ de l'arc de la courbe C donnée par rapport à l'angle polaire.

Analytiquement, le problème est donc identique à celui qu'a envisagé M. Raffy au sujet des surfaces spirales.

Je l'ai résolu complètement dans le cas où la courbe C donnée est une droite (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XIII, p. 75, et t. XVII, p. 171). La fonction $\varphi(\omega)$ est alors inversement proportionnelle à $\cos^2 \omega$.

SÉANCE DU 17 JUIN 1891.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. de Mendizabal présente les épreuves d'un *Recueil de Tables logarithmiques et trigonométriques* qu'il va publier incessamment.

M. Lucien Lévy : *Sur les systèmes de surfaces triplement orthogonales.*

M. Beghin : *Sur certaines singularités que peuvent présenter les fonctions monodromes qui admettent des espaces lacunaires.*

M. d'Ocagne : *Sur la représentation graphique d'une classe d'équations à quatre variables.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Relation entre les rayons de courbure des développées des courbes réciproques; par M. R. GODEFROY.

Suivant M. Habich [*Sur un système particulier de coordonnées*, etc. (*Annali di Matematica*, t. II, 1868)], deux courbes (A), (B) sont dites *réciproques par rapport à une courbe (C)*, si elles coupent constamment sous des angles supplémentaires les tangentes de (C). Les centres de courbure de ces courbes en deux

points correspondants sont en ligne droite avec le point où la droite mobile touche son enveloppe. Ce théorème a été déduit par M. Habich de la formule

$$\frac{n}{r} + \frac{n'}{r'} = 2$$

(r, r' rayons de courbure des deux courbes; n, n' longueurs des normales limitées aux points où elles coupent la normale à l'enveloppe de la droite) dont il a donné la démonstration pour le cas plus général où la somme des angles de la droite avec les deux courbes est constante.

Cette formule avait été établie par M. Nicolaidès dans le cas particulier de courbes réciproques par rapport à un point (*Nouv. Ann.*, 2^e série, t. IV; 1865).

Voici d'abord une démonstration directe fort simple, et sans doute connue, de la propriété des centres de courbure de deux courbes réciproques. Les triangles formés par deux éléments d'arcs correspondants des courbes (A), (B) et par les normales à leurs extrémités sont homologues. La tangente au lieu du point de rencontre de deux normales correspondantes passe en effet au point de concours des tangentes correspondantes de (A) et (B). D'où il suit immédiatement que les centres de courbure en A et B et le point où AB touche son enveloppe sont en ligne droite.

Si R, R' sont les rayons de courbure et L, L' les distances des centres de courbure au point où AB touche son enveloppe, on peut dire que la liaison entre les rayons de courbure et le point de l'enveloppe est exprimée par la relation

$$(1) \quad \frac{R}{L} = \frac{R'}{L'}.$$

Nous nous servirons tout à l'heure du théorème qui vient d'être rappelé, pour démontrer la relation existant entre les rayons de courbure des développées des courbes réciproques et celui de la courbe enveloppe de la droite mobile.

Mais, auparavant, nous nous occuperons du problème suivant (1) :

Les tangentes en deux points L, L' des courbes (L), (L') se

(1) Le lecteur est prié de faire les figures.

coupent en A. La droite LL₁ enveloppant une courbe (M) qu'elle touche en M, le point A décrit une courbe (A) dont la normale est AP. Trouver la relation existant entre les rayons de courbure r, r₁ en L, L₁, les longueurs LM = l, L₁M = l₁ et les angles

$$ALM = \lambda, \quad AL_1M = \lambda_1, \quad LAP = \alpha, \quad L_1AP = \alpha_1.$$

Une formule bien connue, due à Newton, donne

$$(2) \quad \frac{l}{l_1} = \frac{dL}{dL_1} \frac{AL_1}{AL};$$

mais

$$dL = r \varepsilon, \quad dL_1 = r_1 \varepsilon_1,$$

$\varepsilon, \varepsilon_1$ étant les angles de contingence de (L) et (L₁) en L et L₁.

Par suite

$$\frac{dL}{dL_1} = \frac{r}{r_1} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}.$$

Le rapport $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$ est égal au rapport des segments de la normale AP compris entre A et les normales en L₁ et L. Or ces segments sont égaux à

$$\frac{AL_1}{\cos \alpha_1} \quad \text{et} \quad \frac{AL}{\cos \alpha};$$

on a donc

$$\frac{dL}{dL_1} = \frac{r AL_1 \cos \alpha}{r_1 AL \cos \alpha_1}.$$

La formule (2) devient alors

$$\frac{l}{l_1} = \frac{r \overline{AL_1}^2 \cos \alpha}{r \overline{AL}^2 \cos \alpha_1},$$

ou

$$\frac{l}{l_1} = \frac{r \sin^2 \lambda \cos \alpha}{r_1 \sin^2 \lambda_1 \cos \alpha_1},$$

que nous écrirons

$$\frac{r \sin^2 \lambda \cos \alpha}{l} = \frac{r_1 \sin^2 \lambda_1 \cos \alpha_1}{l_1}.$$

C'est la relation que nous avons en vue.

Tout ceci est, en somme, parfaitement connu (Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes planes*, Livre II, Chap. IV, p. 294).

Ce n'est, au surplus, que l'application au cas considéré du

théorème général de M. Mannheim sur le déplacement infiniment petit des figures polygonales de forme variable (*Sur les polygones plans inscrits et circonscrits*, à la suite des *Applications d'Analyse et de Géométrie* de Poncelet et *Géométrie descriptive*, 15^e Leçon, Supplément).

On remarquera, en passant, l'usage qui peut être fait de la relation précédente, dont nous n'utiliserons qu'un cas particulier pour l'objet qui nous occupe.

Si AL se confond avec la normale en A, r est le rayon de courbure de la développée de A. La formule devient

$$\frac{r \sin^2 \lambda}{l} = \frac{r_1 \sin^2 \lambda_1 \cos \alpha_1}{l_1}.$$

Si deux courbes (A) et (A') jouissent de cette propriété que leurs centres de courbure en deux points correspondants A et A' soient constamment sur une droite passant au point L₁, où la droite AA' touche son enveloppe, les rayons de courbure de leurs développées sont liés entre eux et avec les éléments déjà considérés par les formules

$$(3) \quad \frac{r \sin^2 \lambda}{l \cos \alpha_1} = \frac{r' \sin^2 \lambda'}{l' \cos \alpha'_1} = \frac{r_1 \sin^2 \lambda_1}{l_1}.$$

Ces formules sont applicables aux cas suivants :

1^o Une courbe B est telle que le rapport $\frac{BA}{BA'}$ des distances de chacun de ses points à deux courbes (A) et (A') est constant. Les centres de courbure de (A) et (A') en deux points correspondants A, A' sont alors en ligne droite avec le point où AA' touche son enveloppe. On le voit, comme précédemment, par la considération de deux triangles homologues. Les rayons de courbure des développées de (A), de (A') et de l'enveloppe de AA' satisfont, par suite, à la relation (3) (Application aux caustiques par réfraction, etc.) (1).

2^o *Courbes réciproques.* — La relation cherchée est simple-

(1) Le problème de la détermination des rayons de courbure des caustiques par réfraction a déjà été traité par M. Mannheim (*Développements de Géométrie cinématique*, pages 51 à 62 de la *Collection de Mémoires publiés par la Société Philomathique*, à l'occasion du centenaire de sa fondation, année 1888).

ment

$$\frac{r \sin^2 \lambda}{l} = \frac{r' \sin^2 \lambda'}{l'} = \frac{r_1 \sin^2 \lambda_1 \cos \alpha_1}{l_1}.$$

(Application aux caustiques par réflexion.)

Le cas particulier le plus remarquable est celui des courbes transformées par rayons vecteurs réciproques. L'enveloppe de LL' étant le pôle de transformation, r_1 est nul, et la liaison entre le rayon de courbure d'une courbe et celui de sa transformée est simplement exprimée par la formule

$$(4) \quad \frac{r \sin^2 \lambda}{l} = \frac{r' \sin^2 \lambda'}{l'}.$$

Soient LC , LC' les rayons de courbure des développées de (A) et de (A') ; menons $L'C'_1 = L'C'$ parallèlement à LC ; de C et C'_1 , abaissons des perpendiculaires sur LL' , puis des pieds de celles-ci des perpendiculaires sur LC et $L'C'_1$; D et D' sont sur ces droites les pieds de ces perpendiculaires.

On a

$$LD = r \sin^2 \lambda, \quad L'D' = r' \sin^2 \lambda',$$

par suite

$$\frac{LD}{l} = \frac{L'D'}{l'}.$$

Les points D et D' sont donc en ligne droite avec le pôle de transformation.

Ceci indique la construction à effectuer pour obtenir l'un des rayons de courbure connaissant l'autre. L'un des centres de courbure permet d'avoir l'un des points D ou D' ; on en déduit l'autre et, par une construction inverse, le rayon de courbure inconnu. Les cas particuliers sont nombreux. Nous ne nous y arrêtons pas.

La courbe (A') , polaire réciproque d'une courbe quelconque (C) , la conique auxiliaire étant une circonférence, est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la podaire (A) de (C) par rapport au centre du cercle. Les relations (1) et (4) sont, par suite, applicables à ces courbes. On a ainsi les relations entre les rayons de courbure des développées d'une courbe, de sa podaire et de sa polaire réciproque.

Développement du quotient de deux fonctions holomorphes, théorie des séries récurrentes (1); par M. DE PRESLE.

1. Quotient de deux séries ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable. — Soient le dividende, le diviseur, le quotient

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots, \\ b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots, \\ c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \end{aligned}$$

On a, en égalant les coefficients de x^p dans le dividende et dans le produit du diviseur par le quotient,

$$(1) \quad a_p = b_p c_0 + b_{p-1} c_1 + b_{p-2} c_2 + \dots + b_{p-q} c_q + \dots + b_0 c_p,$$

relation permettant de calculer, de proche en proche, les coefficients du quotient. On pourrait, par là, obtenir la formule donnant un coefficient quelconque; nous préférons employer une autre méthode.

Remarquons que, si l'on connaissait les coefficients l du quotient, dans le cas où le dividende serait l'unité, on aurait

$$(2) \quad c_p = a_p l_0 + a_{p-1} l_1 + a_{p-2} l_2 + \dots + a_{p-q} l_q + \dots + a_0 l_p.$$

Nous sommes ramené à ce dernier cas, et nous allons d'abord chercher la formule des coefficients l dans le cas où b_0 est l'unité.

2. Inverse d'une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable et dont le premier terme est l'unité. — De la relation (1) dans laquelle nous supposons a_0 et b_0 égaux à l'unité et tous les autres a nuls, nous déduisons

$$\begin{aligned} l_0 &= 1, \\ b_1 + l_1 &= 0, \\ b_2 + b_1 l_1 + l_2 &= 0, \\ b_3 + b_2 l_1 + b_1 l_2 + l_3 &= 0, \\ b_4 + b_3 l_1 + b_2 l_2 + b_1 l_3 + l_4 &= 0, \\ b_5 + b_4 l_1 + b_3 l_2 + b_2 l_3 + b_1 l_4 + l_5 &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

(1) L'équation servant de base à cette théorie est la même que celle donnée par M. Désiré André dans sa thèse *Sur le terme général d'une série déterminée à la façon des séries récurrentes*.

Le calcul des valeurs de l donne

$$\begin{aligned} l_1 &= -b_1, \\ l_2 &= -b_2 + b_1^2, \\ l_3 &= -b_3 + 2b_2b_1 - b_1^3, \\ l_4 &= -b_4 + 2b_3b_1 + b_2^2 - 3b_2b_1^2 + b_1^4, \\ l_5 &= -b_5 + 2b_4b_1 + 2b_3b_2 - 3b_3b_1^2 - 3b_2^2b_1 + 4b_2b_1^3 - b_1^5, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On reconnaît les lois suivantes de formation :

- 1° l_p se compose de tous les termes de poids p que l'on peut former avec les b jusqu'à b_p inclusivement ;
- 2° Ces termes sont positifs ou négatifs, selon que le nombre de leurs facteurs est pair ou impair ;
- 3° Le coefficient de chaque terme est le coefficient polynomial qu'il aurait, eu égard au nombre des facteurs et à leurs exposants.

L'exactitude de ces lois se démontre en faisant voir que, si elles ont lieu jusqu'à un certain indice, elles auront encore lieu pour l'indice suivant. Aucune difficulté pour les deux premières.

Pour la troisième, nous allons raisonner sur un cas particulier ; mais il sera évident que la conclusion est générale.

Considérons le terme $b_3^1 b_2^3 b_1^5$ de degré 12 et de poids 23 ; il appartient à l_{23} . Le coefficient de ce terme est égal à la somme des coefficients des trois termes suivants de degré 11 :

$$\begin{array}{lll} b_3^1 b_2^3 b_1^5 & \text{de poids 22 appartenant à } l_{22}, \\ b_3^1 b_2^2 b_1^6 & \text{» 21 » } l_{21}, \\ b_3^2 b_2^2 b_1^5 & \text{» 20 » } l_{20}. \end{array}$$

Les coefficients de ces derniers termes, suivant la loi polynomiale, sont

$$\frac{11!}{4! 3! 4!}, \quad \frac{11!}{4! 2! 5!}, \quad \frac{11!}{3! 3! 5!}$$

ou

$$\frac{11!}{3! 2! 4!} \frac{1}{4.3}, \quad \frac{11!}{3! 2! 4!} \frac{1}{4.5}, \quad \frac{11!}{3! 2! 4!} \frac{1}{3.5},$$

dont la somme est

$$\frac{11!}{3! 2! 4!} \left(\frac{1}{4.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{3.5} \right) = \frac{11! (5 + 3 + 4)}{3! 2! 4! 5.3.4} = \frac{12!}{4! 3! 5!},$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. *Inverse d'une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable et dont le premier terme est quelconque.* — Mêmes notations que précédemment, seulement b_0 et l_0 sont différents de l'unité ; nous ramènerons ce cas au précédent en remplaçant b_q par $\frac{b_q}{b_0}$ et divisant par b_0 le résultat obtenu ; donc :

l_0 est égal $\frac{1}{b_0}$ et l_p s'obtient en formant la même expression que précédemment, en la rendant de degré p à l'aide de facteurs b_0 et en la divisant ensuite par b_0^{p+1} .

Par exemple, on aura

$$l_3 = \frac{-b_1 b_1^3 + 2b_1 b_1 b_0^2 + 2b_1 b_1 b_0^2 - 3b_1 b_1^2 b_0^2 - 3b_1^2 b_1 b_0^2 + 4b_1 b_1^2 b_0 - b_1^3}{b_0^3}.$$

4. *Développement de fonctions.* — La question de convergence réservée, les relations précédentes donnent les coefficients des fonctions qui sont les quotients de fonctions dont on connaît la loi de développement, telles que

$$\text{tang } x, \cot x, \sec x, \csc x.$$

Les mêmes relations donnent également les coefficients du développement des fonctions rationnelles. Si l'on désigne par n et m les plus forts exposants du numérateur et du dénominateur, d'après la relation (1), on aura, si n n'est pas moindre que m ,

$$(3) \quad b_m c_{n-m+1} + b_{m-1} c_{n-m+2} + \dots + b_0 c_{n+1} = 0,$$

et, si n est moindre que m ,

$$(4) \quad b_m c_0 + b_{m-1} c_1 + \dots + b_0 c_m = 0.$$

Les mêmes relations auront lieu en augmentant d'un même nombre les indices des coefficients du quotient à partir des limites précédentes. De là, une nouvelle notion, celle de la *réurrence des séries*.

5. *Définition des séries récurrentes.* — Une série

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots$$

est dite *récurrente*, lorsque, pour toutes les valeurs de p supérieures à une certaine limite, le coefficient de x^p peut s'exprimer,



quel que soit p , par une même fonction linéaire des coefficients des puissances inférieures pris en nombre fixe.

En d'autres termes, la série considérée sera récurrente si, pour toutes les valeurs de p qui surpassent une certaine limite, on a identiquement

$$b_m c_{p-m} + b_{m-1} c_{p-m+1} + \dots + b_0 c_p = 0,$$

p étant un entier quelconque, et $b_m, b_{m-1}, \dots, b_0$ des quantités constantes, dont la suite est l'échelle de relation de la série récurrente.

6. *Quand une fraction rationnelle peut se développer en une série convergente suivant les puissances croissantes de la variable, cette série est récurrente.* (Nous supposons un terme indépendant de la variable au numérateur et au dénominateur). — Les constantes de l'échelle de relation sont les coefficients du dénominateur placés par ordre d'indices décroissants. Si le degré du numérateur est moindre que le degré du dénominateur, la première relation de récurrence contient les coefficients du quotient dont les indices sont les exposants de la variable au dénominateur, placés par ordre d'indices décroissants. Si le degré du numérateur n'est pas moindre que le degré du dénominateur, les indices des coefficients du quotient seront augmentés d'un même nombre, de telle sorte que l'indice le plus fort soit égal au degré du numérateur augmenté d'une unité.

Démonstration donnée au n° 4.

7. *Quand une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable est à la fois convergente et récurrente, elle a pour somme une fraction rationnelle.* (Nous supposons que la série contient un terme indépendant de la variable.) — Le dénominateur s'obtient en faisant la somme des produits des constantes de l'échelle de relation, placées en ordre inverse, par des puissances de la variable croissant à partir de l'exposant zéro. Si, dans la première relation de récurrence, le plus faible des indices des coefficients de la série n'est pas nul, le degré du numérateur est égal au plus fort de ces indices diminué d'une unité.

En effet, si l'on forme une fraction rationnelle, dont le dénomi-

nateur satisfasse à la règle énoncée, et si l'on calcule les termes du numérateur d'après la relation (1), le développement de cette fraction rationnelle sera identique à la série proposée.

Note sur les intersections de trois quadriques;
par M. FÉLIX LUCAS.

Soient $U=0$, $V=0$, $W=0$ les équations de trois quadriques, se coupant en huit points M , réels ou imaginaires.

Désignons par x_1 , y_1 , z_1 les coordonnées d'un point d'intersection M_1 et posons

$$\xi = \frac{x+x_1}{2}, \quad \eta = \frac{y+y_1}{2}, \quad \zeta = \frac{z+z_1}{2}.$$

Les équations des quadriques peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$(x-x_1)U'_\xi + (y-y_1)U'_\eta + (z-z_1)U'_\zeta = 0,$$

$$(x-x_1)V'_\xi + (y-y_1)V'_\eta + (z-z_1)V'_\zeta = 0,$$

$$(x-x_1)W'_\xi + (y-y_1)W'_\eta + (z-z_1)W'_\zeta = 0;$$

car les premiers membres de ces trois équations sont identiques à U , V , W .

En éliminant $(x-x_1)$, $(y-y_1)$, $(z-z_1)$, nous obtenons l'équation d'une surface du troisième degré en x , y , z ,

$$\begin{vmatrix} U'_\xi & U'_\eta & U'_\zeta \\ V'_\xi & V'_\eta & V'_\zeta \\ W'_\xi & W'_\eta & W'_\zeta \end{vmatrix} = 0.$$

qui passe par les sept points d'intersection autres que M_1 des trois quadriques données. En considérant ξ , η , ζ comme des coordonnées courantes, on obtient une autre surface du troisième degré qui passe par le milieu des vingt-huit cordes communes aux trois quadriques.

Il est clair, d'ailleurs, que l'on obtiendrait la même équation en cherchant le lieu géométrique des centres (ξ, η, ζ) des quadriques qui passent par les huit points M , et dont l'équation générale est

$$\lambda U + \mu V + \nu W = 0.$$

Donc les milieux des vingt-huit cordes communes à trois quadriques appartiennent à une surface du troisième ordre qui est le lieu des centres des quadriques passant par les huit points d'intersection des trois premières.

Il est à remarquer que cette surface du troisième degré reste invariable si l'on regarde comme arbitraires les termes constants de U, V, W; elle est, par conséquent, *le lieu géométrique des milieux des vingt-huit cordes communes à trois quadriques quelconques dont les équations diffèrent de celles de U, V, W, par leurs termes constants respectifs.*

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 1^{er} JUILLET 1891.

PRÉSIDENTE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. D. ANDRÉ expose une démonstration nouvelle du théorème suivant, donné autrefois par lui : *Parmi les permutations de n nombres distincts, n étant égal ou supérieur à quatre, le nombre de celles qui présentent un nombre pair de séquences est égal au nombre de celles qui en présentent un nombre impair.*

M. LAISANT : *Généralisation d'une transformation qui intervient dans un problème récemment proposé.*

M. d'OCAGNE présente quelques observations sur le même sujet.

M. BEGHIN : *Sur une question d'Arithmétique à laquelle donne lieu l'étude des points isolés d'une fonction à espaces lacunaires.*

M. LAISANT présente une observation sur le même sujet.

SÉANCE DU 15 JUILLET 1891.

PRÉSIDENTE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. LEMOINE : *Sur une transformation relative à la géométrie du triangle.*

M. Raffy : *Sur la déformation de certaines surfaces de révolution.*

M. BLOCHÉ fait la Communication suivante :

Sur une classe de surfaces gauches.

Il peut arriver, comme je l'ai fait remarquer dans une Communication verbale à la Société, que les lignes asymptotiques d'une surface réglée se transforment les unes dans les autres par homographie. Je me suis proposé de déterminer parmi les surfaces réglées, dont les génératrices font partie d'un complexe linéaire, celles qui possèdent la propriété énoncée. Voici les résultats auxquels je suis parvenu.

On peut reconnaître par de simples considérations géométriques que les génératrices de ces surfaces rencontrent au moins une droite. Ces surfaces se déduisent donc par homographie des surfaces à plan directeur.

Si l'on suppose les points homologues situés sur une même génératrice, la condition nécessaire et suffisante est que les tangentes d'une asymptotique quelconque appartiennent à un complexe linéaire. Les génératrices de la surface font alors partie d'une congruence linéaire. Les surfaces répondant aux conditions proposées sont donc les transformées homographiques des conoïdes, ou des surfaces dont l'équation générale peut s'écrire

$$ay = xz + F(z).$$

Ces dernières sont les surfaces dont les génératrices font partie d'une congruence singulière ayant pour directrice la droite à l'infini du plan $z = 0$.

Si l'on ne suppose pas les points homologues situés sur une même génératrice, on trouve d'autres surfaces qui se déduisent par homographie de la surface à plan directeur représentée par les équations

$$y \cos \omega - x \sin \omega = ae^{m\omega}, \quad z = be^{p\omega}.$$

SÉANCE DU 4 NOVEMBRE 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. Fouret : *Sur les transformations homographiques qui laissent inaltérée une congruence linéaire.*

M. Raffy : *Sur des déformations imaginaires de certaines surfaces.*

M. LAISANT fait la Communication suivante :

Note sur l'interpolation successive.

L'inconvénient des formules classiques d'interpolation, au point de vue des applications pratiques, réside dans la longueur des calculs qu'elles exigent, et dont quelques-uns sont parfois inutiles. Le but de cette Note est d'indiquer un procédé, plutôt qu'une formule nouvelle, qui permet, nous semble-t-il, d'abréger considérablement les opérations.

Supposons qu'une fonction d'une seule variable indépendante y , représentant, par exemple, un phénomène physique dont on se propose de trouver la loi, ait été déterminée pour n valeurs, $x_1, x_2, \dots, x_n$ de cette variable, et qu'elle prenne respectivement les valeurs correspondantes

$$y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Si, par l'une quelconque des méthodes et formules connues, on a obtenu une fonction u de x qui satisfait aux conditions ci-dessus, la loi cherchée est convenablement indiquée par la relation

$$(1) \quad y = u,$$

dans la limite des observations enregistrées.

La formule

$$y = u + (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)f(x),$$

et plus particulièrement

$$(2) \quad y = u + k(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

satisfera également aux conditions énumérées.

Soit maintenant qu'une observation ou une expérience nouvelle nous apprenne que, pour une nouvelle valeur x_{n+1} de la variable, la fonction doit prendre la valeur y_{n+1} . La formule (1), si l'on y remplaçait x par x_{n+1} , donnerait pour y une valeur u_{n+1} généralement différente. Donc, en écrivant la formule (2) après cette substitution, nous aurons

$$y_{n+1} = u_{n+1} + k(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \dots (x_{n+1} - x_n),$$

relation qui nous déterminera le coefficient k :

$$(3) \quad k = \frac{y_{n+1} - u_{n+1}}{(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \dots (x_{n+1} - x_n)}.$$

Cette détermination de k nous permet donc de passer de la formule (1) à la formule (2). On remarquera que le numérateur de k est la différence entre la valeur *observée* de la fonction, et sa valeur *calculée* par la formule (1).

En faisant tout d'abord $n = 2$, auquel cas la loi cherchée est représentée suffisamment par une relation linéaire, ou graphiquement par une droite, on voit qu'on pourra calculer de proche en proche des formules successives qui permettront de *serrer*, pour ainsi dire, de plus en plus près, le phénomène dont on veut représenter analytiquement la loi.

Dans le cas particulier remarquable où les valeurs de la variable se succèdent en progression arithmétique de raison h , comme dans la formule classique de Newton, on voit que la relation (3) devient

$$k = \frac{y_{n+1} - u_{n+1}}{n! h^n}.$$

Si la différence $y_{n+1} - u_{n+1}$, entre les valeurs observées et calculées, devient tellement faible que la valeur qui s'ensuivra pour

$$k(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

dans les limites intéressantes au point de vue du phénomène, soit inférieure aux erreurs physiques inévitables, on pourra supprimer ce terme, et la formule (1) conviendra alors à la représentation de la loi, même avec une observation de plus.

Comme exemple très simple, soit qu'aux temps 0, 1, 2, 3, 4 un mobile ait parcouru les espaces 7, 8, 11, 16, 23, successivement. D'après les deux premières observations, la loi du mouve-



ment est représentée par $y = 7 + t$. Écrivons

$$y = 7 + t + kt(t-1),$$

et remplaçons y par 11, t par 2. Alors $2 = k \cdot 2 \cdot 1$, d'où $k = 1$ et $y = 7 + t^2$. Nous aurons alors

$$y = 7 + t^2 + k't(t-1)(t-2);$$

en remplaçant y par 16, t par 3, il s'ensuit $k' = 0$. Enfin écrivons

$$y = 7 + t^2 + k''t(t-1)(t-2)(t-3);$$

les valeurs $y = 23$, $t = 4$ donnent $k'' = 0$. Par conséquent le mouvement observé est complètement représenté par la formule $y = 7 + t^2$.

M. D'OCAGNE en présentant son livre intitulé : *Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques* (1), où il expose une théorie générale de la construction des Tableaux graphiques de calculs tout faits ou *abaques*, indique les particularités au point de vue mathématique de cet Ouvrage, écrit avant tout dans un but technique. Il croit pouvoir, notamment, signaler l'emploi, fait en vue d'un objet absolument *pratique*, des principes de *dualité* et d'*homographie* dont l'usage semblait jusqu'ici réservé aux recherches purement spéculatives.

Le premier de ces principes lui a permis de substituer, pour les équations qu'il appelle à *triple régleure*, aux abaques à *droites isoplèthes* des abaques à *points isoplèthes* qui, tout en étant aussi simples de construction, moyennant l'emploi des *coordonnées parallèles*, sont d'une lecture bien plus facile et se prêtent bien mieux aux interpolations à vue. Ils ont encore l'avantage, que ne présentent point les précédents, de permettre, dans certains cas, l'introduction de une, deux et trois nouvelles variables. On conçoit, en effet, qu'on puisse, au moyen d'un nouveau paramètre, faire varier l'un des systèmes de points isoplèthes en le représentant dans chacune de ses nouvelles positions. Pareille opération serait impossible avec les systèmes de droites isoplèthes, car la superposition sur une même feuille de ces divers systèmes produirait un enchevêtrement non seulement inextricable à l'œil, mais même matériellement irréalisable.

(1) Paris, Gauthier-Villars et fils, 1891.

Quant au principe d'homographie, il intervient utilement pour permettre de substituer à un abaque primitivement construit, où certaines courbes sont trop rapprochées ou coupées par certaines droites sous un angle trop petit, un autre abaque ne présentant pas ces inconvénients

SÉANCE DU 18 NOVEMBRE 1891.

PRÉSIDENTE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. Lemoine : *Sur la transformation continue.*

M. Fouret : *Sur les points singuliers des équations différentielles à deux variables, du premier ordre et du premier degré.*

M. Humbert : *Sur la surface desmique du quatrième ordre.*

M. Catalan adresse cinq Notes *Sur quelques théorèmes d'Analyse et d'Arithmétique.*

M. Bioche fait la Communication suivante :

Sur les surfaces réglées qui passent par une courbe et coupent sous un angle constant la développable des tangentes.

On sait que, si l'on considère les développables qui coupent sous un angle constant la développable des tangentes d'une courbe c , le lieu des génératrices de ces développables qui passent par un point de c est un cône du deuxième degré. Ce cône a pour plan principal le plan rectifiant; pour génératrices principales, la tangente et la droite rectifiante; les sections circulaires sont perpendiculaires à ces droites.

Pour qu'une droite liée invariablement au trièdre d'une courbe engendre une développable, il faut et il suffit que le cône, dont je viens de parler, soit de grandeur constante et que la droite soit sur ce cône. Si ces conditions sont réalisées, la courbe c est une hélice.

On peut généraliser ces résultats en considérant, au lieu des développables, des surfaces réglées qui auraient, tout le long de la courbe c , une courbure totale dont la valeur ne dépendrait que des

coordonnées du pied de chaque génératrice sur la courbe. Les développables correspondent au cas où cette courbure serait constamment nulle. Dans le cas plus général dont je viens de parler, on trouve les résultats suivants.

Le lieu des génératrices qui passent par un point de c et qui correspondent à des surfaces ayant en ce point même courbure totale se compose de deux cônes du deuxième degré Γ , Γ' . Ces cônes ont tous deux pour plan principal le plan rectifiant; ils contiennent tous deux la tangente à la courbe c , et les plans perpendiculaires à c les coupent l'un et l'autre suivant des cercles.

Les autres génératrices, situées dans le plan rectifiant, forment, avec la tangente et la droite rectifiante, un faisceau harmonique. Plus généralement : tout plan passant par la tangente coupe le cône des développables et les cônes Γ , Γ' , suivant des droites qui constituent, avec la tangente, un faisceau harmonique.

Si la valeur absolue de la courbure est égale au carré de la torsion, l'un des deux cônes, Γ ou Γ' , se réduit à un système de deux plans : le plan osculateur et le plan normal.

Pour qu'une droite, liée invariablement au trièdre, engendre une surface réglée, pour laquelle la courbure totale soit constante le long de la courbe c , il faut et il suffit qu'un des cônes soit de grandeur constante, et que la droite soit située sur ce cône. Si ces conditions sont réalisées, la courbe c est une courbe de M. Bertrand. La génératrice principale du cône, autre que la tangente, est la génératrice de la surface réglée qui admet c comme ligne de striction et qui est applicable sur un hyperboloïde de révolution; elle est parallèle à la binormale de la courbe conjuguée.

Si la courbe c est à torsion constante, le cône se réduit à deux plans.

Si la courbe c est à courbure constante, le cône se réduit à la tangente à cette courbe.

M. P. APPELL adresse la Note suivante :

Exemples de fonctions de plusieurs variables admettant un groupe de substitutions linéaires entières.

M. Fuchs a obtenu, par l'inversion des intégrales de certaines équations différentielles linéaires, des fonctions de deux variables

indépendantes x et y qui ne changent pas de valeur quand on remplace x et y par $ax + by + c$ et $a'x + b'y + c'$, a, b, c, a', b', c' désignant des constantes déterminées. Nous nous proposons de former directement, à l'aide de séries ou de produits infinis, des fonctions de cette nature n'ayant pas de singularités essentielles à distance finie : ces fonctions se rattachent aussi aux fonctions hyperfuchsienues de M. Picard.

1. Pour donner d'abord un exemple élémentaire, formons, avec des fonctions θ , une fonction méromorphe $f_n(x)$, doublement périodique de troisième espèce, vérifiant les deux relations

$$f_n(x + 2\pi i) = f_n(x), \quad f_n(x + 2\alpha) = e^{-nx} f_n(x),$$

où α désigne une constante et n un entier positif, négatif ou nul. Si l'on considère la somme

$$\varphi(x, y) = \sum A_n e^{ny} f_n(x),$$

étendue à différentes valeurs de n , les lettres A_n désignant des constantes, cette somme définit une fonction $\varphi(x, y)$ vérifiant les relations

$$(1) \quad \varphi(x + 2\pi i, y) = \varphi(x, y + 2\pi i) = \varphi(x + 2\alpha, y + x) = \varphi(x, y).$$

La fonction φ admet donc un groupe de substitutions linéaires entières.

2. Les fonctions précédentes sont des polynômes en e^x et e^{-x} ; voici des fonctions transcendentes en e^x vérifiant les mêmes relations (1). Soit α une constante dont la partie réelle est négative; posons

$$t_n = e^{an^2 + (x - \alpha)n + y}, \quad \theta_n = e^{x + 2n\alpha},$$

et désignons par $R(t, \theta)$ une fonction rationnelle de t et θ , finie pour $t = 0$. Les expressions

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} t_n R(t_n, \theta_n), \\ \varphi(x, y) &= \prod_{n=-\infty}^{n=+\infty} [1 - t_n R(t_n, \theta_n)] \end{aligned}$$

définissent des fonctions vérifiant les relations (1). En effet, le

changement de x en $x + 2a$ et de y en $y + x$ change t_n en t_{n+1} et θ_n en θ_{n+1} . Quand $R(t, \theta)$ est un polynôme en t multiplié par une fonction rationnelle de θ , la première des expressions ci-dessus donne les fonctions du n° 1.

3. Nous terminerons en rattachant au même point de vue des fonctions de trois variables, dont nous avons indiqué la formation dans une Note insérée dans les *Annales de la Faculté de Marseille*, 1891 (1). Si l'on considère la fonction entière de x, y, z ,

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{an^4 + i \cdot 1n^4 + 6 \cdot yn^4 + i \cdot zn},$$

et si l'on forme les fonctions

$$F(x, y, z) = \prod_{v=1}^{v=k} \frac{\varphi(x, y, z + \gamma_v)}{\varphi(x, y, z + \gamma'_v)},$$

$$F(x, y, z) = \sum_{v=1}^{v=k} \frac{A_v d \log \varphi(x, y, z + \gamma_v)}{dz},$$

où les constantes A_v ont une somme *nulle*, ainsi que les constantes $\gamma_v - \gamma'_v$, ces fonctions vérifient les relations

$$F\left(x + \frac{\pi i}{2}, y, z\right) = F\left(x, y + \frac{\pi i}{3}, z\right) = F\left(x, y, z + \frac{\pi i}{2}\right)$$

$$= F(x + a, y + 2x + a, z + 3x + 3y + a) = F(x, y, z).$$

Elles admettent donc un groupe de substitutions linéaires entières.

(1) Dans cette Note les constantes $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ doivent être supposées nulles.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur les points singuliers des équations différentielles à deux variables, du premier ordre et du premier degré; par
M. G. FOURET.

1. En rendant homogène, par l'introduction d'une troisième variable, une équation différentielle à deux variables, du premier ordre et du premier degré, on la met sous la forme

$$(1) \quad \begin{vmatrix} L & M & N \\ x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0,$$

L, M, N étant des fonctions homogènes, d'un même degré d'homogénéité, de x, y, z . Si l'on considère ces trois variables comme les coordonnées d'un point par rapport à un triangle de référence ABC, l'équation (1) définit un système de courbes que l'on peut appeler *courbes intégrales* de cette équation. Par un point quelconque du plan du triangle ABC passe une de ces courbes et une seule.

Il y a exception toutefois pour les points dont les coordonnées vérifient les équations

$$(2) \quad \frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z},$$

et que l'on appelle *points singuliers* de l'équation différentielle. Supposons que L, M et N soient des fonctions algébriques entières d'un même degré k , c'est-à-dire, suivant une dénomination employée par M. Poincaré (1), que l'équation différentielle soit de $k^{\text{ième}}$ dimension. Alors le nombre des points singuliers est $k^2 + k + 1$.

Cette proposition a déjà été démontrée par M. Darboux, dans

(1) *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré* (Rendiconti di Circolo matematico di Palermo, t. V, p. 161).

son beau *Mémoire sur les équations différentielles algébriques* ⁽¹⁾.

On peut aussi l'établir très simplement à l'aide des considérations suivantes, qui présentent en elles-mêmes quelque intérêt.

2. Remarquons d'abord qu'une droite quelconque

$$(3) \quad Ax + By + Cz = 0$$

est touchée en k points par les courbes intégrales de l'équation (1). En effet, pour un pareil point, x, y, z, dx, dy, dz doivent vérifier simultanément les équations (1), (3) et

$$(4) \quad A dx + B dy + C dz = 0.$$

Mais l'équation (1) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} L & M & AL + BM + CN \\ x & y & Ax + By + Cz \\ dx & dy & A dx + B dy + C dz \end{vmatrix} = 0$$

et se réduit, en vertu des équations (3) et (4), à

$$AL + BM + CN = 0.$$

Cette équation, de degré k , détermine, concurremment avec l'équation (3), les coordonnées de k points, qui sont les points de contact de la droite (3) avec les courbes intégrales. On voit ainsi que ces courbes forment un système dont les caractéristiques sont 1 et k .

3. De ce qui précède on conclut immédiatement que *le lieu des points de contact des tangentes menées d'un même point P aux courbes intégrales est de degré $k + 1$* ; car, par le point P, passe une de ces courbes, et toute droite issue de P est touchée par celles-ci en k points.

Il est d'ailleurs facile de former l'équation de ce lieu. Soient, en effet, a, b, c les coordonnées du point P. La figure montre

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. II, p. 84.

Le même théorème, énoncé sous une forme un peu différente, est également démontré dans les *Leçons de Géométrie* de Clebsch et Lindemann (t. I, p. 1001).

immédiatement qu'entre ces coordonnées et celles du point de contact d'une tangente menée de P à l'une des courbes existent les relations

$$\frac{dx}{a-x} = \frac{dy}{b-y} = \frac{dz}{c-z}.$$

L'élimination de dx , dy , dz entre ces relations et l'équation (1) fournit l'équation du lieu sous la forme

$$(5) \quad \begin{vmatrix} L & M & N \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

On reconnaît là l'équation d'une courbe de degré $k+1$ qui passe par le point P. On voit de plus que *cette courbe passe par les points singuliers de l'équation différentielle (1)*; car son équation est évidemment vérifiée par les systèmes de valeurs de x, y, z , qui vérifient les équations (2).

4. Lorsque l'on fait varier le point P, et par conséquent a, b, c , de toutes les manières possibles, les courbes (5) varient en formant un réseau d'une espèce particulière, dont certaines propriétés intéressantes ont été signalées par Laguerre (1). Si le point P se déplace sur une droite Δ , les courbes (5), correspondant aux diverses positions que prend alors ce point, forment un faisceau; car, les coordonnées a, b et c étant liées par une relation linéaire, l'équation (5) ne contient plus qu'un paramètre arbitraire au premier degré. Les courbes du faisceau ont en commun $(k+1)^2$ points, parmi lesquels se trouvent nécessairement les k points en lesquels la droite Δ est tangente à des courbes intégrales (1). Les $k^2 + k + 1$ autres sont les points singuliers de l'équation différentielle, dont le nombre se trouve ainsi déterminé.

5. Si l'on suppose $k=1$, l'équation (1) se réduit à l'équation différentielle de Jacobi. Les points singuliers, qui sont alors au nombre de trois, ne suffisent pas pour déterminer complètement l'ensemble des courbes intégrales. Il faut de plus connaître un

(1) *Sur certains réseaux singuliers formés par des courbes planes* (Bulletin de la Société mathématique, t. VI, p. 129 à 136).

certain rapport anharmonique. On peut alors, à l'aide de ces données, obtenir, en quelque sorte géométriquement, l'intégrale de l'équation de Jacobi, ainsi que je l'ai fait voir, il y a quelques années ⁽¹⁾.

Dans l'hypothèse $k = 2$, les points singuliers, au nombre de sept, déterminent complètement, quand ils sont distincts, le système des courbes intégrales ⁽²⁾.

La connaissance de ces points permet alors, comme on va le voir, de construire géométriquement, d'une manière élégante, la tangente, en un point quelconque du plan, à la courbe intégrale qui y passe. Soit, en effet, Θ la tangente, en un point M , à une de ces courbes. Le lieu des points de contact des tangentes menées aux courbes intégrales par un point quelconque P de Θ est une cubique (art. 3), et les cubiques qui correspondent ainsi aux divers points P de Θ , forment un faisceau, c'est-à-dire ont neuf points communs, dont sept sont les points singuliers donnés, et les deux autres sont les points où les courbes intégrales touchent Θ . Or, par hypothèse, un de ces deux derniers points est le point M . L'autre, étant joint à M , donnera précisément la droite Θ . Ainsi, *étant donnés, dans un plan, sept points distincts, que l'on considère comme les points singuliers d'une équation différentielle du premier ordre, du premier degré et de seconde dimension, la tangente, en un point M quelconque du plan, à la courbe intégrale qui y passe, s'obtient en joignant ce point au neuvième point commun aux cubiques qui passent par M et par les sept points singuliers.*

6. J'ai indiqué, il y a quelques années, comment les relations de position des sept points singuliers permettent, dans certains cas, de prévoir la nature et la forme de l'intégrale ⁽³⁾. Je n'y reviendrai pas ici. Je rappellerai seulement, pour la généraliser, cette remarque immédiate qu'une équation différentielle

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 1693 et 1837.

⁽²⁾ Lorsque k dépasse 2, les $k^2 + k + 1$ points singuliers ne sont pas indépendants les uns des autres, comme j'ai eu déjà l'occasion de le faire remarquer (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVI, p. 586).

⁽³⁾ *Ibid.*

définissant un faisceau de coniques est de deuxième dimension et a pour points singuliers les quatre points communs à ces coniques et les trois points d'intersection de leurs couples de sécantes communes. Considérons de même le faisceau le plus général de courbes planes du $m^{\text{ième}}$ degré. Les points de contact de ces courbes avec une droite quelconque de leur plan étant, comme on sait, au nombre de $2(m-1)$, la dimension de l'équation différentielle de ce faisceau sera égale à ce nombre. Si du nombre total des points singuliers, égal à $4(m-1)^2 + 2(m-1) + 1$, on déduit le nombre m^2 des points communs aux courbes du faisceau, on obtient le nombre total des points doubles de l'ensemble de ces courbes, égal, comme on le sait d'ailleurs, à $3(m-1)^2$.

7. Je vais, pour terminer, donner un nouvel exemple du parti que l'on peut tirer des points singuliers d'une équation différentielle, pour l'intégration de cette équation. On connaît les propositions si remarquables données par M. Darboux, dans le Mémoire que j'ai déjà rappelé, d'après lesquelles, à l'aide d'un nombre suffisant d'intégrales particulières d'une équation différentielle, on peut obtenir l'intégrale générale.

La proposition suivante me paraît pouvoir être utilisée, dans la recherche de ces intégrales particulières : *Si une équation différentielle du premier degré et de $k^{\text{ième}}$ dimension a plus de $mk + n$ points sur une courbe algébrique du $m^{\text{ième}}$ ordre et de la $n^{\text{ième}}$ classe, elle admet cette courbe comme intégrale particulière.* C'est là une conséquence immédiate d'un théorème bien connu, consistant en ce que les courbes d'un système, de caractéristiques μ et ν , touchent une courbe algébrique du $m^{\text{ième}}$ ordre et de la $n^{\text{ième}}$ classe en un nombre de points au plus égal à $m\nu + n\mu$. Il suffit de supposer $\mu = 1$, $\nu = k$ et de remarquer que toute courbe passant par un point singulier du système est touchée en un point par une des courbes de ce système, pour en conclure la proposition énoncée.

Sur une transformation relative à la géométrie du triangle;
par M. E. LEMOINE.

J'ai donné au Congrès de Limoges (*Association française pour l'avancement des Sciences*, 1890) un grand nombre de formules se rapportant à la Géométrie du triangle. En appelant $a, b, c, A, B, C, r, r_a, r_b, r_c, R, p, \delta, \delta_a, \delta_b, \delta_c$ les trois côtés, les trois angles, les rayons des quatre cercles tangents aux trois côtés, le rayon du cercle circonscrit, le demi-périmètre et les quatre quantités, $4R + r, 4R - r_a, 4R - r_b, 4R - r_c$, on a, par exemple,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 2(p^2 - r\delta) = 2[(p-a)^2 + r_a\delta_a], \\ r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 &= (\delta^2 - 2p^2)^2, \\ r^2 + r_a^2 + r_b^2 &= [\delta_a^2 - 2(p-a)^2]^2, \\ \Sigma a^2 \cos A &= \frac{4pr}{R} (p^2 - r\delta - 3R^2), \\ \Sigma a \cos^2 A &= \delta - \frac{p^2(R-r)}{R^2}, \\ -r \cos^2 A + r_c \cos^2 B + r_b \cos^2 C &= \delta_a - \frac{(p-a)^2(R+r_a)}{R^2}, \dots \end{aligned}$$

L'emploi de ces formules facilite souvent la résolution de problèmes assez compliqués, et nous allons le montrer à propos de trois théorèmes qui, je crois, n'ont pas encore été remarqués.

THÉORÈME I. — *On donne deux cercles fixes de rayons R, r de centres O, o , tels qu'il y ait une infinité de triangles ABC inscrits au cercle de rayon R et circonscrits au cercle de rayon r ; le lieu des points de Lemoine K des triangles ABC est une ellipse.*

Posons $\rho = OK, \rho' = oK$; on sait que $\overline{Oo}^2 = d^2 = R(R - 2r)$. On a

$$\begin{aligned} (1) \quad \rho^2 &= R^2 - \frac{12R^2r^2p^2}{(p^2 - r\delta)^2}, \\ (2) \quad \rho'^2 &= 4Rr^2 \frac{p^2(R+r) - r\delta^2}{(p^2 - r\delta)^2}. \end{aligned}$$

On établit facilement ces formules en se rappelant que si

$x, y, z; x_1, y_1, z_1$ sont les coordonnées normales absolues de deux points M et M', on a

$$\overline{MM'}^2 = -\frac{R}{pr} \Sigma \alpha(y_1 - y)(z_1 - z),$$

en employant des identités du genre de celles dont nous venons de signaler l'utilité.

En éliminant p^2 entre les équations (1) et (2), on trouve

$$(3) \quad 1 = \frac{4r[(R+r)(R^2 - p^2) - 3Rp^2]}{3(R^2 - p^2 + p'^2)}.$$

C'est l'équation du lieu de K en coordonnées p, p', O et o étant les pôles.

Si nous prenons pour axe des x la droite Oo , pour axe des y la perpendiculaire élevée au milieu de Oo , l'abscisse de o étant $\frac{d}{2}$, on a

$$p^2 = y^2 + (\tfrac{1}{2}d + x)^2, \quad p'^2 = y^2 + (\tfrac{1}{2}d - x)^2;$$

substituant dans l'équation (3), on trouve, tous calculs faits,

$$4x^2(3R^2 - 2Rr + r^2) + 4y^2r^2 - 4dx(3R - r)(R + r) + d^2(3R^2 + 6Rr + r^2) = 0:$$

le lieu du point K est donc une ellipse.

Le carré du demi grand axe est dirigé suivant la direction de l'axe des y et a pour valeur

$$\frac{d^2r}{2(3R^2 - 2Rr + r^2)}.$$

Le demi petit axe a pour valeur

$$\frac{d^2r}{3R^2 - 2Rr + r^2}.$$

Si nous donnions au lieu de o le centre o_a du cercle ex-inscrit tangent à BC, on aurait de même

$$\begin{aligned} p &= OK, \quad p' = o_a K, \\ p^2 - R^2 &= \frac{12R^2r_a^2(p - a)^2}{[(p - a)^2 + r_a^2\delta_a^2]}, \\ p'^2 &= 4Rr_a \frac{(p - a)^2(R - r_a) + r_a\delta_a^2}{[(p - a)^2 + r_a^2\delta_a^2]}, \end{aligned}$$

en éliminant $p - a$, on trouverait l'équation du lieu de K, qui est une hyperbole.

Cette hyperbole est équilatère si $R = 2r_a$.

THÉOREME II. — *Avec les mêmes données le lieu du point de Gergonne du cercle inscrit du triangle ABC est une circonférence.*

Soit λ le point de *Gergonne* d'un des triangles ABC.

On trouvera, après quelques calculs,

$$\overline{o\lambda}^2 = \rho^2 = \frac{r^2}{\delta^2} (\delta^2 - 3p^2),$$

$$\overline{O\lambda}^2 = \rho^2 = R^2 - \frac{4r(R+r)}{\delta^2} p^2;$$

éliminant p on trouve une circonférence.

Si l'on donnait, au lieu du cercle inscrit, le cercle ex-inscrit o_a tangent au côté BC, on trouverait encore une circonférence pour le lieu du point de *Gergonne* de ce cercle ex-inscrit.

THÉOREME III. — *Le point de Nagel N décrit dans les mêmes conditions une circonférence.*

Il suffit, pour le voir, de calculer la distance NO du point N de *Nagel* au centre O du cercle circonscrit; on trouve

$$R - 2r,$$

expression remarquable en elle-même par sa simplicité.

La même méthode s'applique avec succès pour trouver les lieux, trop connus pour nous y arrêter, de l'orthocentre, du centre de gravité, etc.

Remarquons encore ce théorème, dont la démonstration est presque intuitive :

Si O et o sont donnés, les centres des cercles ex-inscrits à tous les triangles ABC décrivent la circonférence de rayon $2R$ et de centre O_2 sur Oo , tel que $oO_2 = 2oO$; si O et o_a sont donnés, les centres o, o_b, o_c des autres cercles tangents aux trois côtés d'un des triangles ABC décrivent la circonférence de rayon $2R$ et de centre O_{2a} sur Oo_a , tel que $o_aO_{2a} = 2o_aO$.

Sur la transformation continue; par M. E. LEMOINE.

A la séance du 15 juillet dernier, j'ai fait connaître ici un mode de transformation des formules du triangle et des théorèmes s'y rapportant, qui me paraît fécond et fort utile; voici de quelle idée cette transformation dérive.

Je suppose qu'un triangle ABC se transforme d'une façon continue par la rotation de CA autour du point C; on aura deux états de la figure :

1° Le point A est au-dessus de CB et y restera jusqu'à ce que, dans le mouvement de CA, il passe à l'infini sur AB.

2° Le point A, CA ayant continué son mouvement de rotation, est au-dessous de CB.

Soit une propriété quelconque de la première figure, propriété générale d'un triangle ABC, je la considère dans sa *continuité* et je vois qu'elle devient *souvent*, dans la deuxième figure, une propriété générale du triangle qui s'exprime autrement que la propriété générale considérée.

En effet, les éléments de ABC (premier état de la figure) changent souvent de nom par rapport à ABC du deuxième état; ainsi, par exemple, ce qui est le cercle inscrit au triangle ABC dans le premier état de la figure devient le cercle ex-inscrit tangent à BC dans le second état, etc.; il suit de là qu'un théorème où entrera le cercle inscrit donnera, par continuité, un autre théorème où entrera le cercle ex-inscrit tangent au côté BC. En étudiant la question, on reconnaît que :

Dans une formule générale relative au triangle, si l'on remplace les quantités $a, b, c, p, p-a, p-b, p-c, S, R, r, r_a, r_b, r_c, A, B, C, \dots$, respectivement par $a, -b, -c, -(p-a), -p, p-c, p-b, -S, -R, r_a, r, -r_c, -r_b, -A, \pi-B, \pi-C, \dots$, on obtient une nouvelle formule relative au triangle.

Je dirai que cette nouvelle formule dérive de la première par *transformation continue en A*; il y a évidemment de même les formules obtenues par transformation continue en B et en C.

Le mode de démonstration que nous venons d'indiquer, n'est

pas, si l'on veut une entière rigueur, sans présenter quelques points assez délicats à propos de la valeur des angles, lorsque le point A a passé à l'infini; il vaut mieux raisonner synthétiquement de la manière suivante; on verra de plus, par cette méthode, que la *transformation continue* n'est qu'un cas particulier, mais celui qui paraît le plus fécond, d'un système de transformation très général.

Toute formule M relative au triangle n'est, au fond, qu'une relation d'identité entre trois angles A, B, C dont la somme est égale à π ; car cette formule ne contient que ces angles et des éléments linéaires du triangle qui peuvent s'exprimer tous au moyen de ces angles et d'un élément linéaire arbitraire, lequel disparaît de la formule à cause de l'homogénéité.

Dans la formule M, je puis évidemment remplacer les angles A, B, C par trois autres, A', B', C', dont la somme soit π ; si je prends pour A', B', C' des fonctions de A, B, C, les éléments du triangle qui entrent dans la formule M deviennent d'autres éléments de ce triangle, et la nouvelle formule M donne une relation entre les nouveaux éléments.

Si je prends pour A', B', C' les angles $-\text{A}$, $\pi - \text{B}$, $\pi - \text{C}$, j'ai la transformation continue en A.

En effet, soit BC = a l'élément linéaire qui reste fixe. La formule

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

donne

$$\frac{a}{\sin(-A)} = \frac{(\text{ce que devient } b)}{\sin(\pi - B)} = \frac{(\text{ce que devient } c)}{\sin(\pi - C)} = (\text{ce que devient } 2R);$$

donc b doit être changé en $-b$, c en $-c$, R en $-R$. La formule

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

donne

$$(\text{ce que devient } S) = \frac{1}{2} a(-b) \sin(\pi - C);$$

donc S doit être changé en $-S$, ...

Mais il est clair que j'aurai également une transformation par chaque système de valeurs que je prendrai pour A', B', C'; si je prends, par exemple, pour A', B', C' les valeurs $180 - \text{A}$, $90 - \text{B}$,

go — C, avec a pour élément linéaire fixe, on pourra, dans toute formule relative au triangle, changer

$$a, b, c, R, S, A, B, C, \dots$$

respectivement en

$$a, 2R \cos B, 2R \cos C, R, 2R^2 \cos B \cos C \sin A, \\ \pi - A, \frac{\pi}{2} - B, \frac{\pi}{2} - C, \dots,$$

et l'on aura une nouvelle formule.

Mais ces transformations ne conduisent évidemment pas toutes à des résultats nouveaux simples et élégants, et c'est la transformation continue qui me paraît la plus féconde; elle montre le lien entre presque toutes les formules connues où entrent des éléments analogues, elle en donne de nouvelles, et, une formule étant établie, cette transformation indique la forme et fournit, sans recherche, la démonstration de formules analogues; ainsi la distance d entre le centre du cercle inscrit et celle du cercle circonscrit étant donnée par la formule $d^2 = R(R - 2r)$, celle du centre du cercle ex-inscrit o_a et du centre du cercle circonscrit sera

$$d_a^2 = R(R + 2r_a).$$

La distance oo_a étant $\frac{a}{\sin \frac{A}{2}}$, une transformation continue en A, reproduirait le même résultat, mais la transformation continue en B donne $\frac{a}{\cos \frac{A}{2}}$ pour la distance $o_b o_c, \dots$

On démontre facilement :

1° Que, si les coordonnées normales d'un point M sont l, m, n , l, m, n désignant des fonctions des éléments du triangle, le transformé continu en A, M_a de M a pour coordonnées — l_a, m_a, n_a , l_a, m_a, n_a désignant ce que deviennent l, m, n quand on y fait la transformation continue en A.

Remarquons qu'un point simplement *marqué* sur le plan n'a pas de transformé continu; cela ne signifie plus rien, il faut qu'on donne la loi qui lie la position de M aux éléments du

triangle et il n'y a pas de construction *générale* pour passer d'un point à son transformé continu, d'une ligne à sa transformée continue.

2° Que, si $f(x, y, z, m, m', m'', \dots) = 0$ est l'équation d'une ligne, celle de sa transformée continue en A sera

$$f(-x, y, z, m_a, m'_a, m''_a, \dots) = 0,$$

m_a, m'_a, m''_a désignant ce que deviennent m, m', m'' par transformation continue.

3° Que, si λ, μ, ν sont les coordonnées barycentriques de M, celles de M_a seront λ_a, μ_a, ν_a ; que, si

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \mu, \mu', \mu'', \dots) = 0$$

est l'équation, en coordonnées barycentriques, d'une ligne, celle de sa transformée continue sera

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \mu_a, \mu'_a, \mu''_a, \dots) = 0.$$

4° Pour les coordonnées cartésiennes, les coordonnées de M étant X, Y, celles de M_a seront $X_a, -Y_a$; l'équation d'une ligne étant

$$f(X, Y, M, M', M'', \dots) = 0,$$

celle de sa transformée continue sera

$$f(X, -Y, M_a, M'_a, M''_a, \dots) = 0.$$

Remarquons encore que, au lieu de partir des angles pour une transformation, on pourrait aussi partir des lignes, et, par exemple, changer dans une formule a, b, c en des fonctions f_1, f_2, f_3 des éléments du triangle, puis déterminer les angles et les autres éléments en fonction de $f_1, f_2, f_3, \dots$; il faudrait que f_1, f_2, f_3 satisfissent aux conditions

$$f_1 < f_2 + f_3, \quad f_2 < f_3 + f_1, \quad f_3 < f_1 + f_2,$$

qui expriment que f_1, f_2, f_3 sont les côtés d'un triangle, mais cette transformation serait *ordinairement* plus compliquée.

Donnons, pour terminer, comme exemple de la transformation continue, quelques formules probablement nouvelles; il y en a de beaucoup plus simples, mais nous les avons déjà publiées ailleurs

à propos d'autres sujets; rappelons que, en plus des notations ordinaires, nous désignons les quantités $4R + r$, $4R - r_a$, $4R - r_b$, $4R - r_c$ par δ , δ_a , δ_b , δ_c . La formule

$$\Sigma a(r_b + r_c - r) = 2p(2R + r)$$

donne

$$-a(r_b + r_c + r_a) + b(r_b + r_a - r) + c(r_c + r_a - r) = 2(p - a)(2R - r_a);$$

$$\Sigma a(r_a - r)(r_b + r_c - 2r) = 2p(p^2 + r^2 - 10Rr)$$

donne

$$-a(r_a - r)(r_b + r_c - 2r_a) + b(r_c + r_a)(2r_a + r_b - r) + c(r_b + r_a)(2r_a + r_c - r) = 2(p - a)[(p - a)^2 + r_a^2 + 10Rr_a];$$

$$\Sigma a(r_b - r)(r_c - r) = 4RS$$

donne

$$a(r_a + r_b)(r_a + r_c) - b(r_a - r)(r_a + r_b) - c(r_a - r)(r_a + r_c) = 4RS;$$

$$\Sigma a(r_a - r)[(r_b - r)^2 + (r_c - r)^2] = 4Rp(p^2 + r^2 - 12Rr)$$

donne

$$-a(r_a - r)[(r_a + r_b)^2 - (r_a + r_c)^2] + b(r_a + r_c)[(r_a + r_b)^2 + (r_a - r)^2] + c(r_a + r_b)[(r_a + r_c)^2 + (r_a - r)^2] = 4R(p - a)[(p - a)^2 + r_a^2 + 12Rr_a];$$

$$\Sigma a^2 r_b r_c = 4pS(R + r)$$

donne

$$-a^2 r_b r_c + b^2 r r_b + c^2 r r_c = 4(p - a)S(R - r_a);$$

$$\Sigma r_a \cos^2 A = \delta - \frac{p^2(R - r)}{R^2}$$

donne

$$-r \cos^2 A + r_c \cos^2 B + r_b \cos^2 C = \delta_a - \frac{(p - a)^2(R + r_a)}{R^2};$$

$$\Sigma bcr_a \cos A = r(5p^2 - \delta^2)$$

donne

$$bcr \cos A - car_c \cos B - bar_b \cos C = r_a[5(p - a)^2 - \delta_a^2];$$

Appelons H l'orthocentre, O le centre du cercle inscrit, points qui ne changent pas par transformation continue; N, N_a, ... le

point de *Nagel* et ses transformés; λ , λ_a , ... le point de *Ger-
gonne* et ses transformés.

$$\overline{H\lambda}^2 = 4R^2 - \frac{8Rp^2(2R-r)}{\delta^2}$$

donne

$$\overline{H\lambda_a}^2 = 4R^2 - \frac{8R(p-a)^2(2R+r_a)}{\delta_a^2},$$

$$\overline{O\lambda}^2 = R^2 - \frac{4pS(R+r)}{\delta^2}$$

donne

$$\overline{O\lambda_a}^2 = R^2 + \frac{4(p-a)S(R-r_a)}{\delta_a^2},$$

$$\overline{o\lambda}^2 = r^2 - \frac{3S^2}{\delta^2}$$

donne

$$\overline{o_a\lambda_a}^2 = r_a^2 - \frac{3S_a^2}{\delta_a^2};$$

$$ON = R - 2r$$

donne

$$ON_a = R + 2r_a;$$

$$\overline{oN}^2 = p^2 + 5r^2 - 16Rr$$

donne

$$\overline{O_aN_a}^2 = (p-a)^2 + 5r_a^2 + 16Rr_a;$$

$$\overline{N\lambda}^2 = 16R \left[\frac{p^2(R+r)}{\delta^2} - r \right]$$

donne

$$\overline{N_a\lambda_a}^2 = 16R \left[\frac{(p-a)(R-r_a)}{\delta_a^2} + r_a \right], \quad \dots$$

Quelques remarques relatives aux fonctions réciproques;
par M. C.-A. LAISANT.

1. Une équation réciproque est, comme on le sait, celle dont le premier membre se compose d'un polynôme entier où les termes équidistants des extrêmes sont égaux. En appelant m le degré de ce polynôme $f(x)$, il s'ensuit que

$$(1) \quad f(x) = x^m f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nous pouvons prendre cette relation (1) comme définition et appeler *fonction réciproque de degré m* toute fonction qui y satisfait.

On remarquera que ax^m peut toujours être regardée, en vertu de cette définition, comme une fonction réciproque de degré $2m$.

2. Si nous formons successivement les dérivées première et seconde des deux membres de l'équation (1), nous aurons

$$(2) \quad f'(x) = mx^{m-1}f\left(\frac{1}{x}\right) - x^{m-2}f'\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$(3) \quad \begin{cases} f''(x) = m(m-1)x^{m-2}f\left(\frac{1}{x}\right) \\ \quad - 2(m-1)x^{m-3}f'\left(\frac{1}{x}\right) + x^{m-4}f''\left(\frac{1}{x}\right). \end{cases}$$

Posons

$$(4) \quad \varphi(x) = (m-1)f(x) - xf''(x).$$

Il viendra, en vertu des relations (2) et (3),

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi(x) = (m-1)x^{m-2}f'\left(\frac{1}{x}\right) - x^{m-3}f''\left(\frac{1}{x}\right) \\ \quad = x^{m-2} \left[(m-1)f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}f''\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\ \quad = x^{m-2}\varphi\left(\frac{1}{x}\right). \end{cases}$$

Par conséquent, $f(x)$ étant réciproque de degré m , la fonction $\varphi(x)$ ou $(m-1)f'(x) - x f''(x)$ est réciproque de degré $m-2$.

En appliquant ce résultat à la fonction $\varphi(x)$ elle-même, on reconnaît sans peine que la fonction

$$(m-2)(m-3)f''(x) - 2(m-3)xf'''(x) + x^2 f^{(iv)}(x)$$

est réciproque de degré $m-4$. De même, la fonction

$$(m-3)(m-4)(m-5)f'''(x) - 3(m-4)(m-5)xf^{(iv)}(x) + 3(m-5)x^2 f^{(v)}(x) - x^3 f^{(vi)}(x)$$

est réciproque de degré $m-6$, et il est facile de généraliser.

3. Les propriétés qui suivent sont pour ainsi dire évidentes, en vertu de l'équation de définition (1), et il suffira de les énoncer.

1° Si deux fonctions $f(x)$, $F(x)$ sont réciproques de même degré m , la fonction $Af(x) + BF(x)$, A et B étant deux constantes quelconques, est réciproque de même degré.

2° Si $f_1(x)$, $f_2(x)$ sont des fonctions réciproques de degrés m_1 et m_2 respectivement, la fonction $f_1(x) \times f_2(x)$ est réciproque de degré $m_1 + m_2$.

3° Dans la même hypothèse, la fonction $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ est réciproque de degré $m_1 - m_2$.

4° $f(x)$ étant une fonction réciproque de degré m , $[f(x)]^p$ est une fonction réciproque de degré mp .

4. D'après la définition adoptée ci-dessus, une fonction $f(x)$ est réciproque de degré zéro, quand on a

$$(6) \quad f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'autre part, nous pouvons écrire la relation (1) de définition sous la forme

$$\frac{f(x)}{x^{\frac{m}{2}}} = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{2}}}.$$

Par conséquent, si $f(x)$ est réciproque de degré m , la fonction $f(x) : x^{\frac{m}{2}}$ sera réciproque de degré zéro.

En écrivant $f(x) \times f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(x)$ étant une fonction quelconque, on obtient nécessairement une fonction réciproque de degré zéro.

Il en est de même si l'on forme $f\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

Les propriétés du n° 2 ci-dessus se simplifient quand on considère des fonctions réciproques de degré zéro. La relation (4) nous donne, en effet,

$$- \varphi(x) = f'(x) + x f''(x).$$

Cette fonction est donc réciproque de degré -2 , lorsque $f(x)$ est réciproque de degré zéro; et, par suite,

$$x f'(x) + x^2 f''(x)$$

est réciproque de degré zéro.

On voit de même que

$$x^2 f''(x) + x^3 f'''(x) + \frac{x^4}{2 \cdot 3} f^{(iv)}(x),$$

$$x^3 f'''(x) + x^4 f^{(iv)}(x) + \frac{1}{4} x^5 f^{(v)}(x) + \frac{x^6}{3 \cdot 4 \cdot 5} f^{(vi)}(x)$$

sont également des fonctions réciproques de degré zéro.

En combinant ces trois fonctions par l'addition de la première et de la troisième, et la soustraction de la seconde, on a

$$x f'(x) + \frac{5}{6} x^3 f^{(iv)}(x) + \frac{1}{4} x^5 f^{(v)}(x) + \frac{1}{6 \cdot 9} x^6 f^{(vi)}(x),$$

qui jouit aussi de la même propriété.

Sur quelques théorèmes d'Analyse et d'Arithmétique :

par M. EUGÈNE CATALAN.

I. — *Une formule de Cauchy.*

1. Cette formule, bien remarquable ⁽¹⁾, est

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & (1+x)(1+tx)(1+t^2x) \dots (1+t^{n-1}x) \\ & = 1 + \frac{1-t^n}{1-t} x + \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})}{(1-t)(1-t^2)} t x^2 + \dots + t^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n \end{aligned} \right. \quad (2).$$

On va voir qu'il est facile d'en faire une démonstration *directe*.

Dans le second membre, x^p a pour coefficient

$$T_{n,p} = \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1}) \dots (1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2) \dots (1-t^p)} t^{\frac{p(p-1)}{2}}.$$

Si l'on multiplie par $1+t^n x$ les deux membres de l'égalité (1), ce coefficient devient $T_{n,p} + t^n T_{n,p-1}$.

La formule étant évidente quand $n=1$, il faut donc, d'après le procédé classique, prouver que l'on a, *identiquement*,

$$(2) \quad T_{n+1,p} = T_{n,p} + t^n T_{n,p-1}.$$

Or, si l'on supprime le facteur commun

$$\frac{(1-t^n)(1-t^{n-1}) \dots (1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2) \dots (1-t^p)},$$

cette égalité se réduit à

$$\frac{1-t^{n+1}}{1-t^{p+1}} t^{\frac{p(p-1)}{2}} = \frac{1-t^{n-p+1}}{1-t^p} t^{\frac{p(p-1)}{2}} + t^{n+\frac{(p-1)(p-2)}{2}};$$

puis, à

$$(1-t^{n+1})t^{p-1} = (1-t^{n-p+1})t^{p-1} + t^n(1-t^p);$$

ce qui est exact.

II. — *Un théorème de Gauss.*

2. Comme je l'ai fait observer à l'endroit cité ⁽²⁾, d'après la

⁽¹⁾ Je m'en suis occupé, déjà, dans les *Notes sur la théorie des fractions continues*..., et dans les *Lettres à quelques Mathématiciens*.

⁽²⁾ *Comptes rendus*, septembre 1843, p. 527.

⁽³⁾ *Lettres*..., p. 19.

forme du premier membre, dans la formule de Cauchy, $T_{n,p}$ est un *polynôme entier*, fonction de t . D'ailleurs, $t^{\frac{p(p-1)}{2}}$ est une quantité première avec le dénominateur de $T_{n,p}$. En conséquence,

$$(3) \quad \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1}) \dots (1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2) \dots (1-t^p)} = \text{entier} \quad (1).$$

3. *Remarque I.* — Cette équation (3) constitue un beau théorème, dû à Gauss, ainsi que l'a constaté M. Perott (2).

Remarque II. — Le théorème de Gauss est cité dans l'*Algèbre* de M. J. Bertrand (première édition, p. 136). Cet Ouvrage est suivi des *Solutions des exercices*, données par G... et P... A la page 356, on trouve une démonstration de l'égalité (3). Mais elle me semble inexacte. En effet, elle se réduit à établir l'existence d'une relation analogue à l'égalité (2), sans que l'on sache si deux des trois termes sont entiers (3).

III. — Une rectification.

4. A la page 99 des *Recherches sur quelques produits indéfinis*, la formule qui précède l'égalité (20), empruntée aux *Fundamenta*, a été mal copiée. Elle doit être lue ainsi

$$\frac{q}{1-q^2} + 2^3 \frac{q^2}{1-q^4} + 3^3 \frac{q^3}{1-q^6} + 4^3 \frac{q^4}{1-q^8} + \dots = \frac{k^2 \omega^4}{\pi^2}.$$

D'ailleurs, l'égalité (20) est la même chose que

$$q(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\dots)^8 = \frac{k^2 \omega^4}{\pi^2}.$$

Donc la formule (378), *corrigée*, est

$$(378^{bis}) \quad q(1+q+q^3+q^6+\dots)^8 = \frac{q}{1-q^2} + 2^3 \frac{q^2}{1-q^4} + 3^3 \frac{q^3}{1-q^6} + \dots$$

(1) *Lettres...*, pp. 18 et 19. Elles contiennent quelques fautes typographiques.

(2) *Bulletin de la Société mathématique*, t. X, p. 87. La démonstration donnée par ce savant Professeur est plus *courte* que la nôtre: mais elle n'est pas *élémentaire*.

(3) *Voir*, sur ce point, la page 19 des *Lettres...* Faute d'avoir examiné suffisamment la page 356, j'avais admis cette *pseudo-démonstration*.

ou, ce qui revient au même,

$$(379) \quad (q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \dots)^2 = \frac{q^8}{1 - q^{16}} + 2^3 \frac{q^{16}}{1 - q^{32}} + 3^3 \frac{q^{24}}{1 - q^{48}} + \dots;$$

relation connue ⁽¹⁾.

IV. — Autres séries elliptiques.

5. On sait que

$$(4) \quad (q + q^9 + q^{25} + \dots)^2 = \frac{q^8}{1 - q^{16}} + 3 \frac{q^{12}}{1 - q^{24}} + 5 \frac{q^{20}}{1 - q^{40}} + \dots \quad (2).$$

Conséquemment,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{q^8}{1 - q^{16}} + 3 \frac{q^{12}}{1 - q^{24}} + 5 \frac{q^{20}}{1 - q^{40}} + \dots \right]^2 \\ & = \frac{q^8}{1 - q^{16}} + 2^3 \frac{q^{16}}{1 - q^{32}} + 3^3 \frac{q^{24}}{1 - q^{48}} + \dots \quad (3); \end{aligned} \right.$$

ou, par le changement de q^4 en x ,

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{x}{1 - x^2} + 3 \frac{x^3}{1 - x^6} + 5 \frac{x^5}{1 - x^{10}} + 7 \frac{x^7}{1 - x^{14}} + \dots \right]^2 \\ & = \frac{x^2}{1 - x^4} + 2^3 \frac{x^4}{1 - x^8} + 3^3 \frac{x^6}{1 - x^{12}} + \dots \quad (4). \end{aligned} \right.$$

6. A la page 527 des *Comptes rendus* ⁽⁵⁾, l'illustre Cauchy donne cette autre formule, aussi importante que la première :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{(1 - x)(1 - tx) \dots (1 - t^{n-1}x)} \\ & = 1 + \frac{1 - t^n}{1 - t} x + \frac{(1 - t^n)(1 - t^{n+1})}{(1 - t)(1 - t^2)} x^2 + \dots \quad (6). \end{aligned} \right.$$

⁽¹⁾ LEGENDRE, t. III, p. 133.

⁽²⁾ *Recherches*..., p. 99.

⁽³⁾ *Ibid.*

⁽⁴⁾ Cette relation, qui me paraît remarquable, figure dans la page 100 des *Recherches*...; mais trop sommairement. Elle suppose, bien entendu, que le nombre x est inférieur à 1.

⁽⁵⁾ Septembre 1843.

⁽⁶⁾ Dans la série formant le second membre, les coefficients des puissances de x sont, d'après le théorème de Gauss (n° 3), des *polynômes entiers*.

Il en résulte, par le changement de x en $-x$,

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{1}{(1+x)(1+tx) \dots (1+t^{n-1}x)} \\ = 1 - \frac{1-t^n}{1-t} x + \frac{(1-t^n)(1-t^{n+1})}{(1-t)(1-t^2)} x^2 - \dots \end{cases}$$

Comparant avec l'égalité (1), on a donc

$$(9) \quad \begin{cases} 1 = \left[1 + \frac{1-t^n}{1-t} x + \frac{(1-t^n)(1-t^{n+1})}{(1-t)(1-t^2)} t x^2 + \dots + t^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n \right] \\ \times \left[1 - \frac{1-t^n}{1-t} x + \frac{(1-t^n)(1-t^{n+1})}{(1-t)(1-t^2)} x^2 \right. \\ \left. - \frac{(1-t^n)(1-t^{n+1})(1-t^{n+2})}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} x^3 + \dots \right]; \end{cases}$$

et, si n devient infini,

$$(10) \quad \begin{cases} 1 = \left[1 + \frac{x}{1-t} + \frac{tx^2}{(1-t)(1-t^2)} + \frac{t^2x^3}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} + \dots \right] \\ \times \left[1 - \frac{x}{1-t} + \frac{x^2}{(1-t)(1-t^2)} - \frac{x^3}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} + \dots \right]. \end{cases}$$

7. Dans cette relation générale, supposons $t = x = q$. Elle devient

$$(11) \quad 1 = AB;$$

en posant, pour abréger,

$$(12) \quad A = 1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots,$$

$$(13) \quad B = 1 - \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} - \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots$$

8. A la page 52 des *Recherches*, on trouve

$$(14) \quad A = B'C',$$

en faisant

$$(15) \quad B' = 1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \dots,$$

$$(16) \quad C' = 1 + \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^{12}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \dots$$

De plus (1),

$$(15) \quad B' = \beta, \quad C' = \beta'.$$

La combinaison des égalités (11), (14) donne

$$(16) \quad 1 = BB'C';$$

ou, à cause des valeurs (15),

$$(17) \quad 1 = B\beta\beta'.$$

Mais, d'après Euler,

$$1 = \alpha\beta\beta' \quad (2);$$

donc

$$(18) \quad B = \alpha.$$

9. Si, dans une célèbre formule de Jacobi (3), on prend $z = -1$, on trouve

$$(19) \quad \alpha = 1 - \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \dots$$

A cause de la *définition* (13) et de l'égalité (18), nous avons donc, finalement,

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} - \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots \\ &= 1 - \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} - \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \dots \end{aligned} \right.$$

Ainsi, ces deux séries ont même limite (4).

V. — Théorème d'Arithmétique.

10. Reprenons la formule

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{x}{1-x^2} + 3 \frac{x^3}{1-x^6} + 5 \frac{x^5}{1-x^{10}} + \dots \right]^2 \\ &= \frac{x^2}{1-x^4} + 2^3 \frac{x^4}{1-x^6} + 3^3 \frac{x^6}{1-x^{12}} + \dots \end{aligned} \right.$$

(1) Même page.

(2) *Recherches*..., p. 2.

(3) *Fundamenta*, p. 180. Voir, aussi, les *Notes sur la théorie des fractions continues*..., p. 6.

(4) Les relations (18), (20) sont-elles *nouvelles*? Quoi qu'il en soit, elles *complètent*, pour ainsi dire, les théorèmes exprimés par les égalités (15).

Nous avons, en employant la notation d'Euler,

$$\frac{x}{1-x^2} + 3 \frac{x^3}{1-x^6} + 5 \frac{x^5}{1-x^{10}} + \dots = x + 4x^3 + 6x^5 + \dots + x^n \int n + \dots;$$

ou, pour abréger,

$$(21) \quad \frac{x}{1-x^2} + 3 \frac{x^3}{1-x^6} + 5 \frac{x^5}{1-x^{10}} + \dots = \sum_1^{\infty} x^n \int n,$$

n étant *impair*.

Dans le développement du premier membre de l'égalité (6), le coefficient de x^{2n} est donc

$$(22) \quad \int_1 \int (2n-1) + \int 3 \int (2n-3) + \dots + \int (2n-1) \int_1 = S_{2n}.$$

D'autre part, le terme général du second membre est

$$\lambda^3 \frac{x^{2\lambda}}{1-x^{4\lambda}}.$$

Développé, ce terme devient

$$\lambda^3 [x^{2\lambda} + x^{6\lambda} + x^{10\lambda} + \dots + x^{2\mu\lambda} + \dots],$$

μ étant *impair*. Si donc

$$\lambda\mu = n,$$

on voit que λ, μ sont deux facteurs, *conjugués*, du nombre *impair* n . Par suite, le coefficient de x^{2n} , dans le second membre dont il s'agit, est $\sum \lambda^3$ (1). On a donc ce théorème :

n étant un nombre impair, on décompose $2n$, par voie d'addition, en

$$1 + (2n-1), \quad 3 + (2n-3), \quad 5 + (2n-5), \dots, (2n-1) + 1;$$

et l'on fait la somme, S_{2n} , des produits

$$\int_1 \int (2n-1), \quad \int 3 \int (2n-3), \quad \dots, \quad \int (2n-1) \int_1.$$

D'autre part, on prend tous les diviseurs de n , savoir, $1, \dots, \lambda, \dots, n$; et l'on forme la somme $\sum \lambda^3$ de ces diviseurs.

Cela posé, les deux sommes sont égales.

(1) J'admetts la convergence de la série, facile à prouver.

11. *Application.* — Soit $n = 9$; d'où $\lambda = 1, 3, 9$. On a

$$S_{18} = 2 \left[\int_1 \int_{17} + \int_3 \int_{15} + \int_5 \int_{13} + \int_7 \int_{11} \right] + \left[\int_9 \right]^2 \\ = 2[1.18 + 4.24 + 6.14 + 8.12] + 13^2 = 588 + 169 = 757.$$

Cette somme doit égaler $1^3 + 3^3 + 9^3 = 1 + 27 + 729$; ce qui est vrai.

12. *Remarque.* — Si le nombre n est *premier*, les seules valeurs de λ sont 1 et n . Donc, dans ce cas particulier,

$$(23) \quad S_{2n} = 1 + n^3 \quad (1).$$

Liège, septembre 1891.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.



SÉANCE DU 2 DÉCEMBRE 1891.

PRÉSIDENTE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. Carvallo : *Sur la résolution numérique des équations.*

M. Fouret présente quelques observations à ce sujet.

M. Raffy : *Sur certaines surfaces dont les rayons de courbure sont liés par une relation.*

M. F. Lucas : *Sur les équations qui représentent le régime des machines.*

M. Antomari adresse une Note *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles.*

SÉANCE DU 16 DÉCEMBRE 1891.

PRÉSIDENTE DE M. COLLIGNON.

Démission : M. Paturet adresse sa démission de membre de la Société.

(1) Le théorème précédent, qui n'est pas nouveau (*Recherches...*, p. 100), me paraît curieux.¹ Il serait difficile peut-être de le démontrer *directement*.

Élections : M. de Fontviolant, présenté par MM. Rouché et de Comberousse; M. Blutel, présenté par MM. F. Lucas et Bioche, sont élus à l'unanimité.

Communications :

M. Hermann : *Sur un nouveau système de Cryptographie.*

M. Carvallo : *Démonstration d'un théorème de similitude sur les fonctions des machines*, signalé par M. F. Lucas.

M. Fouret : *Démonstration du théorème de Budan-Fourier.*

M. D. André présente quelques observations à ce sujet.

M. FÉLIX LUCAS fait la Communication suivante :

Sur les équations abstraites du fonctionnement des machines.

Dans ma Communication verbale, faite pendant la dernière séance, j'ai considéré une dynamo à courants alternatifs, avec induit sans fer, dont la force électromotrice est sinusoïdale, et j'ai montré que les lois moyennes de son fonctionnement en régime normal peuvent être représentées, aux échelles près, par des équations simplement numériques, dans lesquelles toutes les dimensions concrètes de la machine se trouvent éliminées.

Notre savant collègue, M. Carvallo, a montré que l'existence de ces équations abstraites ou canoniques résulte du principe de l'homogénéité concrète relativement aux trois unités fondamentales : longueur, masse et temps.

Au lieu de considérer l'intensité moyenne du courant en régime permanent, je vais considérer l'intensité réelle, périodiquement variable en fonction du temps.

Soient

R la résistance totale du circuit, comprenant la résistance intérieure de la machine et la résistance extérieure supposée non inductive;

L le coefficient de self-induction de l'induit;

E la force électromotrice variable déterminée en fonction du temps t par l'équation

$$(1) \quad E = E_0 \sin \frac{2\pi t}{T},$$

dans laquelle T représente la durée de la période.



L'intensité I du courant à l'instant t sera déterminée par l'équation différentielle

$$(2) \quad RI + L \frac{dI}{dt} - E_0 \sin \frac{2\pi t}{T} = 0.$$

Admettons *a priori* que l'équation finie entre I et t puisse se ramener à une équation abstraite et cherchons à quelles conséquences nous conduira cette hypothèse. Il est clair, d'abord, que cette équation abstraite, devant s'appliquer au cas particulier où l'on aurait $L = 0$, devra être $y = \sin x$. Remarquons, d'ailleurs, que l'équation (1), qui donne la force électromotrice, contient implicitement, comme donnée concrète, le choix particulier de l'origine du temps t , origine qui est prise de manière que le maximum E_0 de la force électromotrice se produise pour $t = \frac{T}{4}$; cette donnée concrète s'est introduite dans l'équation (2), dont le premier membre contient $-E$; il nous serait impossible de l'éliminer si nous remplacions t par une variable x qui lui serait proportionnelle et s'annulerait avec lui; c'est par une expression de la forme $ax + b$ qu'il faut nécessairement remplacer t pour arriver à une équation abstraite.

Posons

$$(3) \quad \begin{cases} t = \frac{T}{2\pi} x + \theta, \\ I = \frac{E_0}{R} \cos \frac{2\pi\theta}{T} y, \end{cases}$$

d'où

$$(4) \quad \frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi E_0}{RT} \cos \frac{2\pi\theta}{T} \frac{dy}{dx},$$

et substituons dans (2); nous trouverons

$$(5) \quad y - \sin x + \frac{2\pi L}{RT} \frac{dy}{dx} - \tan \frac{2\pi\theta}{T} \cos x = 0.$$

Il est clair que cette équation différentielle s'identifiera avec l'équation finie $y = \sin x$, si nous disposons du paramètre arbitraire θ de manière que l'on ait

$$(6) \quad \tan \frac{2\pi\theta}{T} = \frac{2\pi L}{RT}.$$

L'hypothèse que nous avons faite *a priori* se trouve, par con-

séquent, justifiée; la relation finie entre I et t peut se ramener à la forme abstraite

$$(7) \quad y = \sin x$$

au moyen des formules (3) et (6); cette relation finie concrète est elle-même

$$(8) \quad I = \frac{E_0}{R} \cos \frac{2\pi\theta}{T} \sin \frac{2\pi(t-\theta)}{T};$$

nous avons donc obtenu par une voie très simple l'intégrale de l'équation différentielle (2).

On pourrait objecter que $y = \sin x$ n'est pas l'intégrale générale de l'équation (5) accompagnée de l'équation de condition (6); on a, en effet, rigoureusement

$$(9) \quad y - \sin x - \frac{d(y - \sin x)}{dx} \tan \frac{2\pi\theta}{T} = 0,$$

équation dont l'intégrale générale est

$$(10) \quad y = \sin x + C e^{-x \tan \frac{2\pi\theta}{T}};$$

mais comme x et $\tan \frac{2\pi\theta}{T}$ sont deux nombres positifs dont le premier croît indéfiniment, le second terme du second membre est évanescant et doit être négligé dans la pratique.

Remarques sur l'intégration des équations aux dérivées partielles; par M. X. ANATOMARI.

Étant donnée une équation aux dérivées partielles du premier ordre à trois variables

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

la méthode de Lagrange et Charpit pour trouver une intégrale complète de cette équation consiste, comme l'on sait, à adjoindre à l'équation proposée une autre équation

$$(2) \quad \Phi(x, y, z, p, q) = 0,$$

telle que, si l'on tire p et q des équations (1) et (2), l'équation

$$dz = p dx + q dy$$

soit complètement intégrable.

Si l'on pose

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Z, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = Q,$$

on trouve que Φ doit vérifier la relation

$$(3) \quad P \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (Pp + Qq) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - (X + pZ) \frac{\partial \Phi}{\partial p} - (Y + qZ) \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0.$$

Pour que la relation d'intégrabilité soit satisfaite, il suffit que l'équation (3) soit satisfaite en tenant compte des équations (1) et (2). Il est clair que la condition d'intégrabilité sera satisfaite *a fortiori* si l'équation (3) est vérifiée identiquement.

La fonction F est une intégrale de cette équation. Supposons que Φ soit une autre intégrale; les deux équations

$$F = 0, \quad \Phi - \alpha = 0,$$

où α désigne une constante arbitraire, déterminent les fonctions p et q d' x , d' y et de z , telles que l'équation

$$(4) \quad dz = p dx + q dy$$

soit complètement intégrable, pourvu que F et Φ soient des fonctions distinctes de p et q .

L'intégration de l'équation (4) introduira une nouvelle constante arbitraire b et la fonction z d' x et d' y , ainsi définie, sera une intégrale complète de l'équation proposée.

D'après cela on voit que, pour trouver une intégrale complète de l'équation (1), il faut non seulement trouver une intégrale $\Phi - \alpha = 0$ de l'équation (3), mais aussi pouvoir résoudre les équations $F = 0$ et $\Phi - \alpha = 0$ par rapport à p et à q .

Je me propose de montrer dans cette Note que l'on peut, dans certains cas faciles à prévoir, simplifier la recherche d'une intégrale complète en modifiant légèrement la méthode de Lagrange et Charpit.

Je reprends l'équation (1) et je suppose que l'on puisse, n'importe comment, exprimer p et q en fonction d' x , d' y , de z et d'un paramètre λ . Soient

$$(5) \quad p = \varphi(x, y, z, \lambda), \quad q = \psi(x, y, z, \lambda).$$

Dans ces formules je considère λ comme une fonction d' x , d' y

et de z et je détermine cette fonction par la condition que l'équation (4) soit complètement intégrable. La condition d'intégrabilité est

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial y} + q \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right] = \frac{\partial \psi}{\partial x} + p \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x} + p \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right]$$

et s'écrit, en tenant compte des équations (5)

$$(6) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \left[\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right] + \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Soit

$$\lambda = \theta(x, y, z, a)$$

une intégrale de cette équation renfermant une constante arbitraire; en portant dans les équations (5), on a des valeurs de p et de q contenant une constante arbitraire, et telles que (4) soit intégrable. L'intégration de cette équation introduira une nouvelle constante arbitraire et la fonction z d' x et d' y , ainsi déterminée, sera une intégrale complète de l'équation proposée.

Il est bon d'observer que l'équation (6) se simplifie si l'on suppose que l'équation (1) soit indépendante de z , car alors on peut supposer que λ ne dépend que de x et de y et l'équation (6) devient

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Remarquons aussi que l'on pourra, dans certains cas, se dispenser de recourir à l'équation (6), si l'on aperçoit pour λ une valeur conduisant à une combinaison intégrable.

Voici d'ailleurs des cas dans lesquels on pourra appliquer la méthode de Lagrange ainsi modifiée.

Je reprends l'équation (1)

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

et je suppose que l'on y considère x, y, z comme fixes, p et q comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans le plan, de sorte que l'équation représente alors une courbe de ce plan. On pourra appliquer la méthode toutes les fois que l'on pourra exprimer les coordonnées d'un point de cette courbe en fonction d'un paramètre. Il en sera ainsi, en particulier, dans le cas où la courbe serait unicursale.

Je vais appliquer à deux exemples :

PREMIER EXEMPLE. — *Trouver toutes les surfaces dont les normales sont divisées en parties proportionnelles par les trois plans coordonnés.*

Les équations d'une normale à l'une de ces surfaces sont

$$X - x + p(Z - z) = 0, \quad Y - y + q(Z - z) = 0.$$

En faisant $X = 0$ dans la première, et $Y = 0$ dans la deuxième, on en déduit

$$Z = \frac{x + pz}{p}, \quad Z = \frac{y + qz}{q};$$

et il suffit évidemment d'exprimer que le rapport de ces valeurs de z est constant, ce qui donne

$$q(x + pz) = p(y + qz)k$$

ou

$$(k - 1)pqz + kpy - qx = 0.$$

Si λ désigne un paramètre, cette équation est satisfaite identiquement si l'on prend

$$(k - 1)zp - x = k\lambda x,$$

$$(k - 1)zq + ky = -\frac{y}{\lambda}.$$

Si l'on suppose $\lambda = \text{const.}$, on obtient immédiatement une combinaison intégrable

$$(k - 1)zdz - xdx + kydy = k\lambda xdx - \frac{ydy}{\lambda}$$

ou bien

$$(1 + k\lambda)xdx - \frac{1 + k\lambda}{\lambda}ydy - (k - 1)zdz = 0,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$(1 + k\lambda)x^2 - \frac{1 + k\lambda}{\lambda}y^2 - (k - 1)z^2 = a.$$

On met aisément cette équation sous la forme

$$\frac{x^2}{k\rho + \sigma} + \frac{y^2}{\rho + \sigma} + \frac{z^2}{\sigma} - 1 = 0.$$

DEUXIÈME EXEMPLE. — *Trouver toutes les surfaces telles que, si l'on prend le symétrique par rapport à l'origine du pied de la normale sur le plan des xy , le point ainsi obtenu soit situé sur la trace du plan tangent sur le plan des xy .*

On obtient facilement l'équation

$$z(p^2 + q^2) + 2px + 2qy - z = 0,$$

que l'on peut écrire

$$(pz + x)^2 + (qz + y)^2 = (x^2 + y^2 + z^2).$$

Sous cette forme elle est satisfaite, identiquement, en posant

$$pz + x = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cos \varphi.$$

$$qz + y = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sin \varphi.$$

Si l'on suppose que φ soit un angle constant, on obtient une combinaison intégrable

$$z dz + x dx + y dy = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (\cos \varphi dx + \sin \varphi dy).$$

On en déduit

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos \varphi dx + \sin \varphi dy,$$

et, finalement, l'intégrale complète

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x \cos \varphi + y \sin \varphi + h)^2$$

Ces deux exemples m'ont été communiqués par M. Kœnigs.

Sur certaines surfaces dont les rayons de courbure sont liés par une relation : par M. L. RAFFY.

1. L'hélicoïde le plus général est représenté par les formules

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega, \quad z = \varphi(\rho) + h\omega,$$

d'où l'on déduit, en appelant R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux, les deux relations

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\rho^3 \varphi' \varphi'' - h^2}{[\rho^2(1 + \varphi'^2) + h^2]^2},$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\rho(\rho^2 + h^2)\varphi'' + [\rho^2(1 + \varphi'^2) + 2h^2]\varphi'}{[\rho^2(1 + \varphi'^2) + h^2]^2}.$$

On voit que les deux rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre. On sait, d'autre part, que tous les hélicoïdes

sont applicables sur des surfaces de révolution et que ces deux mêmes propriétés appartiennent aussi aux surfaces à courbure totale constante. Nous allons montrer que, réciproquement, *toute surface applicable sur une surface de révolution, et dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre, est un hélicoïde ou une surface à courbure totale constante*, sauf dans un cas particulier qui sera spécifié (n° 7).

2. Pour exprimer que les deux rayons R_1 et R_2 sont fonctions l'un de l'autre, on peut écrire qu'il existe une relation entre leur somme et leur produit, ou encore entre la courbure moyenne et la courbure totale. Si cette relation ne contient pas la courbure moyenne, la courbure totale est constante. Ce cas signalé et écarté, nous pourrions dire que $R_1 + R_2$ est une fonction de $R_1 R_2$. Or l'élément linéaire de toute surface applicable sur une surface de révolution peut toujours être ramené à la forme

$$ds^2 = W^2(du^2 + dv^2),$$

où W désigne une fonction de v seulement; la courbure totale ne dépend alors que de v . Nous devons donc supposer qu'il en est de même de la courbure moyenne.

Rappelons maintenant les formules de Codazzi. L'élément linéaire étant

$$ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2,$$

les rotations du trièdre formé par la normale à la surface et les tangentes aux courbes coordonnées satisfont aux six équations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A q_1 + C p = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1, \\ -r = \frac{1}{C} \frac{\partial A}{\partial v}, \quad \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - p r_1, \\ r_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial C}{\partial u}, \quad \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1; \end{array} \right. \quad (2)$$

on a de plus

$$(3) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{A p_1 - C q}{AC}.$$

2. ~~Introducing the condition~~ : ~~the condition~~ ~~is~~
~~that~~ $x = y = \sqrt{z}$ ~~is~~ ~~the~~ ~~condition~~

$$x - y = 0 \quad z = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y}{x}$$

3. ~~Introducing the condition~~ $x = y$ ~~is~~ ~~the~~ ~~condition~~ ~~is~~ ~~the~~ ~~condition~~
~~that~~ $x = y$ ~~is~~ ~~the~~ ~~condition~~

$$x = y \quad z = -\frac{y}{x}$$

4. ~~Introducing the condition~~ $x = y$ ~~is~~ ~~the~~ ~~condition~~ ~~is~~ ~~the~~ ~~condition~~
~~that~~ $x = y$ ~~is~~ ~~the~~ ~~condition~~

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = z$$

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = z \quad z = -\frac{y}{x}$$

$$x - y = z \quad z = -\frac{y}{x}$$

5. ~~Introducing the condition~~ $x = y$ ~~is~~ ~~the~~ ~~condition~~ ~~is~~ ~~the~~ ~~condition~~
~~that~~ $x = y$ ~~is~~ ~~the~~ ~~condition~~

$$x = y \quad z = -\frac{y}{x}$$

6. ~~Introducing the condition~~ $x = y$ ~~is~~ ~~the~~ ~~condition~~ ~~is~~ ~~the~~ ~~condition~~
~~that~~ $x = y$ ~~is~~ ~~the~~ ~~condition~~

$$x = y \quad z = -\frac{y}{x}$$

7. ~~Introducing the condition~~ $x = y$ ~~is~~ ~~the~~ ~~condition~~ ~~is~~ ~~the~~ ~~condition~~
~~that~~ $x = y$ ~~is~~ ~~the~~ ~~condition~~

$$x = y \quad z = -\frac{y}{x}$$

$$x = y \quad z = -\frac{y}{x}$$

8. ~~Introducing the condition~~ $x = y$ ~~is~~ ~~the~~ ~~condition~~ ~~is~~ ~~the~~ ~~condition~~
~~that~~ $x = y$ ~~is~~ ~~the~~ ~~condition~~

$$x = y \quad z = -\frac{y}{x}$$

$$x = y \quad z = -\frac{y}{x}$$

d'où, égalant les deux expressions de τ_m , on conclut

$$(10) \quad \begin{cases} \left(\frac{V_0 - V_0 r}{V_1} \right)^2 - \frac{d}{dv} \frac{V_1 - V_1 r}{V_1} \\ = \left[\frac{V_0 - V_0 r}{V_1} \frac{V_1 - V_1 r}{V_1} - \frac{d}{dv} \frac{V_0 - V_0 r}{V_1} \right] \sin \tau. \end{cases}$$

Nous avons ici deux cas à distinguer suivant que l'équation (10) détermine $\sin \tau$ ou se réduit à une identité.

4. PREMIER CAS. — L'équation (10) détermine $\sin \tau$. Alors τ est une fonction de la seule variable v ; en vertu des formules (7), (5) et (1)', les six rotations p, q, r, p_1, q_1, r_1 ne dépendent également que de v . Nous allons prouver que :

Si une surface a pour élément linéaire

$$ds^2 = W^2(du^2 + dv^2),$$

W désignant une fonction de v , et si les rotations du trièdre dont deux arêtes sont les tangentes aux courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ ne dépendent que de v , cette surface est un hélicoïde.

En effet, les rotations ne dépendant que de v , les formules de Codazzi (second groupe) deviennent

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dv} = qr_1 - rq_1, \\ \frac{dq}{dv} = rp_1 - pr_1, \\ \frac{dr}{dv} = pq_1 - qp_1. \end{cases}$$

On en déduit (1)

$$p^2 + q^2 + r^2 = \text{const.} = l^2,$$

et les trois angles d'Euler peuvent s'exprimer comme suit :

$$-\sin \theta \sin \varphi = \frac{p}{l}, \quad -\sin \theta \cos \varphi = \frac{q}{l}, \quad \cos \theta = \frac{r}{l}, \quad \psi = V - lu,$$

V représentant l'intégrale

$$-l \int \frac{pp_1 + qq_1}{l^2 - r^2} dv.$$

(1) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. I. p. 52.

Les neuf cosinus des trois arêtes du trièdre sont donc connus par les formules d'Euler. Les coordonnées X, Y, Z des points de la surface s'expriment au moyen de ces neuf cosinus et des translations par les formules

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u} &= a\xi + b\tau, & \frac{\partial Y}{\partial u} &= a'\xi + b'\tau, & \frac{\partial Z}{\partial u} &= a''\xi + b''\tau, \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= a\xi_1 + b\tau_1, & \frac{\partial Y}{\partial v} &= a'\xi_1 + b'\tau_1, & \frac{\partial Z}{\partial v} &= a''\xi_1 + b''\tau_1.\end{aligned}$$

Mais, d'après les hypothèses faites sur l'élément linéaire et sur le trièdre, on a

$$\xi = W, \quad \xi_1 = \tau = 0, \quad \tau_1 = W;$$

en sorte qu'il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u} &= aW, & \frac{\partial Y}{\partial u} &= a'W, & \frac{\partial Z}{\partial u} &= a''W, \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= bW, & \frac{\partial Y}{\partial v} &= b'W, & \frac{\partial Z}{\partial v} &= b''W.\end{aligned}$$

Enfin rappelons que, en vertu de nos hypothèses, les formules de Codazzi (premier groupe) deviennent

$$(1)' \quad q_1 + p = 0, \quad r = -\frac{W'}{W}, \quad r_1 = 0;$$

par suite, la première des relations (2)' donne

$$Wp = \text{const.} = h/l^2.$$

3. Cela posé, reportons-nous aux formules d'Euler

$$\begin{aligned}a &= \cos \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi, \\ b &= \cos \theta \cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi, \\ c &= \sin \theta \sin \psi, \\ a' &= \cos \theta \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi, \\ b' &= \cos \theta \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi, \\ c' &= \sin \theta \cos \psi, \\ -a'' &= \sin \theta \sin \varphi, \\ -b'' &= \sin \theta \cos \varphi, \\ c'' &= \cos \theta,\end{aligned}$$

et remplaçons-y les angles θ, φ, ψ par leurs expressions données

plus haut. Nous trouvons

$$\begin{aligned} a &= V_1 \cos lu - V_2 \sin lu, & b &= V_3 \cos lu - V_4 \sin lu, \\ a' &= V_2 \cos lu + V_1 \sin lu, & b' &= V_4 \cos lu + V_3 \sin lu, \\ a'' &= \frac{p}{l}, & b'' &= \frac{q}{l}, \end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{pr \sin V}{l\sqrt{p^2 + q^2}} + \frac{q \cos V}{\sqrt{p^2 + q^2}}, & V_2 &= \frac{pr \cos V}{l\sqrt{p^2 + q^2}} - \frac{q \sin V}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \\ V_3 &= \frac{qr \sin V}{l\sqrt{p^2 + q^2}} - \frac{p \cos V}{\sqrt{p^2 + q^2}}, & V_4 &= \frac{qr \cos V}{l\sqrt{p^2 + q^2}} + \frac{p \sin V}{\sqrt{p^2 + q^2}}. \end{aligned}$$

Nous connaissons maintenant les différentielles totales des trois coordonnées

$$\begin{aligned} dX &= W(V_1 \cos lu - V_2 \sin lu) du + W(V_3 \cos lu - V_4 \sin lu) dv, \\ dY &= W(V_2 \cos lu + V_1 \sin lu) du + W(V_4 \cos lu + V_3 \sin lu) dv, \\ dZ &= \frac{W}{l} (p du + q dv) = h l du + \frac{Wq}{l} dv. \end{aligned}$$

L'intégration donne, en négligeant des constantes additives,

$$\begin{aligned} X &= \frac{WV_1}{l} \sin lu + \frac{WV_2}{l} \cos lu, \\ Y &= \frac{WV_2}{l} \sin lu - \frac{WV_1}{l} \cos lu, \\ Z &= hlu + \frac{1}{l} \int Wq dv. \end{aligned}$$

Ces formules peuvent s'écrire, en désignant par W_0, W_1, W_2 trois fonctions de v ,

$$X = W_0 \cos(W_1 + lu), \quad Y = W_0 \sin(W_1 + lu), \quad Z = h(W_1 + lu) + W_2;$$

elles représentent des hélicoïdes, qui dépendent de deux paramètres h et l , conformément au théorème de Bour.

6. *Remarque.* — Nous avons négligé (n° 3) l'hypothèse

$$(11) \quad V_0^2 = \frac{dr}{dv},$$

qui, en vertu des équations (6), entraîne

$$(12) \quad \begin{aligned} p &= \mu = 0, \\ V_0' + V_0 r &= 0. \end{aligned}$$

Comme r , d'après les formules (1)', est égal à la dérivée logarithmique, changée de signe, de W , cette dernière relation montre que V_0 est proportionnel à W , ou, à cause de l'équation (4), que la courbure moyenne est une constante $\frac{1}{k}$. La fonction W est d'ailleurs déterminée par l'équation du second ordre

$$\frac{W^2}{k^2} + \frac{d}{dv} \frac{W'}{W} = 0,$$

qui résulte des équations (11) et (12), et qu'il serait facile d'intégrer. Mais cette équation exprime que la courbure totale est constante et égale à $\frac{1}{k^2}$. Ainsi les deux rayons principaux sont égaux. L'hypothèse négligée ne donnerait donc que des sphères.

7. SECOND CAS. — *L'équation (10) est une identité.* — Nous supposons nuls le premier membre et le coefficient de $\sin \tau$. Les deux équations ainsi obtenues

$$(13) \quad \left(\frac{V'_0 + V_0 r}{V_1} \right)^2 - \frac{d}{dv} \frac{V'_1 - V_1 r}{V_1} = 0,$$

$$(14) \quad \frac{V'_0 + V_0 r}{V_1} \frac{V'_1 - V_1 r}{V_1} - \frac{d}{dv} \frac{V'_0 + V_0 r}{V_1} = 0,$$

déterminent à la fois les fonctions V_0 et W et, par suite, l'élément linéaire proposé. Les surfaces de révolution qui admettent cet élément linéaire ne sont plus, comme dans le premier cas, engendrées par une méridienne arbitraire. Néanmoins il convient de faire voir que les surfaces qui résultent de leur déformation et dont les rayons de courbure sont fonctions l'une de l'autre ne sont pas toutes des hélicoïdes. A cet effet, nous discuterons les équations (13) et (14) et le système (9), en supposant la quantité $V'_0 + V_0 r$ d'abord différente de zéro, puis égale à zéro.

8. *Hypothèse I.* — La quantité $V'_0 + V_0 r$ n'est pas nulle. — Si nous faisons

$$(15) \quad \frac{V'_0 + V_0 r}{V_1} = \sigma,$$

nous pourrions remplacer le système (13) et (14) par celui-ci :

$$(16) \quad \frac{V'_1 - V_1 r}{V_1} = \frac{\sigma'}{\sigma}, \quad \sigma\sigma' - \sigma'^2 = \sigma^4.$$

La seconde équation s'intègre aisément; on trouve d'abord

$$dv = \frac{d\sigma}{\sigma \sqrt{\sigma^2 + a}},$$

a étant une arbitraire; puis, avec une nouvelle arbitraire v_0 ,

$$(17) \quad \begin{cases} \sigma = \frac{2\sqrt{a}}{e^{-\sqrt{a}(\nu-\nu_0)} - e^{\sqrt{a}(\nu-\nu_0)}}, \\ \frac{\sigma'}{\sigma} = \sqrt{\sigma^2 + a} = \sqrt{a} \frac{e^{-\sqrt{a}(\nu-\nu_0)} + e^{\sqrt{a}(\nu-\nu_0)}}{e^{-\sqrt{a}(\nu-\nu_0)} - e^{\sqrt{a}(\nu-\nu_0)}}, \end{cases}$$

si la constante a n'est pas nulle; si $a = 0$, il vient

$$(18) \quad \sigma = -\frac{1}{\nu - \nu_0}, \quad \frac{\sigma'}{\sigma} = -\frac{1}{\nu - \nu_0}.$$

Revenons aux équations (9), maintenant compatibles et qui s'écriront

$$(9)' \quad \begin{cases} -\frac{\partial \tau}{\partial u} = \sigma \sin \tau - \frac{\sigma'}{\sigma}, \\ \frac{\partial \tau}{\partial v} = \sigma \cos \tau. \end{cases}$$

En y substituant successivement les expressions (17) et (18) de σ , puis intégrant, nous obtenons, abstraction faite d'une constante qui s'ajouterait à u ,

$$\operatorname{tang} \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{e^{-\frac{\sqrt{a}}{2}(\nu-\nu_0)} + e^{\frac{\sqrt{a}}{2}(\nu-\nu_0)}}{e^{-\frac{\sqrt{a}}{2}(\nu-\nu_0)} - e^{\frac{\sqrt{a}}{2}(\nu-\nu_0)}} \operatorname{tang} \frac{u\sqrt{a}}{2};$$

et, dans le cas où $a = 0$,

$$\operatorname{tang} \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{u}{\nu - \nu_0}.$$

De ces formules, on déduit facilement les expressions de p et de μ , ayant

$$p = V_1 \cos \tau, \quad \mu = V_1 \sin \tau,$$

puis les autres rotations, ainsi définies,

$$q_1 = -p, \quad p_1 = \mu + V_0, \quad q = \mu - V_0, \quad r_1 = 0, \quad r = -\frac{W'}{W}.$$

Pour déterminer les fonctions V_0 et W , il faudrait intégrer le système formé par l'équation (15) et la première des équations (61)

$$(19) \quad \frac{V'_0 + V_0 r}{\sqrt{V_0^2 + r'}} = \sigma, \quad \frac{2V_0 V'_0 - r''}{2(V_0^2 - r')} - r = \frac{\sigma'}{\sigma},$$

dont les seconds membres sont maintenant connus. Les fonctions V_0 et r une fois obtenues, on aurait W par une quadrature, r étant sa dérivée logarithmique changée de signe.

Mais il n'est pas nécessaire d'effectuer cette intégration pour voir que les quatre rotations p, q, p_1, q_1 dépendent à la fois de u et de v . Or on peut établir que pour tout hélicoïde à courbure totale variable, dont l'élément linéaire a été ramené à la forme $W^2(v)(du^2 + dv^2)$, les rotations du trièdre considéré sont des fonctions de v seulement.

D'autre part, on ne peut pas supposer que la courbure totale soit constante; car l'équation

$$\frac{r'}{W^2} = \text{const.},$$

qui exprime cette propriété, est contradictoire avec le système (19) où σ revêt l'une des formes (17) ou (18). C'est ce qu'on vérifierait sans difficulté. En conséquence, les surfaces dont nous venons de nous occuper ne sont pas des hélicoïdes.

9. *Hypothèse II.* — La quantité $V'_0 + V_0 r$ est nulle. Nous avons vu (n° 6) que cette hypothèse revient à supposer constante la courbure moyenne

$$\frac{V_0}{W} = \frac{1}{k}.$$

Alors l'équation (14) devient une identité; l'équation (13) donne

$$(13') \quad \frac{V'_1}{V_1} - r = \frac{V'_1}{V_1} - \frac{W''}{W} = \text{const.} = \alpha.$$

Nous trouvons ainsi les surfaces à courbure moyenne constante applicables sur des surfaces de révolution dont l'élément linéaire sera déterminé par l'équation (13'). On en déduit d'abord

$$V_1 W = e^{\alpha v} e^{\int r dv} \quad (r\alpha = \text{const.}).$$

puis, en remplaçant V_1 par son expression actuelle,

$$(20) \quad W^2 \left(\frac{W^2}{k^2} + \frac{d}{dv} \frac{W'}{W} \right) = e^{2x(v-v_0)}.$$

Telle est l'équation qui détermine la fonction W .

Dans l'hypothèse présente, les équations (9) donnent

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = x, \quad \frac{\partial \tau}{\partial v} = 0.$$

On voit que, si x n'est pas nul, on peut prendre $\tau = xu$, et supposer $v_0 = 0$. Ayant ainsi

$$V_0 = \frac{W}{k}, \quad V_1 = \frac{e^{xv}}{W}, \quad p = V_1 \cos xu, \quad \mu = V_1 \sin xu,$$

nous connaissons, grâce aux formules (1)' et (5), les six rotations p, p_1, q, q_1, r, r_1 , dont les quatre premières dépendront de u en même temps que de v . Les translations étant connues aussi,

$$\xi = r_1 = W, \quad \xi_1 = r_1 = 0,$$

à chaque expression de W vérifiant l'équation

$$W^2 \left(\frac{W^2}{k^2} + \frac{d}{dv} \frac{W'}{W} \right) = e^{2xv}$$

correspondra une surface à courbure moyenne constante $\frac{1}{k}$, qui ne sera pas un hélicoïde et qui sera applicable sur des surfaces de révolution à courbure moyenne variable, d'élément linéaire

$$ds^2 = W^2(du^2 + dv^2).$$

Il convient de remarquer que notre analyse donne toutes les surfaces à courbure moyenne $\frac{1}{k}$ qui sont applicables sur des surfaces de révolution.

10. En supposant $x \neq 0$, nous avons écarté seulement les hélicoïdes, puisqu'ils sont caractérisés par des rotations indépendantes de u . Soit donc maintenant $x = 0$; cette supposition ne donne que des hélicoïdes à courbure moyenne constante, puisque les rotations sont fonctions de v seulement, la fonction τ se rédui-

sant à une constante, et elle les donne tous. L'élément linéaire de ces hélicoïdes dépend de l'équation

$$(20)' \quad W^2 \left(\frac{W^2}{k^2} + \frac{d}{dv} \frac{W'}{W} \right) = \text{const.},$$

qui s'intègre par une quadrature elliptique. Connaissant l'élément linéaire, on peut déterminer les surfaces elles-mêmes. On trouve ainsi pour le profil qui les engendre l'équation

$$dz = \frac{(\rho^2 + h^2)(\rho^2 + C) d\rho}{\rho \sqrt{(\rho^2 + h^2)[k^2 \rho^2 - (\rho^2 + C)^2]}},$$

où C désigne une constante arbitraire, et h le pas, arbitraire aussi, du mouvement hélicoïdal; k est toujours l'inverse de la courbure moyenne donnée. Nous ne développerons pas ces résultats. Nous allons les retrouver en résolvant un problème plus général.

11. Proposons nous de *déterminer tous les hélicoïdes dont la courbure totale et la courbure moyenne sont liées par une relation linéaire*. Les surfaces parallèles à un hélicoïde étant elles-mêmes des hélicoïdes, il résulte d'une remarque importante due à M. O. Bonnet (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1853; p. 433) que les hélicoïdes dont la courbure totale et la courbure moyenne sont liées par une relation linéaire se déduisent de hélicoïdes à courbure totale constante, auxquels ils sont parallèles. Il faudrait donc déterminer ceux-ci; mais on peut donner une solution directe du problème. Soient M, N, P trois constantes données et soit

$$\frac{M}{R_1 R_2} + N \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + P = 0$$

la relation proposée. D'après les formules indiquées au n° 1, la fonction $\varphi(\rho)$ qui définit le profil générateur des hélicoïdes sera déterminée par l'équation différentielle

$$M \frac{\rho^3 \varphi' \varphi'' - h^2}{[\rho^2(1 + \varphi'^2) - h^2]^2} + N \frac{\rho(\rho^2 + h^2) \varphi'' + [\rho^2(1 + \varphi'^2) + 2h^2] \varphi'}{[\rho^2(1 + \varphi'^2) - h^2]^2} + P = 0,$$

dont l'intégrale n'apparaît pas immédiatement. Mais on peut re-

marquer que les coefficients de M et de N ont respectivement pour expressions

$$-\frac{1}{2\rho} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^2}{\rho^2(1+\varphi'^2)+h^2}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho^2\varphi'}{\sqrt{\rho^2(1+\varphi'^2)+h^2}}.$$

Par suite, en intégrant et désignant par Q une constante arbitraire, on aura

$$-\frac{M\rho^2}{\rho^2(1+\varphi'^2)+h^2} + \frac{2N\rho^2\varphi'}{\sqrt{\rho^2(1+\varphi'^2)+h^2}} + P\rho^2 + Q = 0.$$

Cette équation détermine φ' en fonction de ρ . On est donc ramené à une quadrature. On pourra trouver, en particulier, tous les hélicoïdes à courbure moyenne constante ou à courbure totale constante. Ces deux derniers problèmes dépendent des intégrales elliptiques. La remarque de M. O. Bonnet prouve qu'il en est de même du problème général et détermine le changement de variable et de fonction qui permettrait de le vérifier.



ERRATA.

- Page 134, équation (3), *au lieu de* : $3(R^2 - \rho^2 + \rho'^2)$, *lisez* : $3(R^2 - \rho^2 + \rho'^2)^2$.
- » 134, dernière ligne, *au lieu de* : $4Rr_a$, *lisez* : $4Rr_a^2$.
- » 140, ligne 2 en remontant, *au lieu de* : inscrit, *lisez* : circonscrit.
- » 141, ligne 2 en descendant, *ajoutez* : Appelons o, o_a, o_b, o_c les centres des cercles tangents aux trois côtés.
- » 141, ligne 4 en remontant, *au lieu de* : $\overline{O_a N_a^2}$, *lisez* : $\overline{o_a N_a^2}$.
- » 141, dernière ligne, *au lieu de* : $(p - a)$, *lisez* : $(p - a)^2$.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XIX.

	Pages.
Liste des présidents de la Société mathématique de France depuis sa fonda- tion	v
État de la Société mathématique de France au commencement de l'an- née 1891	vii
Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société mathématique de France échange son Bulletin	xv
Sur les surfaces développables; par M. GUSTAF KÖRR	1
Propriété géométrique des coefficients du binôme; par M. C.-A. LAISANT ..	4
Sur la rectification approximative d'un arc de courbe; par M. A.-E. PELLET.	5
Détermination directe de l'intégrale $f(\cos mx)^p (\cos m'x)^{p'} \dots (\sin nx)^q (\sin n'x)^{q'} \dots dx;$ par M. C.-A. LAISANT	8
Sur les fonctions sphériques; par M. F. CASPARY	11
Tétraèdre arithmétique; par M. C.-A. LAISANT	18
Comptes rendus des séances	24
Sur la liaison entre les expressions du rayon de courbure en coordonnées ponctuelles et en coordonnées tangentielles; par M. D'OCAGNE	26
Sur l'extension de la Géométrie cartésienne aux figures imaginaires; par M. C.-A. LAISANT	29
Sur l'impossibilité d'une fonction d'une seule variable à plus de deux pé- riodes; par M. BEGHIN	31
Sur une détermination particulière du centre de courbure des lignes planes; par M. D'OCAGNE	31
Détermination de toutes les surfaces moulures applicables sur des surfaces de révolution; par M. RAFFY	34
Sur les substitutions linéaires d'une seule variable à coefficients périodiques; par M. D'OCAGNE	37
Remarques sur les lignes asymptotiques des surfaces réglées dont les géné- ratrices appartiennent à une congruence linéaire; par M. CH. BIOCHE	39
Sur les surfaces gauches dont les lignes de courbure possèdent une propriété donnée; par M. CH. BIOCHE	42
Remarque sur l'interpolation; par M. C.-A. LAISANT	44
Sur les sections circulaires du tore; par M. E. VICAIRE	46
Sur la réduction des fonctions entières algébriques; par M. PELLET	48
Quelques formules relatives aux fonctions hyperboliques; par M. C.-A. LAISANT	52
Comptes rendus des séances	54

	Pages.
Sur les surfaces moulures dont les lignes d'égale courbure sont parallèles; par M. RAFFY.....	55
Sur les congruences de droites du premier ordre et de la première classe; par M. G. FOURET.....	58
Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires; par M. ÉMILE PICARD.....	61
Sur la déformation des surfaces spirales; par M. RAFFY	65
Sur des potentiels conjugués; par M. APPELL	69
Mémoire sur les surfaces gauches rationnelles; par M. GENTY.....	70
Sur les fonctions d'une variable imaginaire; par M. FÉLIX LUCAS	93
Remarques sur les courbes brachistochrones; par M. APPELL.....	97
Sur une équerre cycloïdale propre à effectuer la rectification des arcs de cercle; par M. GUIMARAES	98
Sur les fonctions d'une variable imaginaire; par M. FÉLIX LUCAS	99
Sur le mouvement d'un point en coordonnées elliptiques; par M. APPELL.	102
Sur la construction des cubiques cuspidales; par M. D'OCAGNE.....	103
Sur deux problèmes de permutations; par M. LAISANT	105
Relation entre les rayons de courbure des développées des courbes réci- proques; par M. GODEFROY	109
Développement du quotient de deux fonctions holomorphes; par M. DE PRESLE.....	114
Note sur les intersections de trois quadriques; par M. FÉLIX LUCAS.....	118
Sur une classe de surfaces gauches; par M. BICCHE.....	120
Note sur l'interpolation successive; par M. LAISANT.....	121
Sur les surfaces réglées qui passent par une courbe et coupent sous un angle constant la développable des tangentes; par M. BICCHE	123
Exemples de fonctions de plusieurs variables admettant un groupe de substitutions linéaires entières; par M. APPELL.....	124
Sur les points singuliers des équations différentielles à deux variables du premier ordre et du premier degré; par M. FOURET.....	127
Sur une transformation relative à la géométrie du triangle; par M. LEMOINE.	132
Sur la transformation continue; par M. LEMOINE	135
Quelques remarques relatives aux fonctions réciproques; par M. LAISANT..	141
Sur quelques théorèmes d'Analyse et d'Arithmétique; par M. CATALAN ...	145
Sur les équations abstraites du mouvement des machines; par M. F. LUCAS.	152
Remarques sur l'intégration des équations aux dérivées partielles; par M. ANTONARI.....	154
Sur certaines surfaces dont les rayons de courbure sont liés par une rela- tion; par M. RAFFY	158

AP

FIN DE LA TABLE DU TOME XIX.



PARIS. IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.









